Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Le V_5 che posseggono $\infty^{11} E_2$ di $\gamma_{1,3}$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 206–213.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_206_0>

Le V_5 che posseggono ∞^{11} E_2 di $\gamma_{1,3}$

Nota di Francesco Speranza (a Bologna)

Sunto. - *Si determinano le* V_5 *che posseggono* ∞^{11} E_2 *di* $\gamma_{1,3}$.

Summary. - V_5 *with* ∞^{11} E_2 *of* $\gamma_{1,3}$ *are founded.*

1. Com'è noto, si dice che una curva tracciata su una V_k è, per questa, una quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$ quando l'S_k tangente a V_k e l'S_3 osculatore alla curva hanno spazio intersezione di dimensione > 2 (oppure quando il secondo è indeterminato, e quindi la curva è piana). Si dice E_2 di $\gamma_{1,3}$ un E_2 appartenente ad una quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$.

Il Villa ha stabilito numerose proprietà sulle varietà che posseggono sistemi di elementi di quasi-asintotiche, in particolare sulle V_k che posseggono ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$; ed ha risolto il problema della ricerca delle V_k suddette nei seguenti casi (1):

1) per $k < 5$;

2) per $\delta = 3k - 2$ e $\delta = 3k - 3$ (massimi valori di δ compatibili con k);

3) quando V_k soddisfa al minimo oppure al massimo numero di equazioni di Laplace, compatibili con k e δ.

Il Villa stesso m'ha consigliato d'occuparmi della ricerca sopra detta, per le V_5 che posseggono ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$ (in tale ipotesi, i valori di δ per i quali la soluzione non è già nota sono 9, 10, 11). La ricerca di tali varietà può basarsi — come ha indicato il Villa (2) — sul fatto che la varietà degli spazî tangenti a V_k ha dimensione $4k - \delta - 1$.

Avendo il Muracchini determinato le V_5 la cui varietà degli spazî tangenti ha dimensione inferiore all'ordinaria (3), ci si ri-

(1) Cfr. M. Villa, *Ricerche sulle varietà* V_k *che posseggono* ∞^δ E_2 *di* $\gamma_{1,3}$, *con particolare riguardo al caso* $k = 4$, $\delta = 8$, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6), 7, 373-427 (1939). A tale Memoria, che si richiamerà con M, si rinvia anche per ulteriori notizie bibliografiche.

(2) Cfr. M. Villa, M, p. 375.

(3) Cfr. L. Muracchini, *Le varietà* V_5 *i cui spazi tangenti ricoprono una varietà* W *di dimensione inferiore alla ordinaria*, «Riv. di Mat. Univ. Parma»: Parte I, **2**, 435-462 (1951): Parte II, **3**, 75-89 (1952).

conduce a ricercare fra quest'ultime varietà quelle che posseggono ∞^{δ} E_2 di $\gamma_{1,3}$.

Nel n. 2, applicando un risultato del MURACCHINI, si dà una proprietà delle V_k con ∞^{δ} E_2 di $\gamma_{1,3}$ [4], che soddisfano a d equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti, con

$$d \leq \frac{6k\delta - \delta^2 - 8k^2 + 10k - 3\delta - 6}{2},$$

proprietà che viene applicata nel numero successivo.

Nei numeri 3 e 4 si determinano le V_5 con $\infty^{11} E_2$ di $\gamma_{1,3}$. Tenendo conto anche dei tipi già noti e dei tipi che rientrano nel caso del n. 2, esse sono:

1) *Gli* S_1*-coni che proiettano una* V_3 *che possiede* ∞^4 *curve* $\gamma_{1,3}$;

2) *Le* V_5 *di* S_8 *i cui spazî tangenti riempiono l'*S_8;

3) *Le* V_5 (di S_9) *luogo di* ∞^2 V_3 *poste negli* S_4 *di un* S_3*-cono proiettante la superficie di* VERONESE;

4) *Il cono* (di S_9) *che proietta da un punto la* V_4^6 *di* SEGRE.

In un prossimo lavoro studierò il caso $k = 5$, $\delta = 10$.

