Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giorgio Kurepa

Alcuni aspetti internazionali della riforma dell'insegnamento matematico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 226–236.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_226_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Alcuni aspetti internazionali della riforma dell'insegnamento matematico (*)

Nota di GIORGIO KUREPA

1. L'interpenetrazione e l'interdipendenza...

Se si volesse riassumere in che cosa consista uno degli aspetti fondamentali della riforma dell'insegnamento matematico si potrebbe parlare della coesistenza attiva e della mutua interpenetrazione di campi svariati e di metodi matematici come pure di altri campi scientifici, tecnici, culturali ecc... Successivamente le nozioni di funzione, di insieme e di struttura sono un legame e leitmotiv generali per l'insegnamento matematico.

2. Avere un'idea più armoniosa possibile delle matematiche...

Uno degli aspetti fondamentali della riforma dell'insegnamento è quello di fornire un'immagine più armoniosa possibile di *cooperazione fra campi, metodi e la vita.* Non ci si perde in definizioni ristrette e asciutte ma si opera e si lavora. Si opera con numeri, si disegna, si trasforma, si conclude ecc. ecc.. Non vi è solo un metodo che escluda tutti gli altri; ma invece vi sono diversi metodi che si completano, si accavallano, uno di essi essendo più adatto in un campo e l'altro in un altro campo.

(*) Conferenza tenuta il 1° marzo 1959, presso l'Istituto di Geometria "L. Cremona" dell'Università di Bologna, ai Soci della Sezione Emiliana di "Mathesis" e agli iscritti al Corso di perfezionamento in "Matematiche elementari dal punto di vista superiore".

3. Una volta e oggidì...

Fino all'ultimo quarto del secolo scorso la maggior parte dell'insegnamento matematico era costituita da calcoli e dimostrazioni. La matematica dei numeri era separata dalla geometria da una muraglia cinese. Le considerazioni di trasformazione (funzione), di movimento, di simmetria venivano appena accennate. Attualmente la situazione è molto diversa: *i quattro elementi fondamentali della matematica: numero, figura, movimento, (funzione e struttura logica si presentano insieme,* avendo in qualche caso maggior rilievo gli uni, e in altri casi gli altri.

4. Oggetto della riforma. Necessità della riforma.

La matematica è un argomento che fa uso di tutti gli organi: mani, occhi, lingua, cervello,... e secondo l'età degli allievi, si darà maggior rilievo a certi organi, argomenti, indirizzi, metodi.... La riforma viene fatta in relazione ai due punti seguenti:

I Scelta della materia da insegnare e dei metodi di insegnamento;

II Relazioni mutue nel triangolo: discente - insegnante - mezzi.

Bisogna ben tener presente che l'insegnamento delle matematiche si sviluppa e cambia senza sosta. Società, scienza, tecnica, produzione... si sviluppano e cambiano molto in fretta specialmente da quando queste attività sono accessibili a vasti strati della popolazione. L'insegnamento cambia anch'esso per quanto con ritmo meno veloce. In ogni caso gli sviluppi della scienza, tecnica, arti, produzione e dell'insegnamento sono diventati oggetto di preoccupazione per l'intera umanità e sono oggetto di scambi mutui di risultati acquisiti e di conversazioni ecc.

Diciamo ancora una volta che la problematica dell'insegnamento in generale e quella della matematica in particolare dipende da altri fattori come produzione, scienza, arti, agglomerato politico, condizioni sociali ecc.

5. Punto di vista funzionale.

Ciò che caratterizza in modo intrinseco le nuove tendenze nell'insegnamento è l'universalità del punto di vista funzionale. Veramente il principio funzionale è stato sottolineato anche prima soprattutto da F. Klein, E. Borel, ecc.. Ora attualmente non ci si restringe affatto a tale o tal'altro caso o dominio o specie di funzione. *Attualmente si è coscienti della variabilità, della trasformabilità universale delle cose, fenomeni, azioni, ecc.*. E il riflesso in matematica di ciò è la nozione generale di trasformazione e di strutture.

