Bollettino
Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* F. Severi, Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica, vol. III, Ed. Cremonese, Roma, 1959 (Beniamino Segre)
* L. Lombardo Radice, Piani grafici finiti non desarguesiani, G. Denaro, Palermo (Davide C. Demaria)
* Vasco Ronchi, Il cannocchiale di Galileo e la scienza del Seicento, Einaudi, Torino, 1958 (Mario Gliozzi)
* Is. Newton, Sistema del mondo, Boringhieri, Torino, 1959 (Alessandro Terracini)
* E. Kahler, Algebra und Differentialrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958 (Beniamino Segre)
* A. O. Gelfond, Differenzenrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958 (Francesco G. Tricomi)
* Tiberiu Mihălesccu, Geometrie diferentială proiectivă, Edisioni dell'Accademia della Repubblica Popolare Romena, 1958
* Seminaire de "Théorie du Potentiel", Secrétariat mathématique, Paris, 1958 (Cataldo Agostinelli)
* Seminaire de "Mécanique Analytique e de Mécanique Céleste", Secrétariat mathématique, Paris, 1958 (Cataldo Agostinelli)
* L. V. Kantorovich, V. I. Krylov, Approximate methods of higher analysis, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1958 (Aldo Ghizzetti)
* Leonhard Euler, Lettere a una principessa tedesca, Boringhieri, Torino, 1958 (Tullio Viola)
* Clifford Truesdell, The Kinematics of Vorticity, Indiana University Press, Bloomington, 1954 (Antonio Pignedoli)
* Pierre de Fermat, Osservazioni su Diofanto, Boringhieri, Torino,1959 (Marco Cugiani)
* Il pensiero americano contemporaneo, ediz. Comunità, Milano, 1958 (Ettore Carruccio)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.3, p. 418–441.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_3_418_0>

RECENSIONI

F. SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, vol. III (Sviluppo delle teorie degli integrali semplici e multipli sopra una superficie o varietà e delle teorie collegate). Roma, Cremonese, 1959 (pp. VIII+463, L. 4.800).

1. Questo volume, che vede auguralmente la luce durante l'ottantunesimo anno dell'Autore, chiude e conclude degnamente il grande Trattato in cui il Severi ha raccolto le lezioni da lui impartite, a partire dal 1936, presso l' Università di Roma prima e presso l' Istituto Nazionale di Alta Matematica poi. Tale Trattato contiene l'essenza del pensiero geometrico dell'insigne scienziato, del quale espone i salienti — spesso decisivi — contributi a varie teorie ormai classiche della geometria algebrica, inquadrandoli nello sviluppo storico di queste con singolare finezza ed eleganza. Si tratta di rielaborazioni in larga misura originali, rese più pregevoli dalla suggestiva presentazione di concetti e problemi in guisa da far riecheggiare nell'animo del lettore — come già in quello dell'ascoltatore — la passione e la gioia tormentosa della ricerca. L'interesse dell'opera è accresciuto dal fatto singolare che il Severi — con la sua elevata e feconda attività ormai dodecalustre — è da annoverare non soltanto fra i creatori ma altresì fra i grandi pionieri dell'odierna geometria algebrica.

Prima di procedere ad un'analisi particolareggiata del presente volume, non sarà forse inopportuno di delineare per sommi capi la trama grandiosa dell'intera opera.

Il vol. I (1) contiene i fondamenti algebrico-geometrici della teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche, con particolare attenzione alle serie di equivalenza sulle curve riducibili, nonchè quelli concernenti la geometria sopra una superficie algebrica e lo studio delle corrispondenze, lumeggiati anche — coll'ausilio di detta teoria — nei vari loro aspetti funzionali.

Il vol. II (2) tratta dei sistemi continui di sottovarietà algebriche di una data varietà algebrica, e delle relazioni di equivalenza algebrica che ne conseguono, culminando con la teoria generale della base per le sottovarietà di data dimensione d'una varietà assegnata. Esso pone inoltre le premesse algebriche, topologiche e trascendenti occorrenti per la teoria degli integrali semplici e multipli delle varie specie sopra una superficie o varietà, con speciale riguardo a quelli di 1ª specie.