2. Ricordo alcune relazioni numerative:

a) assegnato k, hanno interesse i valori di δ soddisfacenti alle disuguaglianze

$$2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 2.$$

b) assegnati k e δ, il numero d di equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti cui soddisfa V_k è assoggettato alle:

$$\frac{(4k - \delta)(\delta - 2k + 1)}{2} \leq d \leq \frac{k(k-5)}{2} + \delta + 1 \quad [5].$$

c) per $2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$, la varietà degli spazî tangenti a V_k ha dimensione $4k - \delta - 1$ esattamente: fra queste vanno quindi ricercate le V_k con ∞^{δ} E_2 di $\gamma_{1,3}$ [6].

In base a tale proprietà, possiamo dimostrare che *le* V_k *che posseggono* ∞^{δ} E_2 *di* $\gamma_{1,3}(2k - 1 \neq \delta \neq 3k - 2)$, *e che soddisfano a* d *equazioni di* LAPLACE *linearmente indipendenti, con*

$$d \leq \frac{6k\delta - \delta^2 - 8k^2 + 10k - 3\delta - 6}{2} \tag{1}$$

[4] Per $\delta \neq 3k\text{-}2$; d'altra parte, la soluzione, nel caso $\delta = 3k\text{-}2$, è già completamente nota (cfr. M. VILLA, M, p. 374).

[5] Cfr. M. VILLA, M, p. 382.

[6] Cfr. M. VILLA, M, l. c.

sono i coni $\Gamma_k^{\delta-2k}$, *che proiettano da un* $S_{\delta-2k}$ *una* $V_{3k-\delta-1}$, *dotata di* $\infty^{6k-2\delta-4}$ *quasi-asintotiche* $\gamma_{1,3}$, *e soddisfacente a*

$$d - \frac{(4k-\delta)(\delta-2k+1)}{2}$$

equazioni di LAPLACE *linearmente indipendenti* (7).

Infatti, una V_k soddisfacente a d equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti, e tale che la varietà degli spazî tangenti abbia dimensione $2k-l$, con

$$1 \leq l \leq k-2$$

$$lk - \frac{l(l-1)}{2} \leq d \leq lk - \frac{l(l-1)}{2} + k - l - 2,$$

è un cono che proietta da un S_{l-1} una V_{k-l} soddisfacente a $d - lk + \frac{l(l-1)}{2}$ equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti (8). Fra queste vanno ricercate le V_k con ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$ (dove $\delta = l + 2k - 1$), e soddisfacenti ad un numero di equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti, compreso fra

$$\frac{(\delta-2k+1)(4k-\delta)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{6k\delta - \delta^2 - 8k^2 + 10k - 3\delta - 6}{2}$$

(estremi compresi). L'estremo inferiore è precisamente il minimo numero di equazioni di LAPLACE (linearmente indipendenti) cui soddisfa una V_k (con ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$): occorre quindi tener conto solo dell'estremo superiore. D'altra parte, se un cono proiettante da un $S_{\delta-2k}$ una $V_{3k-\delta-1}$ possiede ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$, la $V_{3k-\delta-1}$ possiede $\infty^{2(3k-\delta-1)-2}$ curve $\gamma_{1,3}$, e viceversa (9); l'asserto è così dimostrato.

(7) Quando d assume il valore minimo $\frac{(4k-\delta)(\delta-2k+1)}{2}$, si ha un teorema ben noto. Si veda: M. VILLA, *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (6) 28, 3-12 (1938_2).

(8) Per $l=1$, cfr. L. MURACCHINI, op. cit., Parte I, p. 444; per $l>1$, cfr. op. cit., Parte II, p. 77. Nel secondo l. c., il numero d'equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti cui soddisfa V_{k-l} è affetto da un errore tipografico.

(9) Cfr. M. VILLA, M, p. 408. Le curve $\gamma_{1,3}$ di V_k sono le curve appartenenti ai coni che da $S_{\delta-2k}$ proiettano le $\gamma_{1,3}$ di $V_{3k-\delta-1}$: cfr. M, p. 409.

3. Fra le V_5 che posseggono ∞^δ E_2 di $\gamma_{1,3}$ sono già note quelle relative ai massimi valori di δ ($\delta = 13$ e $\delta = 12$) ([10]); quelle che ne posseggono ∞^{11} verranno ricercate in questo numero e nel successivo.

