Bollettino
Unione Matematica Italiana

Laura Emanuele

Comportamento di elementi curvilinei e superficiali in trasformazioni di contatto.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 200–205.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_200_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Comportamento di elementi curvilinei e superficiali in trasformazioni di contatto.

Nota di LAURA EMANUELE (a Torino)

Sunto. - *Nella presente nota si considera il comportamento di elementi curvilinei piani* E_2, E_3, *contenenti un dato* E_1, *e di una calotta superficiale del II ordine, contenente un dato* E_s, *in trasformazioni di contatto.*

Summary. - *In the present note the behaviour of curvilinear plane elements* E_2, E_3, *containing a datum* E_1, *and of a superficial cap of the II order containing a datum* E_s *in contact transformations, is considered.*

1. - In una trasformazione di contatto fra due piani gli elementi curvilinei del second'ordine E_2, contenenti un dato elemento del prim'ordine $E_1 \equiv Aa$, si trasformano secondo una legge ben nota, la quale può enunciarsi, in forma metrica, dicendo che il birapporto dei quattro centri di curvatura di quattro qualunque fra gli E_2 considerati risulta invariante. Questo risultato si trova in M. RABUT [1], E. BOMPIANI [2], L. BERWALD [3].

La legge a cui si è alluso, dal punto di vista analitico, è la seguente: assunte nel primo piano coordinate, per esempio, cartesiane (x, y) con l'origine O coincidente con A e l'asse x coincidente con la retta a, e analogamente nel secondo piano (XY), e introdotta fra i due piani una trasformazione di contatto — che porti l'E_1Aa nel'$E_1A'a'$ — avente localmente l'equazione:

$$(1.1)\quad a_{01}y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + b_{01}Y + b_{20}X^2 + 2b_{11}XY + \\ + b_{02}Y^2 + c_{11}xX + c_{12}xY + c_{21}yX + c_{22}yY + [3] = 0$$

un E_2

$$(1.2)\qquad y = \alpha x^2 + [3]$$

si trasforma nell'E_2

$$(1.3)\qquad Y = AX^2 + [3]$$

con

$$A = \frac{c_1\alpha + c_2}{c_3\alpha + c_4} \tag{1.4}$$

dove (1)

$$\begin{cases} c_1 = -\, a_{01}b_{20} & c_3 = b_{01}a_{01} \\ c_2 = \dfrac{c_{11}^2}{4} - a_{20}b_{20} & c_4 = b_{01}a_{20} \end{cases} \tag{1.5}$$

Nella presente Nota mi propongo di estendere il precedente risultato passando dagli E_2 contenenti un dato E_1:

a) agli E_3 contenenti un dato E_1 (n2);

b) alle calotte del second'ordine contenenti un dato elemento del prim'ordine $A\alpha$ (n3).

2. - Senza mutare i sistemi di riferimento precedentemente assunti e scrivendo ora l'equazione (1.1) della trasformazione di contatto nella forma più estesa:

$$\begin{aligned} &a_{01}y + a_{30}x^3 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ &+ a_{03}y^3 + b_{01}Y + b_{30}X^3 + 2b_{21}X^2Y + 2b_{12}XY^2 + b_{20}X^2 + 2b_{11}XY + \\ &+ b_{02}Y^2 + b_{03}Y^3 + c_{11}xX + c_{12}xY + c_{21}yX + c_{22}yY + d_{21}x^2X + \\ &+ d_{12}xX^2 + e_{21}x^2Y + e_{12}xY^2 + f_{21}y^2X + f_{12}yX^2 + g_{12}yY^2 + \\ &+ g_{21}y^2Y + h_{112}xXY + h_{212}yXY + h_{121}xyX + h_{122}xyY + [4] = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

un E_3

$$y = \alpha x^2 + \beta x^3 + [4] \tag{2.2}$$

si trasforma nell'E_2

$$Y = AX^2 + BX^3 + [4] \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{c_1\alpha + c_2}{c_3\alpha + c_4} \\[2ex] B = \dfrac{H_0 + H_1\alpha + H_2\alpha^2 + H_3\alpha^3 + k_0\beta}{\lambda\,(c_3\alpha + c_4)^3} \end{cases} \tag{2.4}$$

