Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Sui sistemi piani (G) proiettivamente deformabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 376–385.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_376_0>

Sui sistemi piani (G) proiettivamente deformabili.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

Sunto. - *Si determinano tutti i sistemi* (G) *di linee, in un piano, che sono allo stesso tempo proiettivamente deformabili e sezionali (oppure di curvatura).*

Summary. - *All* (G)*-systems, in a plane, which are at the same time projectively deformable and sectional (or constituted by curvature trajectories) are determined.*

1. Si chiama sistema (G) di linee, in un piano [1], un sistema ∞^3 di linee integrali di un'equazione « di tipo G », vale a dire del tipo

$$(G) \qquad y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2,$$

essendo le x, y coordinate proiettive non omogenee di punto, o in particolare cartesiane [2]. Anzi, sia per semplicità di nomenclatura, sia in relazione con casi particolari di cui si dirà tra poco, preferiamo supporle cartesiane, e addirittura ortogonali.

Tra i casi particolari di sistemi (G) considerati già da KASNER, menzioniamo i seguenti:

a) sistema (G) *di tipo dinamico*, costituito dalle traiettorie generate da un campo di forze posizionali;

b) sistema (G) *di tipo sezionale*, il quale si ottiene proiettando da un punto fisso su un piano fisso le ∞^3 sezioni piane di una superficie (sia Γ) dello spazio ordinario;

c) sistema (G) *di curvatura*, ottenuto a partire da un sistema ∞^2 Θ di linee, considerando nel loro piano le linee che in ogni

(1) Questa condizione verrà costantemente sottintesa nel seguito.

(2) Cfr. A. TERRACINI, *Sobre la ecuación diferencial* $y''' = G(x, y, y)y'' + H(x, y, y')y''^2$, Rev. de matem. y fís. teór. de la Univ. Nac. de Tucumán, vol. 2, 1941 (Memoria citata nel seguito mediante la sigla (T)): E. KASNER, *The Trajectories of Dynamics*, Trans. of the Amer Math. Society, vol. 7, 1906, *Dynamical Trajectories; the motion of a particle in an arbitrary Field of forces*, ibid., vol. 8, 1908, *Differential-geometric Aspects of Dynamics*, The Princeton Colloquium 1909, New York 1913, con ristampe successive.

loro punto danno luogo ad un rapporto costante tra la loro curvatura e quella della curva del sistema Θ ad esse tangente nel punto stesso ([3]).

Su un altro caso particolare ho avuto io stesso l'occasione di richiamare l'attenzione ([4]). È il caso in cui il sistema (G) ammette una serie ampia quanto è possibile, cioè ∞^1, di *applicabilità proiettive* dirette di prima specie. Su tali particolari sistemi (G) ho avuto occasione di ritornare successivamente ([5]), lumeggiandoli da un altro punto di vista, e chiarendo anche come dal nuovo punto di vista si presenta il meccanismo della deformazione proiettiva. Chiamerò brevemente un tale sistema (G)

d) sistema (G) *proiettivamente deformabile*, o anche *sistema* (G_0).

Quando si considerano simultaneamente due tra le particolarità testè menzionate, sorge il problema di trovare tutti i sistemi (G) che le possiedono entrambe. A questo proposito sono già noti, da tempo, i seguenti risultati:

ab) *I sistemi* (G) *che sono contemporaneamente dinamici e sezionali sono, tutti e soli, quelli che – come sistemi dinamici – sono costituiti dalle traiettorie generate da un campo di forze centrali o parallele, essendo, su ogni retta passante per il centro* M, *proprio o improprio, l'intensità della forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro* (potendo il coefficiente di proporzionalità variare da una retta all'altra) *nel caso in cui* M *è proprio, o rispettivamente costante* (ma generalmente variabile da una retta all'altra) *se* M *è improprio. Questi sistemi* (G), *come sistemi sezionali, sono quelli che si ottengono proiettando le sezioni piane di un cono (o cilindro)* ([6]).

([3]) Per un sistema (G) di curvatura esiste una semplice infinità di sistemi Θ come quello considerato. Uno qualunque di essi può chiamarsi *generatore* del sistema (G).

([4]) Cfr. (T), v. il n. 25, dove, per i sistemi (G), l'applicabilità proiettiva è definita in base alla conservazione di una certa forma differenziale quadratica ivi definita.