Una tale V_5 soddisfa ad un numero d di equazioni di LAPLACE compreso fra 9 e 12. Nel caso in cui d soddisfa alla (1) (cioè se $d = 9$, oppure $d = 10$), si ha, dalla proposizione del numero precedente, che la V_5 è un S_1-cono che proietta una V_3 con ∞^4 curve $\gamma_{1,3}$ soddisfacente a $d - 9$ equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti ([11]). Nel caso in cui d sia massimo, la varietà è pure nota: si tratta di una V_5 di S_8, i cui S_5 tangenti riempiono l'S_8 ([12]). Resta da considerare il caso $d = 11$; le V_5 soddisfacenti a 11 equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti, e tali che la varietà degli spazi tangenti ha dimensioni 8, sono:

a) S_0-coni proiettanti una V_4 sviluppabile, soddisfacente a 6 equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti ([13]);

b) S_0-cono (di S_9) proiettante la V_4^6 di SEGRE ([14]);

c) V_5 luogo di ∞^2 V_3 poste negli S_4 di un S_3-cono proiettante una superficie generica ([15]);

d) V_5 luogo di ∞^2 S_3 con S_6 tangente fisso lungo ogni S_3 ([16]).

In quanto ai tipi *a*) e *b*), si noti che un S_0-cono proiettante una V_4, possiede ∞^{11} E_2 di $\gamma_{1,3}$ se e solo se V_4 possiede ∞^8 E_2 di $\gamma_{1,3}$ (anche se non è sviluppabile) ([17]). Ne segue che gli S_0-coni V_5 che posseggono ∞^{11} E_2 di $\gamma_{1,3}$ sono:

([10]) Cfr. M. VILLA, *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 28, 3-12 (1938); Cfr. pure M. VILLA, M, p. 374.

([11]) Nel caso $d = 9$, la V_3 è la varietà V_3^9 di S_9 rappresentante le quadriche di S_3. Si veda M. VILLA, *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*, Note I e II, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 28, p. 253.

([12]) M. VILLA, M, p. 412.

([13]) Cfr. L. MURACCHINI, op. cit., Parte II, p. 77. La V_4 può essere, ovviamente, un cono, ma in tal caso il cono V_5 è un S_1-cono.

([14]) Cfr. L MURACCHINI, op. cit., Parte II, p. 84.

([15]) Cfr. L. MURACCHINI, op. cit., Parte II, p. 82.

([16]) Cfr. L. MURACCHINI, l. cit..

([17]) Cfr. M. VILLA, M, p. 410. I coni che proiettano una V_4 con ∞^8 E_2 di $\gamma_{1,3}$, non sviluppabile, rientrano quindi negli altri tipi.

I) Il cono che proietta una V_4 di S_7 (i cui S_4 tangenti riempiono S_7); questa V_4 non è necessariamente sviluppabile, comunque la V_5 rientra fra le V_5 di S_8, i cui spazî tangenti riempiono S_8.

II) Il cono che proietta da un punto una varietà V_4 posta nel cono di VERONESE (proiettante da un S_2 una superficie di VERONESE); anche tale V_4 non è necessariamente sviluppabile. La V_5 risulta però situata sul cono C_6 che dall'S_3, congiungente gli spazî singolari dei due coni precedenti, proietta la superficie di VERONESE, ciascun S_4 del cono incontrando la V_5 in una V_3; si ottiene così un caso particolare delle varietà che saranno considerate nel numero successivo.

III) Il cono proiettante da una retta una V_3 con ∞^4 quasi–asintotiche $\gamma_{1,3}$: questo caso si ha quando la V_4 è un S_0-cono proiettante una V_3 del tipo detto. Si noti che, limitatamente al caso in cui V_3 soddisfi a 0 o ad 1 equazione di LAPLACE, tale tipo rientra in quello considerato nel n. 2: ne sfuggono invece le V_5 che soddisfano a 11 o a 12 equazioni di LAPLACE (V_3 soddisfacendo allora, rispettivamente, a 2 o a 3 equazioni). Nell'ultimo caso, però, V_5 è il cono che da un S_1 proietta una V_3 di S_6, i cui S_3 tangenti riempiono S_6: si ricade così nelle V_5 di S_8, i cui S_5 tangenti riempiono S_8.

IV) l'S_0–cono proiettante la V_4^6 di SEGRE.