(1) Nel lavoro [2] verosimilmente a causa di errori di stampa, le formule (1.5) appaiono scritte in modo un poco diverso.

dove c_1, c_2, c_3, c_4 sono espressi dalle (1.5), mentre $H_0, H_1, H_2, H_3, k, \lambda$ si esprimono in funzione dei coefficienti della (2.1) a norma delle:

$$
(2.5)\quad \begin{cases}
H_0 = 8a_{20}(b_{11}b_{20} - b_{30}b_{01}) + 4a_{20}^2c_{11}(b_{01}d_{12} - b_{11} - c_{12}b_{20}) + \\
\qquad + c_{11}^2(b_{01}a_{30}c_{11} - 2b_{01}a_{20}d_{21} + c_{12}c_{11}a_{20}). \\
H_1 = 24a_{20}^2a_{01}(b_{11}b_{20} - b_{30}b_{01}) + 8c_{11}a_{20}a_{01}(b_{01}d_{12} - b_{11} - c_{12}b_{20}) - \\
\qquad - 2b_{01}c_{11}^2(a_{01}d_{21} + a_{20}c_{21}) + c_{11}^3(c_{12}a_{01} + 2b_{01}a_{11}). \\
H_2 = 2a_{01}[12a_{20}a_{01}(b_{11}b_{20} - b_{30}b_{01}) + 2a_{01}c_{11}(b_{01}d_{12} - b_{11} - c_{12}b_{20}) - \\
\qquad - b_{01}c_{11}^2c_{21}]. \\
H_3 = 8a_{01}^3(b_{11}b_{20} - b_{30}b_{01});\ k_0 = b_{01}c_{11}^3a_{01};\ \lambda = 16b_{01}.
\end{cases}
$$

Il procedimento analitico per ottenere le formule (2.4) è il seguente: considero il sistema

$$
(2.6)\qquad \begin{cases}
\Omega(x, y, X, Y) = 0 \\
\Omega_x + p\Omega_y = 0
\end{cases}
$$

essendo $\Omega(x, y, X, Y) = 0$ l'equazione della trasformazione di contatto (2.1), $\Omega_x = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\Omega_y = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}$ e p il coefficiente angolare della retta a che forma parte dell'E_1; cosicchè per una linea (2.2)

$$
(2.7)\qquad p = 2\alpha x + 3\beta x^2 + [3].
$$

Si elimina X fra le due equazioni ottenute dal sistema (2.6) sostituendo ad y e Y i valori dati dalle (2.2), (2.3). Tale eliminazione si effettua ricavando dalla seconda fra le (2.6)

$$
(2.8)\qquad X = \tau x + \sigma x^2 + [3]
$$

con

$$
(2.9)\quad \begin{cases}
\tau = -\dfrac{2(a_{01}\alpha + a_{20})}{c_{11}} \\
\sigma = \dfrac{4c_{11}(\alpha a_{01} + a_{20})(d_{21} + \alpha c_{21}) - 4(\alpha a_{01} + a_{20})^2(c_{12}A + d_{12}) \quad 3c_{11}^2(a_{30} + 2a_{11}\alpha + \beta a_{01}}{c_{11}^3}
\end{cases}
$$

e sostituendo poi X nella prima di quelle due equazioni. Risulta così una serie di potenze nella sola x eguagliata identicamente a zero: annullando il coefficiente del termine di grado minimo, cioè

x^2, si ha la (1.4) e annullando il coefficiente del termine di grado massimo, cioè x^3 si ha la seconda delle (2.4).

Delle equazioni (2.4) si può assegnare un'interpretazione geometrica rappresentando gli E_3 (2.2) contenenti un dato E_1 nei punti $P(\alpha, \beta)$ di un piano π e analogamente gli E_3 (2.3) nei punti $P'(A, B)$ di un piano π'. Allora le (2.4) esprimono che nasce una trasformazione di DE JOUQUIÈRES di ordine tre fra i piani π, π' descritti dai punti P e P' immagini di due E_3 corrispondenti.