([5]) A. Terracini, *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi* (G) *proiettivamente deformabili*, Rend. Lincei (8), vol. X, 1951, pp. 89-94, *Sistemi* (G) *proiettivamente deformabili di tipo speciale*, ibid., pp. 186-189. Indicherò queste due Note rispettivamente con (L) e con (L').

([6]) E. Kasner, *Dynamical Trajectories and the ∞^3 plane Sections of a Surface*, Proc. Nat. Acad. of Sciences, vol. 17, 1931, pp. 370-376.

ac) *I sistemi* (G) *che sono contemporaneamente dinamici e di curvatura sono, tutti e soli, quelli che, come sistemi dinamici, provengono da un campo di forze centrali o parallele* (7).

bc) *I sistemi* (G) *che sono contemporaneamente sezionali e di curvatura sono, tutti e soli, quelli che, come sistemi sezionali, provengono da un cono (o cilindro), oppure da una quadrica* (8).

Se si fa intervenire anche la particolarità d), è già noto il seguente risultato (9):

ad) *I sistemi* (G) *che sono contemporaneamente di tipo dinamico e proiettivamente deformabili sono, tutti e soli, quelli elencati sotto* ab).

Mi propongo, in questa Nota, di determinare tutti i sistemi (G) che sono contemporaneamente di tipo sezionale e proiettivamente deformabili, e anche tutti i sistemi (G) che sono contemporaneamente di curvatura e proiettivamente deformabili.

A chi paragoni gli enunciati richiamati sotto ad), ab), ac), appare senz'altro che i sistemi sezionali provenienti da coni (o cilindri) appartengono alle classi a), b), c), d) e quindi devono figurare fra i sistemi (G) proiettivamente deformabili che appartengono contemporaneamente al tipo sezionale, oppure al tipo di curvatura. Non è però detto, a priori, che essi esauriscano le soluzioni dei due nuovi problemi qua considerati, mentre invece di fatto le esauriscono. Dimostreremo dunque in questo lavoro:

bd) *I sistemi* (G) *che sono contemporaneamente di tipo sezionale e proiettivamente deformabili sono, tutti e soli, quelli descritti sotto* ab).

cd) *I sistemi* (G) *che sono contemporaneamente di curvatura e proiettivamente deformabili sono, tutti e soli, quelli descritti sotto* ab).

La genesi dei particolari sistemi (G) che figurano in questi teoremi, come sistemi sezionali, è così semplice che negli enunciati stessi ci siamo riferiti ad essa, anche se, nel caso dell'enunciato cd), il riferimento al caso sezionale introduce un elemento estraneo alla posizione del problema. È però facile eliminare tale incongruenza ricordando quanto segue.

(7) E. Kasner, *Dynamical Trajectories and curvature Trajectories*, Bull. Amer. Math. Society, vol. 40, 1934, pp. 449-455.

(8) G. Comenetz, *Curvature Trajectories*, Amer. Journ., vol. 58, 1936, pp. 225-235.

(9) A. Terracini, (T), v. il n. 27.

Richiamiamo dalla mia memoria (T) e dalle note (L), (L') che, in relazione con ogni sistema (G) proiettivamente deformabile si presenta un sistema ∞^1 Σ di linee, a partire dal quale – attraverso la scelta arbitraria di certi elementi geometrici entro certe totalità definite dallo stesso sistema Σ, come è precisato in (L), (L'), – si ottiene il sistema (G) in questione. Ho chiamato *speciale* il sistema (G) proiettivamente deformabile quando le linee di Σ sono costituite da rette, *doppiamente speciale* quando le rette stesse formano fascio. Orbene, si hanno i seguenti teoremi.

TEOREMA I. – *I sistemi (G) che sono contemporaneamente di tipo sezionale e proiettivamente deformabili sono, tutti e soli, i sistemi proiettivamente deformabili doppiamente speciali.*

TEOREMA II. – *I sistemi (G) che sono contemporaneamente di curvatura e proiettivamente deformabili sono, tutti e soli, i sistemi proiettivamente deformabili doppiamente speciali.*

Questi due Teoremi saranno dimostrati rispettivamente nei n. 3, 4. - Nei n. 6, 7 si esaminano le particolarità presentate dai sistemi (G) in questione, in quanto sistemi di curvatura.