In particolare è essenziale che il discente non sia costretto a considerare che le funzioni ad argomenti reali; bisogna che l'idea di trasformazione, di interdipendenza e di associazione lo impregni e che le concepisca in quella generalità in cui le incontra ovunque nell'ambiente sociale e nella vita corrente. In particolare, senza servirsi della nozione d'insieme è impossibile concepire correttamente le nozioni di funzione, di interdipendenza e di struttura. E tuttavia si tratta di nozioni veramente fondamentali.

6. Che cosa è una funzione?

Quando si parla di una funzione bisogna conoscere *il relativo dominio* D; *allora ad ogni elemento* x *di* D *si associa uno o più elementi di un altro dominio* D'. Se il procedimento di associazione viene indicato con f, si indicherà con fx oppure $f(x)$ *l'elemento o ciscuno degli elementi* che si associa ad x. Si indica con $\{fx\}$ *l'insieme* di tutti gli fx che si associano ad x essendo x dato. L'unione degli $\{fx\}$, quando x descrive D, si chiama il *controdominio* o *antidominio* di f e può essere indicato con ^{-}Df. Accade anche che si associ ad ogni x un certo *insieme* gx al quale appartiene il valore (unico o no) fx della funzione f senza che si sappia a quale elemento fx di gx si abbia a riferirsi con precisione. E del resto è proprio questa *nozione stocastica di funzione* che è di grande importanza perchè si ha a che fare con funzioni o processi dello stesso tipo in circostanze svariatissime della natura e della società. All'infuori delle funzioni solite ecco alcuni esempi di funzioni geometriche, logiche, ecc..

6.1. Esempio. Dati due punti A, B si considera la funzione k del punto T che indica la grandezza in radianti dell'angolo (orientato) ATB. Quali sono le soluzioni dell'equazione $kT = \pi/2$, della equazione $kT = 0$ oppure $kT = \pi$ ecc..? Mettendo in evidenza i «parametri» A, B si può indicare la stessa funzione con $k(T; A; B)$. Allora il fatto che la somma degli angoli di un triangolo qualunque è costante e uguale a π è molto più impressionante di quanto si impari lo stesso fatto in modo isolato.

6.2. Esempio. Due esempi fondamentali di trasformazioni sono quelli di *retta numerica* e di *cerchio numerico*. Per mezzo della retta numerica si associano in modo biunivoco e congruente i numeri reali e i punti di una retta; nel caso del cerchio numerico (trigonometrico) questa corrispondenza non è più biunivoca perchè ogni punto del cerchio è ricoperto da un'infinità di numeri reali la cui differenza è un multiplo di 2π.

6 3. Occorre vedere che l'addizione $x + y$ è una trasformazione del piano coordinato in retta numerica che fa corrispondere al punto (x, y) del piano il punto $x + y$ della retta.

Senza saperlo si fanno trasformazioni di spazi a più dimensioni in rette numeriche.

6.4. *Proposizioni come variabili.* Si ha da fare costantemente con giudizi (proposizioni) per combinarli per esempio a) «*piove*» b) «*andiamo a spasso*». Se ne ricavano proposizioni come: *a*) e *b*) oppure, *se a*) *non b*) (vale a dire «se piove non andiamo a spasso» ecc. oppure anche come segue: se x è un intero, allora $2x + 1$ è dispari. Indicando con $x \rightarrow y$ la proposizione (funzione): *se x allora y* (x, y essendo proposizioni), si ha costantemente in matematica da occuparsi della funzione $x \rightarrow y$. Solo che le variabili x, y e il risultato $x \rightarrow y$ non sono più numeri oppure punti geometrici ma sono *proposizioni.* Ma anche in questo caso si ha una «*funzione*» cioè *l'implicazione* $\rightarrow$ mediante la quale all'elemento (x, y) si associa l'elemento $x \rightarrow y$ e vi è sempre luogo a domandarsi se sussiste anche la reciproca anche di $x \rightarrow y$ vale a dire se da $x \rightarrow y$ si può « dedurre » $y \rightarrow x$.