Allo scopo di evitare elementi eccezionali nella rappresentazione considerata, ai piani π, π' si possono sostituire ([2]) due coni quadrici Γ, Γ'.

Ne risulta fra i punti di questi coni una corrispondenza birazionale (che muta generatrici in generatrici) con risultati che non sembra però si possono esprimere in termini semplici.

3. - Assunte nel primo spazio coordinate cartesiane (x, y, z) con l'origine 0 coincidente con A e con il piano xy coincidente con il piano α e analogamente nel secondo spazio, si considera fra i due spazi una trasformazione di contatto — che porta l'$E_1 A\alpha$ nell'$E_1 A'\alpha'$ — avente l'equazione direttrice:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{001}z + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + 2a_{110}xy + 2a_{101}xz + \\ & + 2a_{011}yz + b_{001}Z + b_{200}X^2 + b_{020}Y^2 + b_{002}Z^2 + 2b_{110}XY + \\ & + 2b_{101}XZ + 2b_{011}YZ + c_{11}xX + c_{12}xY + c_{13}xZ + c_{21}yX + \\ & + c_{22}yY + c_{23}yZ + c_{31}zX + c_{32}zY + c_{33}zZ + [3] = 0 \end{aligned} \right.$$

cosicchè una calotta del second'ordine

$$(3.2) \qquad z = \lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + [3]$$

si trasforma in una calotta del second'ordine

$$(3.3) \qquad Z = \lambda' X^2 + 2\mu' XY + \nu' Y^2 + [3]$$

con

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda' &= \frac{a\lambda + b\mu + c\nu + d\lambda\nu + e\mu^2 + f}{a'\lambda + b'\mu + c'\nu + d'\lambda\nu + e\mu^2 + f'} \\ \mu' &= \frac{g\lambda + h\mu + j\nu + l\lambda\nu + m\mu^2 + n}{a'\lambda + b'\mu + c'\nu + d'\lambda\nu + e'\mu^2 + f'} \\ \nu' &+ \frac{p\lambda + q\mu + r\nu + s\lambda\nu + t\mu^2 + w}{a'\lambda + b'\mu + c'\nu + d'\lambda\nu + e'\mu^2 + f'} \end{aligned} \right.$$

([2]) E. BOMPIANI, *Elementi differenziali regolari piani rispetto al gruppo proiettivo*, Vnlume I, v. pag. 179, Roma, 1955.

dove:

$$
(3.5)\left\{\begin{array}{ll}
a = a_{001}(c_{21}{}^2 - 4b_{200}a_{020}); & b = 2a_{001}(4b_{200}a_{110} - c_{11}c_{21} \\
c = a_{001}(c_{11}{}^2 - 4b_{200}a_{200}); & d = -4b_{200}a^2{}_{001} \\
e = 4b_{200}a_{001}{}^2; & f = c_{11}{}^2a_{020} + c_{21}{}^2a_{200} - 2c_{11}c_{21}a_{110} + \\
 & \quad + 4b_{200}(a_{110}{}^2 - a_{200}a_{020}) \\
g = a_{001}(c_{21}c_{22} - 4b_{110}a_{020}); & h = a_{001}[(c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}) - 8b_{110}a_{110}] \\
j = a_{001}(c_{11}c_{12} - 4b_{110}a_{200}); & l = -4a^2{}_{001}b_{110} \\
m = 4a_{001}{}^2 b_{110}; & n = 4b_{110}(a_{110}{}^2 - a_{200}a_{020}) - a_{110}(c_{11}c_{22} + \\
 & \quad + c_{12}c_{21}) + c_{11}(c_{22}a_{200} + c_{12}a_{020}) \\
p = a_{001}(c_{22}{}^2 - 4a_{020}b_{020}); & q = 2a_{001}(b_{020}a_{110} - c_{12}c_{22}) \\
r = a_{001}(c_{12}{}^2 - 4b_{020}a_{200}); & s = -4b_{020}a_{001}{}^2 \\
t = 4b_{020}a^2{}_{001}; & w = c_{22}{}^2a_{200} + c_{12}{}^2a_{020} - 2c_{12}c_{22}a_{110} + \\
 & \quad + 4b_{020}(a_{110}{}^2 - a_{200}a_{020}) \\
a' = 4a_{001}b_{001}a_{020}; & b' = -8a_{001}b_{001}a_{110} \\
c' = 4a_{001}b_{001}a_{200}; & d' = 4a_{001}{}^2b_{001} \\
e' = -4a_{001}{}^2b_{001}; & f' = 4b_{001}(a_{200}a_{020} - a_{110}{}^2)
\end{array}\right.
$$