2. Prima di procedere, richiamiamo le seguenti particolarità inerenti alla rappresentazione analitica dei sistemi (G) dei tipi particolari menzionati nel n. 1, quali risultano dai lavori dianzi citati.

a) Per un sistema (G) di tipo dinamico, se $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ sono le componenti della forza agente sul punto (x, y), i coefficienti della corrispondente equazione (G) sono dati da [10]

$$G = \frac{\alpha_2 y'^2 + (\alpha_1 - \beta_2) y' - \beta_1}{\alpha y' - \beta}, \quad H = \frac{3\alpha}{\alpha y' - \beta}. \tag{2.1}$$

b) Per un sistema (G) di tipo sezionale, ottenuto proiettando sul piano xy dal punto all'infinito dell'asse z le sezioni piane della superficie $z = f(x, y)$, si ha

$$\begin{aligned} G &= \frac{f_{111} + 3f_{112}y' + 3f_{122}y'^2 + f_{222}y'^3}{f_{11} + 2f_{12}y' + f_{22}y'^2}, \\ H &= 3\,\frac{f_{12} + f_{22}y'}{f_{11} + 2f_{12}y' + f_{22}y'^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

[10] Per una funzione α delle due variabili x, y (e analogamente per le altre funzioni di x, y che si considereranno nel seguito) poniamo

$$\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \qquad \text{etc.}$$

c) Per un sistema (G) di curvatura, ottenuto a partire da un sistema ∞^2 *generatore* $y'' = \lambda\,(x, y, y')$, posto ora

$$\lambda_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial\lambda}{\partial y}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial\lambda}{\partial y'},$$

si ha

$$G = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 y'}{\lambda}, \quad H = \frac{\lambda_3}{\lambda}. \tag{2.3}$$

d) Per un sistema (G) proiettivamente deformabile, o sistema (G_o) indicando con $S = S(x, y)$ una funzione (arbitraria, purchè non ridotta ad una costante) di x, y, si ha

$$G = \frac{3}{2}\frac{S_{11} + 2S_{12}y' + S_{22}y'^2}{S_1 + S_2 y'}, \quad H = \frac{3S_2}{S_1 + S_2 y'}. \tag{2.4}$$

Giova aggiungere che le linee del sistema $S(x, y) = \text{cost.}$ sono precisamente quelle che costituiscono il sistema semplicemente infinito Σ al quale si è accennato nel n. 1, prima degli enunciati dei Teoremi I, II; e che (cfr. p. e. (L')) la condizione affinchè il sistema proiettivamente deformabile sia speciale è

$$S_2^2 S_{11} - 2S_1 S_2 S_{12} + S_1^2 S_{22} = 0, \tag{2.5}$$

alla quale, per la doppia specialità, sono da aggiungere le

$$\begin{cases} S_1(S_2S_{111} - S_1S_{112}) - 2S_{11}(S_2S_{11} - S_1S_{12}) = 0 \\ S_2(S_2S_{122} - S_1S_{222}) - 2S_{22}(S_2S_{12} - S_1S_{22}) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

3. Passiamo alla dimostrazione del Teorema I.

Affinchè un sistema proiettivamente deformabile sia sezionale è necessario e sufficiente che esistano due funzioni $f(x, y)$, $S(x, y)$, tali che le espressioni fornite dalle (2.2), (2.4) tanto per H quanto per G risultino tra loro concordanti.

Quanto ai valori di H, si hanno subito come necessarie e sufficienti le condizioni

$$S_2 f_{11} - S_1 f_{12} = 0, \quad S_2 f_{21} - S_1 f_{22} = 0, \tag{3.1}$$

(dalle quali segue subito $f_{11}f_{22} - f^2_{12} = 0$, vale a dire che la superficie Γ è necessariamente sviluppabile). In altri termini, è necessario sufficiente che esista una funzione $\tau\,(x, y)$ tale che sia

$$f_{11} = \tau S_1^2, f_{12} = \tau S_1 S_2, f_{22} = \tau S_2^2. \tag{3.2}$$

Formando per la $f(x, y)$ le due condizioni di integrabilità delle (3.2), si hanno le due relazioni

$$S_1(\tau_1 S_2 - \tau_2 S_1) = \tau(S_1 S_{12} - S_2 S_{11}),$$
$$S_2(\tau_1 S_2 - \tau_2 S_1) = \tau(S_1 S_{22} - S_2 S_{12}),$$

dalle quali, eliminando $\tau_1 S_2 - \tau_2 S_1$, segue la (2.5). Questo ci dice intanto che il sistema (G) proiettivamente deformabile in esame è necessariamente speciale.