Il vol. III svolge la teoria dei suddetti integrali e delle relative forme differenziali, in rapporto soprattutto alle diverse irregolarità ed ai generi

(1) Uscito nel 1942 col titolo: *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Roma, Cremonese, 1942); ved. la recensione fattane da A. Comessatti in questo « Bollettino », serie II, vol. 5 (1943), pp. 48-55.

(2) Apparso nel 1958 con lo stesso titolo del vol. III; ved. la recensione di F. Gherardelli in questo « Bollettino », serie III, vol. 13 (1958), pp. 586-590.

geometrici ed aritmetici, fino a pervenire — nel caso delle varietà — al teorema di Riemann-Roch, a quello sulla regolarità dell'aggiunto, ed all'identificazione dei differenziali lineari semiesatti di 1ª specie con quelli esatti. Esso termina con sei Appendici e cogli indici degli autori ed analitici — amorevolmente compilati da E. Marchionna — riferentisi non soltanto al volume stesso, ma anche ai precedenti volumi I e II.

2. Esponiamo ora più diffusamente il contenuto dell'ultimo volume, ove va osservato che la numerazione dei capitoli e dei numeri prosegue quella del vol. II. Esso si divide in quattro capitoli — dal VII al X, i primi due assai più ampi degli ultimi due — i quali concernono ordinatamente il teorema fondamentale sugli integrali semplici, gli integrali multipli, il teorema di Hodge sui periodi degli integrali di 1ª specie e questioni collegate, le irregolarità d'una varietà in relazione soprattutto alle forme differenziali di 1ª specie.

Nel cap. VII, dopo aver definito e studiato la funzione razionale residua d'un integrale semplice di 2ª specie sopra una superficie, inerente alla relativa curva polare, ciò che viene ad individuare su questa un certo gruppo caratteristico, se ne deducono alcuni risultati preliminari colleganti i numeri q_0 ed r degli integrali di 1ª e 2ª specie indipendenti e l'irregolarità q della superficie. Viene quindi stabilito il teorema cosiddetto di Abel sulle superficie (dovuto però, come ciò che precede, all'A.), il quale assegna una condizione trascendente (che fa intervenire gli integrali semplici di 1ª specie) affinchè le curve di un sistema algebrico assegnato siano fra loro a due a due linearmente equivalenti; ed altri aspetti di tale teorema vengono ottenuti poco appresso. Con l'uso di quello, i precedenti risultati conducono poi al teorema fondamentale $q_0 = r = q/2$, seguendo l'originale procedimento con cui l'A. vi pervenne nel 1905. Data l'importanza basilare di questa conclusione, sono quindi anche delineate — con notevoli semplificazioni — le vie secondo cui Castelnuovo e Poincaré ebbero a riottenerla, entrambe oggi ancora assai istruttive per i concetti e gli strumenti che vi compaiono.

Il teorema fondamentale è punto di partenza di numerose ulteriori deduzioni, qui esposte insieme a vari complementi. Premesse alcune considerazioni sulla normalizzazione di cicli, periodi ed integrali sopra una superficie, e sui sistemi fondamentali d'integrali semplici normali di 2ª specie, si passa allo studio approfondito degli integrali semplici di 3ª specie, delle loro curve logaritmiche e delle relative normalizzazioni, dal quale poscia si traggono fra l'altro il criterio trascendente per la dipendenza algebrica di più curve sopra una superficie, su cui poggia la costruzione della teoria della base (data precedentemente nel cap. V del vol. II), l'uguaglianza fra il numero base di Severi ed il numero di Picard inerente ai suddetti integrali, e la caratterizzazione delle superficie regolari come quelle su cui ogni integrale semplice di 3ª specie riducesi ad una combinazione razionale-logaritmica. I fondamenti della teoria della base vengono poi anche ottenuti alla maniera di Poincaré, che fa ricorso agli integrali semplici di 1ª specie ed alle funzioni normali mediante essi collegate alle varie curve della superficie; e si dànno le dimostrazioni trascendenti (di Picard e di Severi) del teorema sulla regolarità dell'aggiunto, di cui tratta già altrimenti il n. 35 del vol. II.