È interessante notare che, in tutti i casi precedenti, le curve $\gamma_{1,3}$ *dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile*; esse sono le curve tracciate sui coni che proiettano dallo spazio singolare di V_5 le $\gamma_{1,3}$ di V_4 (casi I), II), IV)) o di V_3 (caso III)) ([18]).

4. Consideriamo ora una V_5 luogo di ∞^2 V_3 poste negli S_4 di un S_3–cono C_6 proiettante una superficie generica. Da un teorema del VILLA, si trae allora che, se V_5 possiede ∞^{11} E_2 di $\gamma_{1,3}$ è la varietà $\Phi_5^{2,3}$, vale a dire il cono C_6 è il cono che proietta da S_3 la superficie di VERONESE. Le $\gamma_{1,3}$ di V_5 sono le $\gamma_{1,3}$ delle V_4 intersezione di V_5 con i coni quadrici di vertice S_3 contenuti in C_6, e *dipendono da due funzioni arbitrarie d'una variabile* ([19]).

Infine, nel caso *d*) (V_5 luogo di ∞^2 S_3 con S_6 tangente fisso lungo ogni S_3), si trova, nell'ipotesi che V_5 possegga ∞^{11} E_2 di $\gamma_{1,3}$,

([18]) Cfr. M. VILLA, M, pp. 409-410.

([19]) Cfr. M. VILLA, *Sulle varietà situate sui coni proiettanti la* $V_r^{2^r}$ *che rappresenta la totalità delle quadriche di* S_r. Note I e II, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (6) 28; 365-370 e 395-409 (1938_2).

una varietà del tipo $\Phi_5^{2,3}$, oppure una varietà di S_8. Infatti, la V_5 è suscettibile della rappresentazione parametrica seguente

$$x = A(\tau_1, \tau_2) + \tau_3 B(\tau_1, \tau_2) + \tau_4 C(\tau_1, \tau_2) + \tau_5 D(\tau_5, \tau_2),$$

essendo i punti A, B, C, D, A_i, B_i, C_i, D_i, legati da 5 relazioni lineari (per l'esistenza dell'S_6 tangente fisso) [20].

Affinchè V_5 possieda ∞^{11} E_2 di $\gamma_{1,3}$ deve annullarsi la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} S_6 \\ \sum_1^2 (A_{1i} + \tau_3 B_{1i} + \tau_4 C_{1i} + \tau_5 D_{1i}) d\tau_i \\ \sum_1^2 (A_{2i} + \tau_3 B_{2i} + \tau_4 C_{2i} + \tau_5 D_{2i}) d\tau_i \\ \sum_1^2 x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l + 3 \sum_1^2{}_{ij} (B_{ij} d\tau_3 + C_{ij} d\tau_4 + D_{ij} d\tau_5) d\tau_i d\tau_j \end{matrix} \right\|$$

identicamente rispetto a τ_i, $d\tau_i$: S_6 sta ad indicare l'insieme delle orizzontali costituite dalle coordinate omogenee di sette punti indipendenti, scelti fra $A, \dots, D_i$. Annullando il coefficiente di $d\tau_3$ si ottiene

$$\left\| \begin{matrix} S_6 \\ \sum_1^2 (A_{1i} + \tau_3 B_{1i} + \tau_4 C_{1i} + \tau_5 D_{1i}) d\tau_i \\ \sum_1^2 (A_{2i} + \tau_3 B_{2i} + \tau_4 C_{2i} + \tau_5 D_{2i}) d\tau_i \\ \sum_1^2 B_{ij} d\tau_i d\tau_j \end{matrix} \right\| = 0. \tag{2}$$

Se esiste una relazione lineare fra S_6 e i punti A_{ij}, indichiamo con S_8 lo spazio di questi punti; dalla (2) si trae allora che i punti B, B_i, B_{ij} — e analogamente C, D, C_i, D_i, C_{ij}, D_{ij} — stanno in S_8. L'S (2)-osculatore alla nostra V_5 è perciò l'S_8, e V_5, soddisfa-

[20] Con A_i s'indica la $\dfrac{\partial A}{\partial \tau_i}$. Una combinazione lineare dei punti X, $Y, \dots Z$ s'indica così:

$$(X\ Y\ \dots\ Z).$$

cendo a 12 equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti, è una V_5 di S_8 (i cui spazî tangenti riempiono S_8).