Se la *negazione* di una proposizione x viene indicata con $-x$, si associano al giudizio $x \rightarrow y$ i giudizi $y \rightarrow x, -x \rightarrow -y$ e $-y \rightarrow -x$; ognuno di essi può essere vero o falso.

6.5. **Funzione e antifunzione.** Un esempio estremamente importante di funzione è *la funzione* o *processo che fa corrispondere ad ogni funzione la sua antifunzione* $-$f *o* $\bar{\text{f}}$ *oppure* f^{-1} *che si dice anche inversa di* f. Per definizione, per ogni $a \in {}^{-}Df$ si indica con ${}^{-}fa$ l'elemento o ogni elemento $x \in D$ che verifica $fx = a$. In particolare si dovrebbe introdurre *l'antiquadrato* $a^{1/2}$, *l'anticubo* $a^{1/3}$ ecc. direttamente senza aver perso prima delle ore a lavorare con delle radici.

6.6. Non si può sottovalutare il valore assai istruttivo del parlare del piano di un triangolo dato, di un cerchio dato ecc. invece che riferirsi sempre inversamente a: un triangolo di un piano dato ecc..

È deprecabile l'uso di definire il segmento AB servendosi dell'intera retta AB (per lo meno nell'ordine inferiore dell'insegnamento); bisogna procedere inversamente e *definire la retta* AB *come unione di tutti i segmenti che prolungano il segmento* AB *determinato dai punti* A, B [1].

7. **Relazioni.**

La nozione di relazione è intimamente collegata a quella di funzione: le due nozioni si completano. Si parla ad esempio della relazione $2+3=5$ oppure $s(2,3,5)$: la somma di 2 e 3 è 5. Si parla della relazione falsa $2+3=7$, ed è assai interessante di dedurne relazioni esatte col cambiamento di uno solo dei cinque simboli 2, +, 3, =, 7 che figurano nella relazione data: sono le seguenti:

$$4+3=7, \quad 2+3<7 \quad (\text{o } 2+3\neq 7), \quad 2\,f 3=7 \quad \text{o} \quad f(2,3)=7$$

$$2+5=7$$

$$2+3=5.$$

Ci si accorge dunque che parlando di una relazione si può considerarla anche per elementi *concreti e particolari* e non solo per *tutti gli elementi di un insieme* più o meno ampio (come invece accade di solito con le funzioni).

Un caso assai importante di *relazione* è quello in cui si *associa ad ogni elemento* x *di una classe* D *un certo insieme* A(x); per esempio; se $A(x)$ indica l'insieme $x^{1/2}$, si ha proprio una relazione; essa è collegata alla *funzione* $y=x^{1/2}$; *hanno la stessa immagine*: una parabola. Più generalmente *se* A *è un insieme qualsiasi del piano coordinato,* A *è una rappresentazione di una certa funzione ben determinata* $x \rightarrow fx$ *e di una certa relazione ben determinata* $x \rightarrow \{fx\}$.

In modo analogo, ogni insieme A dello spazio coordinato R^{I_3} a tre dimensioni è una immagine o rappresentazione di una funzione $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ e della corrispondente relazione $(x, y) \rightarrow \{f(x, y)\}$. Il dominio Df di tale funzione è la proiezione ortogonale di A sul piano x, y. Se A è un insieme finito qualsiasi del piano x, y allora A è l'immagine di una «*funzione*» e di *una relazione binaria;* ben inteso quella funzione non è uniforme (in generale). Questo tipo di funzione era completamente escluso non solo dall'in-

(1) La nozione di *insieme convesso* deve ricevere molto rilievo; così ad esempio *il triangolo* ABC associato ai punti dati A, B, C è l'insieme convesso *minimale* contenente i tre punti dati.