Il capitolo termina coll'analisi di varie questioni colleganti una superficie o varietà superficialmente irregolare alle due varietà di Picard ad essa relative, e con ampie notizie e riflessioni storico-critiche sulla materia trattata ivi e nei capitoli V e VI (del vol. II). Esso perviene così, fra l'altro, ad un teorema d'inversione per gli integrali semplici di 1ª specie su di una superficie, allo studio algebrico-geometrico della serie d'irregolarità e di taluno dei problemi a cui questa dà luogo per la teoria dell'equivalenza razionale, nonchè a qualche orientamento preliminare circa i moduli di irregolarità.

Nel cap. VIII vengono poste anzitutto le prime nozioni sugli integrali doppi sopra una superficie, e sui loro periodi e residui, procedendo poi ad uno studio particolareggiato nel caso più semplice degli integrali di 1ª specie, con la distinzione dei 2-cicli in algebrici e trascendenti, la formulazione di vari teoremi di Lefschetz (qui soltanto parzialmente dimostrati), ed il legame intercedente fra tali integrali e le curve canoniche impure o pure della superficie. Si passa quindi alle varietà M_r ad $r \geq 3$ dimensioni, per le quali vien stabilita l'uguaglianza fra connessione lineare ed irregolarità superficiale, e vengono estesi ai loro integrali r-pli di 1ª specie i precedenti risultati concernenti il caso $r = 2$, con vari approfondimenti riguardanti il sistema canonico impuro o puro (generazioni ed invarianza relativa od assoluta delle ipersuperficie canoniche, varietà eccezionali delle diverse specie, ecc.), ed i sistemi pluricanonici ed anticanonico. V'è altresì un cenno su possibili legami fra integrali semplici e multipli di 1ª specie, nonchè sull'identità ottenuta in tale direzione da Picard per $r = 2$ e sue generalizzazioni.

Tutto il resto del capitolo è dedicato a nozioni e proprietà che si riattaccano al genere aritmetico di una M_r. Premesse le due definizioni formulate nel 1909 dal Severi per tale carattere, vien dato conto di vari tentativi fatti per stabilire la concordanza di quelle. Valendosi della seconda di dette definizioni, si introducono poi i caratteri effettivi e virtuali di un sistema lineare effettivo e della somma di due sistemi siffatti, e si stabiliscono le relazioni fra i caratteri virtuali della somma e quelli degli addendi, sulla scorta di proprietà precedentemente ottenute concernenti le formule di postulazione e la postulazione di un'ipersuperficie variabile in un sistema lineare. All'uopo viene elaborato un elegante formalismo, mediante il quale si esprimono i caratteri virtuali di un'ipersuperficie (effettiva o virtuale) che sia linearmente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi (positivi od anche negativi) di date ipersuperficie, in particolare dello zero dell'equivalenza lineare, e si ottengono varie relazioni fra caratteri definiti opportunamente quali dimensioni virtuali d'ipersuperficie. Ciò permette di istituire un semplice legame fra dimensioni virtuali e formule di postulazione, traducibile nel teorema di Riemann-Roch per certi sistemi lineari su M_r; e da questo si trae poi l'invarianza relativa del genere aritmetico in ciascuna delle due accezioni. L'uguaglianza dei due generi aritmetici viene indi ottenuta con un procedimento d'induzione completa, poggiando su di una proprietà delle formule di postulazione la cui dimostrazione è qui invero soltanto schizzata, onde si ricavano, fra l'altro, alcuni legami fra i caratteri virtuali del sistema canonico impuro ed il genere aritmetico della M_r.

Nel cap. IX, stabilite la relazione bilineare fra i periodi di due integrali r-pli di 1ª specie di una M_r e quella fra parti reali ed immaginarie dei periodi di uno stesso integrale, se ne ricava — al modo di Kähler — il teorema di Hodge sull'inesistenza di integrali r-pli di 1ª specie a periodi tutti reali (in particolare, a periodi tutti nulli). Da qui si traggono la coincidenza fra i differenziali esatti di 1ª specie sopra una superficie e quelli semiesatti (ivi introdotti in connessione al n. 95 del vol. II), ciò che fornisce una costruzione razionale dei primi, nonchè talune importanti disuguaglianze fra certi caratteri numerici ed il numero base di una superficie. Tentativi di raffrontare direttamente differenziali semiesatti e differenziali esatti erano stati fatti dal Severi prima che Hodge dimostrasse quel suo teorema, e vengono poscia esposti per l'interesse ch'essi tuttora conservano. Si studia infine la totalità delle relazioni lineari fra i periodi degli integrali doppi di 1ª specie d'una superficie, con cenni di estensioni alle M_r, e si approfondiscono le nozioni sui moduli delle superficie, adombrando anche alcuni rapporti fra questi ed i periodi degli integrali semplici e doppi di 1ª specie.