Quanto poi ai valori di G, eguagliando le due espressioni date dalle (2.2), (2.4), rispettivamente per $y' = 0$, $y' = \infty$, si hanno — per $S_1 S_2 \neq 0$ — le

$$\frac{f_{111}}{f_{11}} = \frac{3}{2}\frac{S_{11}}{S_1}, \quad \frac{f_{222}}{f_{22}} = \frac{3}{2}\frac{S_{22}}{S_2}$$

che, tenuto conto delle (3.2), dànno

$$\tau_1 = -\frac{S_{11}}{2S_1}\tau, \quad \tau_2 = -\frac{S_{22}}{2S_2}\tau$$

dalle quali segue la

$$\frac{S_{112}}{S_1} - \frac{S_{122}}{S_2} = S_{12}\left(\frac{S_{11}}{S_1^{\,2}} - \frac{S_{22}}{S_2^{\,2}}\right). \tag{3.3}$$

Finalmente, eliminando S_{122} tra l'ultima relazione scritta e quella ottenuta derivando la (2.5) rispetto ad x, si ricava (tenendo conto, nelle riduzioni, della stessa (2.5)) che è soddisfatta la prima delle (2.6). In modo del tutto analogo, salvo lo scambio tra le variabili x, y, si ricava anche la seconda.

È così provato che un sistema (G) proiettivamente deformabile e sezionale è necessariamente doppiamente speciale. La deduzione che precede è legata all'ipotesi $S_1 S_2 \neq 0$, ma nel caso escluso le (2.6) sono ovviamente soddisfatte.

Viceversa, un sistema (G) proiettivamente deformabile doppiamente speciale è sempre un sistema sezionale (proveniente dalle sezioni piane di una superfice conica o cilindrica). Ciò è già asserito p. e. nella nota finale a piè di pagina della Nota (L'); ma lo si verifica anche subito col calcolo diretto come segue. Trattandosi di questioni di natura proiettiva, supponiamo senz'altro che le rette con le quali si compongono le linee $S(x, y) = \text{cost.}$ siano parallele, e assumiamo come asse y una retta ancora parallela ad esse, cosicchè S è funzione della sola x. Basta allora assumere per f una funzione della sola x tale che sia

$$\frac{f_{111}}{f_{11}} = \frac{3}{2}\frac{S_{11}}{S_1}$$

per rendere manifesto che il sistema (G) considerato è anche sezionale, la superficie Γ essendo attualmente un cilindro con le generatrici parallele all'asse y.

Il Teorema I è così dimostrato.

4. Passando ora alla dimostrazione del teorema II, consideriamo un sistema (G) proiettivamente deformabile, che sia contemporaneamente un sistema (G) di curvatura. Si tratta di determinare le due funzioni $S(x, y)$ $\lambda(x, y, y')$ in modo da assicurare la concordanza fra le espressioni di H, G offerte dalle (2.3), (2.4).

Incominciando anche ora con H, si ha come condizione, necessaria e sufficiente, che esista una funzione $\varphi(x, y)$ tale che sia

$$\lambda(x, y, y') = (S_1 + S_2 y')^3 \varphi(x, y) \tag{4.1}$$

Quanto alla coincidenza dei valori di G, essa si traduce nelle tre condizioni

$$\left\{\begin{array}{l} 2\varphi_1 S_1 + 3\varphi S_{11} = 0 \\ \varphi_2 S_1 + \varphi_1 S_2 + 3\varphi S_{12} = 0 \\ 2\varphi_2 S_2 + 3\varphi S_{22} = 0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

eliminando tra le quali φ_1, φ_2, φ, si ha intanto la (2.5), secondo la quale il sistema (G) è speciale. Dobbiamo dimostrare che lo è doppiamente, vale a dire che sono soddisfatte anche le (2.6). Anche ora, ciò è ovvio se $S_1 S_2 = 0$; quindi ci possiamo limitare a supporre $S_1 S_2 \neq 0$. Allora la prima e la terza (4.2) forniscono

$$\varphi_1 = -\frac{3}{2}\frac{S_{11}}{S_1}\varphi, \quad \varphi_2 = -\frac{3}{2}\frac{S_{22}}{S_2}\varphi, \tag{4.3}$$

dalle quali, come condizione di integrabilità, si ricava ancora la (3.3). A partire da questo punto, si prosegue come nel n. precedente. È così provato che se un sistema (G) proiettivamente deformabile è di curvatura, esso è necessariamente doppiamente speciale.