segnamento ma anche dalla matematica. E tuttavia si incontrano siffatti sistemi ovunque in *pratica* quando si abbia da fare delle *misure*, o dei *conti* (in statistica particolarmente). È vero che ad un tale insieme A si associavano una certa curva e funzione $y = fx$ detta *curva o funzione di regresso* che viene determinata col metodo dei minimi quadrati. Ma è utile considerare anche *l'insieme A* stesso come rappresentante di una certa funzione e di una certa relazione. Così si salva il punto di vista funzionale, perchè se lo si restringe non considerando che delle funzioni uniformi, ci si pongono limiti inutili e si compromette il principio funzionale stesso. Il principio funzionale classico è troppo discosto dalla pratica e dalle applicazioni! Ed è proprio per questo che occorre generalizzare la nozione di funzione per salvaguardare il principio funzionale adattandolo alla vita reale ed a ciò che accade in Natura.

8. Sull'età dei discenti.

Quando si parla della riforma dell'insegnamento bisogna anche tener conto dell'età dei discenti. In particolare è molto importante ciò che viene impartito al bambino nell'età dai 5 agli 8 anni. Le impressioni di tale epoca si conservano ulteriormente. Il bambino reagisce ad un metodo in una data età, più che ad un altro metodo. Importa sapere che, secondo Piaget, i ragazzi di età fino ad 11 anni reagiscono completamente alle questioni qualitative che riguardano l'ordine, il rango, ecc. (sopra-sotto, avanti-indietro, superiore-inferiore, presto-tardi, massimo, al più presto, ecc.).

9. Accentuare anche l'aspetto geometrico.

Una delle caratteristiche dell'insegnamento moderno consiste nel far valere il lato geometrico nella fase iniziale e prescolastica dell'insegnamento matematico; il lato intuitivo, qualitativo e geometrico deve precedere il lato numerico e quantitativo. La vita quotidiana è assai ricca di situazioni svariate e piene di tratti matematici. Il lato fenomenologico, euristico, topologico di quelle situazioni è percettibile in modo agevole e interessante insieme; così ad esempio la proprietà interno-esterno, diritto-ricurvo, rotondo-non rotondo, continuo-discontinuo, ecc.

10. L'insegnamento deve essere interessante.

Nell'insegnare si deve tener conto dell'*assioma che ogni fenomeno matematico si può realizzare non solo in modo comprensibile* *ma anche interessante.* Agli esseri umani piacciono assai gli indovinelli, questioni, problemi, giochi,... Per tale motivo l'oggetto deve essere presentato in modo attraente.

11. Insiemi e situazioni conducenti a fenomeni e strutture matematiche.

Nella vita quotidiana, come pure in qualsiasi attività, ci si trova legati ad insiemi e fenomeni svariati riguardanti insiemi e loro parti. *È di importanza capitale di scorgere il lato matematico anche in siffatte situazioni.* I collegamenti fra un insieme e le sue parti — in particolare coi suoi elementi — danno luogo *alla nozione di organizzazione o di struttura di un insieme.* La struttura più semplice è quella in cui si possono *distinguere degli elementi:* si parla di elementi x, y... della struttura in questione S e si può decidere se $x = y$ o se $x \neq y$ (2). Una struttura più elevata è quella dell'*ordine* o della *gerarchia*, quella di *equivalenza* o di *partizione*, in generale di *relazione*. Un'altra *specie di struttura consiste di calcoli*: ad una data copia ordinata (x, y) di elementi di S si associa un elemento di S, indicato con $f(x, y)$ oppure $x + y$, $x - y$, xy, $x : y$, x^y ecc. Si parli della *struttura gruppoide* (S; f), (S; +) ecc. Si parli di semi-gruppo se quell'operazione è inoltre *associativa* $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ o in un modo più usuale se $(x + y) + z = x + (y + z)$. Imponendo altre condizioni all'operazione in questione si ottengono altre «*strutture algebriche*». Si incontrano e si studiano degli insiemi dotati di due o più operazioni legate fra loro in questo o quel modo. Per esempio: negli *anelli e corpi* si hanno due operazioni.