Nel cap. X si introducono le forme differenziali di 1ª specie sopra una M_r, dei vari gradi 1, 2, ..., r, quali forme differenziali a coefficienti razionali potenzialmente regolari in ogni punto di M_r (ciò che estende la nozione di differenziale semiesatto di 1ª specie); e — dopo di aver trasportato il teorema di Hodge a tali forme — si dimostra che ciascuna di quelle risulta chiusa (ossia esatta od integrabile). Si passa quindi ad un raffronto fra il numero i_h delle h-forme indipendenti di 1ª specie di M_r ed il numero i_h' analogo relativo ad una V_k di M_r $(1 \leq h < k < r)$, e si constata che risulta $i_h = i'_h$ qualora V_k venga scelta con opportune avvertenze. Ciò permette una classificazione delle V_k di M_r, fra l'altro la considerazione delle V_k chiamate qui ordinarie (per le quali $i_1 = i'_1$, $i_2 = i'_2$, ..., $i_{k-1} = i'_{k-1}$) e di quelle dette topologicamente generali (tali che i loro numeri di Betti di dimensione 1, 2, ..., k coincidano con gli analoghi caratteri di ugual dimensione di M_r). Ammesso che il genere aritmetico di M_r si esprima con la somma alternata $i_r - i_{r-1} + i_{r-2} - \dots \pm i_1$, relazione questa enunciata da Severi fin dal 1909 e stabilita da Kodaira nel 1954, si passa poi a definire le varie irregolarità di M_r, ed a stabilire i legami fra queste, le i_k e le consimili irregolarità delle singole V_k di M_r.

Si procede infine allo studio delle forme differenziali di 2ª specie e di quelle improprie, rispettivamente definite in base alla proprietà di non avere residui e di non avere periodi (non nulli). Si dimostra al riguardo che ciascuna di tali forme risulta chiusa, e si riassumono (senza dimostrazione, ma con qualche osservazione aggiuntiva) recenti ricerche di Hodge ed Atiyah generalizzanti anteriori risultati di Picard e Lefschetz relativi al caso $(r = 2)$ delle superficie. Il teorema concernente la regolarità dell'aggiunto sopra una M_r viene quindi desunto da un risultato più generale di Kodaira (qui non provato), ciò che fornisce un'altra forma speciale del teorema di Riemann-Rock. Il capitolo termina con alcune riflessioni riguardanti i cicli trascendenti (in relazione alle forme differenziali improprie) e la formula di Picard-Alexander, le quali affacciano ipotesi e pongono problemi di grandissimo interesse.

Seguono (come già è stato accennato nel n. 1) sei Appendici. Le prime cinque riproducono ben noti lavori dell'A. su argomenti in istretta relazione con taluno di quelli svolti nel Trattato, ma che ivi non hanno potuto trovare posto, e precisamente: I. Studio approfondito delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche nel dominio effettivo, con particolare riguardo alle loro proprietà topologiche e trascendenti, fino a stabilire per esse teoremi del tipo di quelli di Abel e di Riemann-Roch. - II. Teoria generale delle corrispondenze fra varietà algebriche ∞^r, specie di quelle esse pure ∞^r, in relazione alla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza. Ciò comporta tra l'altro l'introduzione delle nozioni di valenza e di ranghi, mediante le quali viene espresso il principio numerativo di coincidenza, ottenuto come conseguenza di un'opportuna sua formulazione funzionale. - III. Approfondimento del concetto dei ranghi di una corrispondenza ∞^2 fra superficie, in connessione con la teoria della base e le cosiddette corrispondenze di Zeuthen. - IV. Determinazione dell'equivalenza funzionale d'una curva come gruppo virtuale parziale d'una serie d'equivalenza sopra una superficie. - V. Riflessioni sulle intersezioni virtuali di varietà algebriche, in relazione all'equivalenza algebrica.