Il ragionamento fatto è senz' altro invertibile, cosicchè ogni sistema (G) proiettivamente deformabile doppiamente speciale è di curvatura.

Il Teorema II è così dimostrato.

5. TEOREMA – *Se un sistema* (G) *proiettivamente deformabile appartiene ad uno dei tre tipi dinamico, sezionale, di curvatura, appartiene anche ai due rimanenti.*

Infatti, se è sezionale, è (per il Teorema I) doppiamente speciale, e quindi anche di curvatura (per il Teorema II), e poi anche di tipo dinamico perchè secondo il Teorema I (v. l'ultimo capoverso della dimostrazione) la superficie Γ da cui proviene il sistema, in quanto sezionale, è un cono, e si applica l'enunciato ab) del n. 1.

Se lo si suppone di curvatura, esso è doppiamente speciale (Teorema II), e quindi sezionale, e perciò ancora — secondo quanto precede — di tipo dinamico.

Finalmente, se lo si suppone di tipo dinamico, esso è anche sezionale (cfr. l'enunciato ad) del n. 1), e si giunge ancora una volta alla medesima conclusione.

Il Teorema è così dimostrato. Risultano così provati anche gli enunciati bd), cd) del n. 1.

6. Conviene ancora, per i sistemi (G) ai quali si riferisce il teorema che precede, mettere in evidenza le particolarità che essi offrono entro ciascuna delle quattro classi di sistemi (G): dinamici, sezionali, di curvatura, proiettivamente deformabili.

a) Come sistemi dinamici, essi sono quelli descritti nell'enunciato ab).

b) Come sezionali, sono quelli che si ottengono proiettando le sezioni piane di un cono (o cilindro).

d) Come proiettivamente deformabili, sono quelli doppiamente speciali.

Tutto ciò è già acquisito. Aggiungiamo ora:

e) Come sistemi di curvatura essi si caratterizzano nel modo seguente. Per essi, *il sistema doppiamente infinito generatore* Θ *è tale che esiste un punto fisso* M, *proprio o improprio, rispetto al quale sussistono le due seguenti proprietà:*

1) *La radice cubica della curvatura* γ *in* A *della linea di* Θ *passante per un punto generico* A *con retta tangente* a *è* (*al variare della* a) *proporzionale al seno dell'angolo* ϑ *compreso tra le rette* AM, a;

2) *il coefficiente della proporzionalità di cui in* 1) *si mantiene costante quando il punto* A *varia su una retta uscente dal punto fisso* M.

Invero, trattandosi di un sistema proiettivamente deformabile doppiamente speciale, sia M il centro del fascio delle rette di cui si compongono le linee $S(x, y) = \text{cost.}$

Se M è proprio, lo assumiamo come origine, cosicchè $S = S\,(t)$, con $t = y/x$. Allora la (4.1) porge

$$\lambda(x,y,y') = \frac{1}{x^6}\left(\frac{dS}{dt}\right)^3 \varphi(x, y)(xy' - y)^3,$$

Per b), una soluzione è parimenti contenuta nello stesso n. 27 di (T).
dove, in base alle (4.3)

$$\varphi(x, y) = cx^3\left(\frac{dS}{dt}\right)^{-3/2}$$

con c costante, cosicchè la curvatura considerata è

$$\gamma = cx^{-3}\left(\frac{dS}{dt}\right)^{3/2}(xy' - y)^3(1 + y'^2)^{-3/2}$$

mentre il seno dell'angolo ϑ vale

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{xy' - y}{(1 + y'^2)^{1/2}(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Perciò si conclude