Il procedimento per ottenere le formule precedenti è il seguente: considero il sistema

$$
(3,6) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\Omega(x, y, z, X, Y, Z) = 0 \\
\Omega_x + p\,\Omega_z = 0 \\
\Omega_y + q\,\Omega_z = 0
\end{array}\right.
$$

essendo $\Omega(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ l'equazione direttrice (3.1) della trasformazione di contatto, $\Omega_x = \frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\Omega_y = \frac{\partial\Omega}{\partial y}$, $\Omega_z = \frac{\partial\Omega}{\partial z}$ e p, q le ulteriori coordinate della faccetta $A\alpha$, cosicchè per una calotta (3 2)

$$
(3.7) \qquad \left\{\begin{array}{l}
p = 2\lambda x + 2\mu y + [2] \\
q = 2\mu x + 2\nu q + [2]
\end{array}\right. .
$$

Nelle due ultime equazioni del sistema (3.6) si sostituisce z secondo la (3.2) e p, q secondo le (3.7); dalle due equazioni così ottenute si possono allora ricavare x, y in funzione di X, Y, Z. Sostituiti finalmente nella prima equazione del sistema (3 6) questi valori di x e y, e inoltre ancora il valore di z a norma della (3.2), si ottiene un'equazione nelle X, Y, Z che, nei termini esplicitati, deve coincidere con la (3.3). Si ricavano così esplicitamente i valori di λ', μ', ν'.

Delle equazioni (3.4) si può assegnare un'interpretazione geometrica rappresentando le calotte (3.2) contenenti il dato E_1 nei punti $P(\lambda, \mu, \nu)$ di uno spazio Σ e analogamente le calotte (3.3) nei punti $P'(\lambda', \mu', \nu')$ di uno spazio Σ'. Allora le (3.4) rappresentano una trasformazione quadratica (2.2) fra i due spazi Σ e Σ' descritti dai punti P e P' immagini di due calotte corrispondenti.

Per ragioni di simmetria nel comportamento dei due spazi Σ, Σ' è sufficiente che ci limitiamo a descrivere com'è costituito il sistema lineare omaloidico Θ delle quadriche di Σ corrispondenti ai piani dello spazio Σ'. Per semplicità introduciamo nello spazio Σ coordinate omogenee di punto y_1, y_2, y_3, y_4 ponendo

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \lambda : \mu : \nu : 1 \tag{3.8}$$

Allora la conica base del sistema Θ è rappresentata dalle:

$$\begin{cases} y_2^2 - y_1 y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

mentre l'ulteriore punto base è rappresentato dalla:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \begin{vmatrix} b+b' & c+c' & f+f' \\ h+b' & j+c' & n+f' \\ q+b' & r+c' & w+f' \end{vmatrix} : \tag{3.10}$$

$$: \begin{vmatrix} a+a' & c+c' & f+f' \\ g+a' & j+c' & n+f' \\ p+a' & r+c' & w+f' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & f+f' \\ g+a' & h+b' & n+f' \\ p+a' & q+b' & w+f' \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ g+a' & h+b' & j+c' \\ p+a' & q+b' & r+c' \end{vmatrix} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Rabut, *Théorie des invariants universels,* « Journal de l'École Polytechnique », (2), 4, 1898, v. pag. 137.

[2] E. Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano,* « Rendiconti degli Atti dell'Accademia dei Licei », (6), 4, 1926, v. pag. 435.

[3] L. Berwald, *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano,* Bollettino UMI, vol. VI, 1927, pp. 241-250.