Geometricamente, parlando di una *operazione binaria* + in un insieme E si ha a che fare con la *trasformazione* $(x, y) \to +(x, y)$ oppure $(x, y) \to x + y$ del *quadrato* E^{I_2} *in* E. In pari tempo si ha la trasformazione $(x, y, z) \to (x + y) + z$ del cubo E^{I_3} in E ecc. (3).

Un terzo tipo di struttura matematica si ottiene partendo da un insieme E e da relazioni mutue fra le sue parti finite e non finite, senza discriminazioni. Si parla di *strutture topologiche in* E differenziandole dalle *strutture algebriche* che sono state prima considerate. L'esempio tipico di una siffatta struttura si ottiene considerando ad esempio lo spazio R^{I_3} a tre dimensioni e la tras-

(2) In biologia, in particolare, vi sono strutture non granulose-gelatinose. Il loro studio si impone anche dal punto di vista matematico.

(3) Per un ordinale n, si indica con I_n l'insieme degli ordinali 0, 1,... inferiori ad n. E^{I_n} è l'insieme delle trasformazioni uniformi di I_n in E.

formazione $X \to \bar{X}$ che fa corrispondere *ad ogni sotto-insieme* X *di* R^{I_3} l'insieme $\bar{X}$ dei punti dello spazio ciascuno dei quali è «*infinitamente vicino*» all'insieme X (non essendovi necessariamente incluso il caso dell'appartenenza ad X).

Il numero delle strutture matematiche cresce incessantemente, così pure quello dei fenomeni svariati della Natura e della Vita ed anche delle interconnessioni interstrutturali che danno luogo a nuove strutture.

12. Alcuni esempi di interpretazione.

12.1. *Il caso: Algebra-Geometria.* Si tratta di due campi fondamentali della matematica. Una volta quei due campi erano separati nel tempo, nello spazio e concettualmente. Mentre la geomeria è nata e si è sviluppata sopratutto in Egitto e in Grecia, l'aritmetica (algebra) è nata e si è sviluppata sopratutto in Babilonia e in India. È stato Cartesio che le ha ravvicinate inventando le coordinate: legame fra i numeri e i punti di una retta, gruppi di numeri e punti di spazi, ecc.

Anche nell'insegnamento i due campi erano separati. C'erano paesi in cui per anni s'insegnava una delle discipline senza mai parlare dell'altra e ciò non soltanto nel ciclo iniziale dell'insegnamento ma per tutta la durata dell'insegnamento secondario. I due campi venivano insegnati da persone diverse senza alcun legame o consultazione reciproca e senza alcuna preoccupazione di ciò che si faceva nell'altro campo. In particolare in algebra o aritmetica non si faceva alcun disegno o figura.

Attualmente questo ritmo di un anno di scambio: Aritmetica (Algebra) — Geometria è ridotto a un'ora — di solito si insegnano alternativamente la geometria e l'algebra.

Una delle tendenze moderne è quella di ridurre anche di più questo ritmo e di insegnare i due argomenti come una cosa unica. Dal punto di vista strutturale, nei due campi si trattano le stesse cose, con rappresentazioni distinte. Tuttavia si è ancora piuttosto lontani dalla funzione strutturale in vista; ma accentuando le nozioni come: *retta numerica* (asse dei numeri), *piano numerico* (piano dei numeri complessi), *trasformazione* (*funzione*) ecc., si prepara il terreno per il ravvicinamento e l'unificazione strutturale. Diciamo ancora che praticamente fino al secolo scorso non esisteva nell'insegnamento la parola funzione.

12.2. In modo analogo si può parlare dell'*interpenetrazione di due o più scienze*, per esempio matematica-fisica, matematica-biologia (la teoria delle relazioni!), matematica-linguistica ecc.