(6.1) $$\gamma^{1/3} = \Omega(\tau) \operatorname{sen} \vartheta,$$

dove si è posto

(6.2) $$t = \operatorname{tg} \tau, \quad \Omega(\tau) = c^{1/3}\left(\frac{dS(t)}{dt}\right)^{1/2}\frac{1}{\cos \tau}.$$

Se invece M è improprio, assumendolo come punto improprio del l'asse x, si ha $S = S(y)$, mentre, ancora dalle (4.1), (4.3) si ricava

$$\lambda(x, y, y') = c\left(\frac{dS}{dy}\right)^{3/2} y'^3$$

e perciò

(6.3) $$\gamma^{1/3} = \Psi(y) \operatorname{sen} \vartheta.$$

dove

(6.4) $$\Psi(y) = c^{1/3}\left(\frac{dS(y)}{dy}\right)^{1/2}.$$

Le (6.1), (6.3) dimostrano quanto si è asserito.

7. Si pone ora la questione di considerare il modo di operare della deformazione proiettiva in rapporto a ciascuna delle particolarità descritte.

Per quanto riguarda a), b), d), il problema è già stato da me risolto in altre occasioni. Per a), cfr. il n. 27 di (T), dal quale risulta anzitutto che ciascuno dei sistemi proiettivamente applicabili sul dato è ancora di tipo dinamico, con il medesimo «centro», proprio o improprio, e dove viene precisato il modo di variare dell'intensità del campo al passare dal sistema (G) dato a quello deformato.

Quanto a d), se ci riferiamo alla rappresentazione analitica (2.4), il passaggio dal sistema (G) dato a uno deformato si fa sottomettendo (cfr. p. e. (L)) la S a una sostituzione lineare fratta non singolare a coefficienti costanti:

$$\bar{S} = \frac{a_1 S + a_2}{a_3 S + a_4} \; (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \text{cost.}^i, \triangle = a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0). \tag{7.1}$$

Se invece il sistema (G) proiettivamente deformabile si considera dal punto di vista più geometrico analizzato in (L), (L′), il meccanismo della deformazione viene appunto descritto in (L′).

Rimane da studiare, come nuovo, unicamente il punto di vista dei sistemi di curvatura.

Da quanto precede emerge intanto senz'altro che ciascuno degli ∞^1 sistemi deformati è esso pure di curvatura: basterà pertanto indicare come è costituito un sistema $\bar{\Theta}$ generatore del nuovo sistema di curvatura. P. e. dalla (7.1) è manifesto che il nuovo sistema generatore $\bar{\Theta}$, se lo si considera in relazione con le proprietà di cui nel n. 6, ha ancora lo stesso «centro» M del sistema $\bar{\Theta}$ generatore del sistema di curvatura primitivo. Assunti gli stessi sistemi di riferimento del n. 6, sussistono (secondochè M è proprio o improprio) formole analoghe a quelle del n. precedente. Le (6.1), (6.3) divengono rispettivamente

$$\gamma^{1/3} = \bar{\Omega}(\tau), \text{ sen } \vartheta, \tag{7.2}$$

$$\gamma^{1/3} = \bar{\Psi}(y) \text{ sen } \vartheta, \tag{7.3}$$

dove, per rispondere alla questione, rimangono solo da esplicitare le funzioni $\bar{\Omega}(\tau)$, $\bar{\Psi}(y)$ rispettivamente per mezzo delle $\Omega(\tau)$, $\psi(y)$ Ora da (6.2) si ha

$$S(t) = c^{-2/3} \int \Omega^2(\tau) d\tau + c_1,$$

con c_1 costante, e quindi dalle stesse (6.2), tenendo presente (7.1) si ricava per i sistemi $\bar{\Theta}$ considerati

$$\bar{\Omega}(\tau) = k\Omega(\tau) \left[p \int \Omega^2(\tau) d\tau + q \right]^{-1} \tag{7.4}$$

con k, p, q costanti arbitrarie. Queste tre costanti si riducono a due per ragioni di omogeneità, e la presenza di due costanti arbitrarie è spiegata dal fatto che i sistemi proiettivamente deformati sono ∞^1, e ciascuno di essi ammette ∞^1 sistema $\bar{\Theta}$ generatori.

In modo ffatto analogo, se M è improprio, si trova

$$\bar{\Psi}(y) = x\Psi(y) \left[p \int \Psi^2(y) dy + q \right]^{-1}. \tag{7.5}$$