Supponiamo ora che non esista alcuna relazione lineare fra S_6 ed A_{ji}. Uguagliando a zero, nella (2), i coefficienti di $d\tau_1^4$ e di $\tau_3 d\tau_1^4$ e di $d\tau_1^3 d\tau_2$ si ottiene

$$(S_6 A_{11} A_{12} B_{11}) = 0 \qquad (S_6 A_{11} B_{12} B_{11}) = 0$$

$$(S_6 A_{11} A_{22} B_{11}) + 2(S_6 A_{11} A_{12} B_{12}) = 0.$$

Se nella seconda manca B_{12}, si ha senz'altro

$$B_{11} = (S_6 A_{11})$$

e dalla terza si trae

$$B_{12} = (S_6 A_{11} A_{12}).$$

Se invece nella seconda B_{12} compare effettivamente, si ha

$$B_{11} = (S_6 A_{11} A_{12}) \qquad B_{12} = (S_6 A_{11} A_{12})$$

e dalla terza

$$B_{11} = (S_5 A_{11} A_{22}).$$

Confrontando le due espressioni di B_{11}, si ha che questo non deve dipendere che da A_{11} ed S_6; e analogamente

$$B_{12} = (S_6 A_{12}), \quad B_{22} = (S_6 A_{22}),$$

od anche, indicando con α, a$'$, α'' tre funzioni opportune:

$$B_{11} = S_6 + \alpha A_{11}, \quad B_{12} = S_6 + \alpha' A_{12}, \quad B_{22} = S_6 + \alpha'' A_{22}.$$

Annullando i coefficienti di $d\tau_1^2 d\tau_2^2$ e di $\tau_3 d\tau_1^2 d\tau_2^2$ nella (2), si ha

$$\alpha - 2\alpha' + \alpha'' = 0 \quad 2\alpha\alpha'' - \alpha\alpha' - \alpha'\alpha'' = 0,$$

da cui

$$\alpha = \alpha' = \alpha''$$

Analogamente si può ragionare sui punti C e D. Si ottengono così tre punti: $B - \alpha A$, $C - \beta A$, $D - \gamma A$, che, insieme ad A, formano una quaterna di punti indipendenti (tali essendo A, B, C, D), e e che si possano assumere come punti B, C, D. D'altra parte i loro derivati primi e secondi stanno in S_6, e quindi

$$B_{ik} = (S_6)$$

e analoghe. Dalla precedente relazione si trae poi

$$(3) \qquad B_{ikj} = (S_6 A_{1j} A_{2j}), \ B_{jki} = (S_6 A_{1i} A_{2i})$$

e, per confronto, si deduce che B_{ik} non dipende nè da A_1 nè da A_2. Allora non esistono relazioni lineari fra B_i ed A; nè se ne possono avere fra B_i ed A_1, A_2, altrimenti, per derivazione, si otterrebbe una relazione lineare fra S_6 ed A_{ik}. Infine B_{ik} non dipende da A, altrimenti, dalle (3), si otterrebbero relazioni lineari fra B_i ed A_1, A_2: analogamente per C, D.

I punti B, C, D ed i loro derivati primi e secondi stanno quindi in un S_3 fisso: infatti, in virtù delle 5 relazioni lineari che assicurano l'esistenza di un S_6 tangente fisso lungo ogni S_3, ve ne sono, fra di essi, solo quattro indipendenti. La V_5 è perciò formata da ∞^2 S_3, che giacciono negli S_4 che dall'S_3 precedente proiettano la superficie A: si trova così un caso particolare delle varietà studiate all'inizio del presente numero: la V_5 è luogo di $\infty^2 S_3$ situati negli S_4 d'un S_3-cono proiettante una superficie di VERONESE.

Si noti che anche le curve $\gamma_{1,3}$ di una V_5 di S_8 dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile ([21]): si può quindi concludere che le curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ di una V_5 che possiede $\infty^{11} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ dipendono sempre da due funzioni arbitrarie d'una variabile ([22]).

([21]) Cfr. M. VILLA, M, p. 414.

([22]) Si veda, per questo problema, M. VILLA, *Nuove ricerche sulla teoria delle curve quasi-asintotiche*, « Ann. di Mat. » (4) 18, p. 21 (1939).