12.3. L'interpenetrazione dei metodi.

Vi sono diversi metodi: *analitico*, *logico*, *intuitivo*, *geometrico*, *locale*, *globale*, *statistico*, *ecc.;* essi si interpenetrano.

1 *Il lato geometrico.* Uno dei suoi aspetti consiste nel fare dei disegni (schematici e non); ciò solleva enormemente il pensiero. In particolare, occorre *fabbricare funzioni disegnando schematicamente* in un piano coordinato, indipendentemente dalla rappresentazione analitica delle funzioni; servendosi del linguaggio corrente (riguardante la variazione delle temperatnre, dei livelli d'acqua ecc.) si riuscirà certamente a far aquisire agli allievi la nozione di funzione.

2. *Il lato numerico* è convenientemente rappresentato dalla richiesta che il calcolo sia portato avanti fino a dare risultati numerici con un numero ragionevole di cifre decimali. È importante non fermarsi ad espressioni non calcolate come $(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{2}+1)$ ecc. Nelle applicazioni si ha sempre a che fare con numeri nelle loro forme *normate* (scritti in un sistema posizionale di base 10, e ultimamente anche di base 2 per certe calcolatrici elettroniche). Far capire al discente il valore delle *tavole numeriche* e fargli sapere che un grafico sostituisce le tavole e che i grafici possono essere disegnati automaticamente da apparecchi e macchine.

3. *Il lato logico* nell'insegnamento sarà debitamente rappresentato nel coltivare il modo di esprimersi al condizionale: *se..., allora...* Si mette in evidenza il punto di partenza — *le premesse* — e il punto di arrivo: *la conclusione.* Uno degli aspetti di tali ragionamenti è la nozione di funzione f: ci si da x e si determina fx.

4. *Il lato gruppoide* della questione: ci si chiede se il risultato dell'operazione appartiene al campo da cui sono presi i dati o componenti dell'operazione. Per esempio se il quoziente di due frazioni o di due numeri interi è ancora tale ecc.

5. **Il lato (metodo) infinitesimale.** Per una funzione è essenziale sapere *come varia al variare del suo* (*suoi*) *argomento* (*i*) e in particolare vedere la *rapidità della sua variabilità. L'integrazione o l'accumulo dei valori* di una funzione è un altro elemento corrente delle funzioni; *il ravvicinamento infinitesimale mutuo* di qnantità — limite — è un fenomeno corrente e di immensa applicabilità. *Tutto ciò richiede che nell'insegnamento secondario si tocchi il metodo infinitesimale presentando agli allievi gli elementi delle derivate e delle antiderivate, dell'integrale definito e del differenziale — in modo euristico e intuitivo.*

6. Metodo statistico.

Relazioni fra *individuale e collettivo* sono fenomeni quotidiani. In statistica e in calcolo delle probabilità si studiano questi rapporti in un certo modo che si può applicare in campi svariatissimi di fenomeni (naturali, sociali, umani, economici, ecc.). In particolare un certo numero di informazioni relative ad un fenomeno basta per afferrare in una certa misura quel fenomeno e studiarlo; analogamente, le proprietà di un individuo sono regolate, in media, dalle proprietà di un collettivo C scelto a caso nella massa a cui appartiene l'individuo: *statisticamente, il comportamento dell'individuo* (non determinabile in pratica per ogni individuo) *è sostituito dal comportamento determinabile di un «campione» estratto dalla «popolazione» alla quale appartiene l'individuo.* È questo il senso in cui si applica, in casi innumerevoli, la statistica alle scienze, produzioni, arti, tecnica, ecc. *Ed è perciò che gli elementi della statistica (valor medio, distribuzione, probabilità, calcolo combinatorio) devono figurare nell'insegnamento secondario.*

13. Quantori (o quantificatori) logici.

È proprio in questo secolo che si è *resa cosciente l'importanza immensa delle nozioni: chiunque o ciascuno, almeno uno, nessuno, ecc.* Si tratta di *quantori logici: il quantore lungo (universale): ognuno o tutti*, simbolicamente $\forall$ e il *quantore piccolo (esistenziale): almeno uno, un certo*, simbolicamente. La nozione di funzione gli è intimamente collegata. Per esempio, la funzione $x \rightarrow 3x$ oppure $y = 3x$ significa che *ad ogni* x del dominio D si associa *un certo* elemento indicato con $3x$.

Uno degli aspetti delle *relazioni fra quantori* è il passaggio dal *particolare al generale*, dall'esempio alla teoria e il passaggio inverso, in particolare il passaggio *dalla teoria alle applicazioni.* Per esempio, l'espressione *particolare* $(2 + 3 + 2 \cdot 3)$ dà luogo alla espressione *letterale* ed alla *funzione* $x + (y + xy)$. Si può dire anche che si attribuisce ad elementi «fissi» come 2,3 la proprietà di poter *variare.* Ecco un altro esempio del genere. Enumerare per l'insieme D degli interi delle proprietà evidenti dell'addizione (che, $x, y \in D$, implica $x + y \in D$, l'associatività, l'esistenza e la proprietà di 0 in D, la «simmetria» $x \in D \rightarrow -x \in D$). *Attribuire poi a* D *di indicare qualsiasi insieme e al* + *di indicare una trasformazione qualsiasi di* D^{I_2} *in* D, *conduce alla nozione di gruppo nella sua generalità maggiore.*

Il ruolo dei quantori è veramente immenso.

14. Insiemi e quantificazione.

Dal punto di vista pratico diciamo che l'uso degli insiemi è molto appropriato per far acquisire e sviluppare l'uso costante dei quantori. Infatti, di solito gli insiemi si presentano sotto forma di quantificazione: come l'insieme di *tutti gli elementi* che hanno questa o quella proprietà. Per esempio, un cerchio è *ogni* insieme piano formato da tutti i punti equidistanti da un punto fisso.

15. Vettori.

L'orientazione dei processi è un fenomeno corrente come pure lo è la nozione di ordine e di gerarchia. Pertanto occorre sviluppare anche questo aspetto che si riflette nei vettori. Occorre sapere che *le considerazioni vettoriali non sono più difficili da capire delle considerazioni scalari, che esse presentano in modo più diretto e più naturale e sono di portata sempre maggiore.* In particolare la geometria diventa più semplice e più comprensibile trattandola vettorialmente. Ben inteso non si tratta di fare delle dimostrazioni rigorose di tutte le formule da applicare; *ci si sofferma sul lato positivo del formalismo matematico.* Per esempio per ogni terna di punti A, B, C si ha evidentemente $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ e pertanto $AB^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ (*teorema del coseno*) in particolare se $\widehat{C} = 90^0$, se ne ricava il teorema di *Pitagora.* Introducendo i vettori si guadagna tempo e..... si salva in modo positivo una parte della geometria sintetica.

16. Rapporti: Discente-insegnante-mezzi.

Il numero dei discenti è molto grande. Manca lo spazio. I rapporti diretti e quasi individuali fra i discenti e gli insegnanti non sono più possibili. La differenza fra le due categorie diventa sempre più piccola. Il discente diventa insegnante di se stesso e degli altri. I mezzi tecnici (libri, films, vita sociale, ecc.) contribuiscono molto a ciò.

Ed è essenziale di sviluppare negli allievi la facoltà di saper lavorare con le proprie forze e di sapersi servire dei mezzi che la civiltà procura loro.

17. Abbiamo enumerato in quanto precede alcuni aspetti che si presentano attualmente in relazione con la riforma dell'insegnamento. Alcuni aspetti sono stati considerati e messi in pratica in alcuni paesi. In particolare, in Jugoslavia sono stati fatti sforzi considerevoli in tal senso. I risultati che abbiamo conseguito finora sono assai soddisfacenti.