L'Appendice VI devesi ad E. Marchionna ed arreca importanti contributi ottenuti per la prima volta da questo Autore per via algebrico-geometrica, i quali completano in punti salienti alcuni sviluppi dei capitoli VIII e X, trattando del teorema generale di Riemann-Roch sulle varietà algebriche e della teoria delle irregolarità. Quest'Appendice, interessante anche per le larghe ed accurate informazioni storiche e bibliografiche in essa contenute, dà una brillante conferma della opportunità che non vengano abbandonati i vecchi e gloriosi metodi puramente sintetici propri alla Scuola geometrica italiana, neppure nello studio delle questioni più elevate e difficili.

3. Il volume dianzi analizzato, come già i precedenti due, si legge con vivo diletto e sicuro profitto per la limpida scorrevolezza dello stile e la profondità delle vedute a cui si ispira, frutto delle meditazioni e dell'acuto e tenace lavoro dell'A. per oltre un sessantennio. Fra i pregi singolari dell'opera non vanno poi dimenticati quelli di carattere didattico ed i frequenti interessanti ricordi e commenti personali, come ad esempio certi riferimenti a Picard ed a Lebesgue (pp. 102-103), o alla varietà di Albanese (p. 80), od

all'opportunità di non obliare l'aurea massima di Abel che « bisogna sempre dare ai problemi una forma tale che sia possibile di risolverli » (p. 98).

L'opera — ampia e complessa — è svolta con sicurezza di Maestro, ma senza la pedantesca ricerca di un freddo ed uniforme rigore; sicchè, accanto a parti trattate con accorgimenti e finezze critiche notevoli (veggasi p. es. lo studio della riduzione dei cicli lineari d'una superficie a quelli d'una sua curva ai nn. 110-111 del vol. II, o l'analisi del comportamento del sistema jacobiano di fronte ad una trasformazione birazionale qualunque al n. 177 del vol. III), trovasi qualche passaggio assai meno circonstanziato od anche soltanto abbozzato (nn. 170, 171, 196, 222, 223). Nel presente volume poi, a differenza che nei volumi I e II, sono rimasti numerosi errori di stampa (in buona parte rettificati nell'errata-corrige posta alla fine) e talune imprecisioni (pp. 121, 140, 271, 283, 287, 294, 297): ma ciò è indubbiamente da ascriversi al travaglio fisico, cui purtroppo fu recentemente sottoposto il Severi, in guisa tanto seria che la stampa del volume non ne venne impedita unicamente per l'indomita forza d'animo da questi dimostrata.

Il Trattato è nel suo complesso un lavoro monumentale e fondamentale, nel quale — come d'altronde in tutta la multiforme opera scientifica dell'A. — si resta in dubbio se ammirare di più la ricchezza della fantasia geometrica, o l'arcana destrezza nel mettere la mano su concetti operanti e nell'antivedere sviluppi futuri, o la genialità creatrice con cui vengon superate le difficoltà. Esso sarà per lungo tempo altresì basilare quale testo di consultazione, l'uso relativo rimanendo facilitato dagli indici posti alla fine del vol. III, e costituirà probabilmente il punto di partenza per nuove ricerche, anche negli indirizzi astratti più moderni (veggasi in proposito ciò che si è detto pocanzi, alla fine del n. 2, con riferimento all'Appendice di Marchionna). Quegli indirizzi sono però in esso lasciati quasi completamente in disparte, sebbene se ne riconoscano i grandi successi, occasionalmente utilizzandoli, il che potrebbe far sembrare qualche parte del Trattato un po' antiquata o non del tutto rigorosa. A ciò forse infatti si deve se il Severi ha voluto modestamente anteporre alla prefazione del vol. III il distico di A. de Musset: « Mon verre est petit - mais je bois dans mon verre ». Si può tuttavia obiettare, con lo stesso Severi (p. 101), che:

« ... È facile oggi considerare ovvie e naturali definizioni e teorie, essendo « tutto chiarito, dopo lunga elaborazione. È anche facile, dopo che tutto è « andato a posto, trovare incompleta o poco rigorosa l'opera dei pionieri. « Ma tale atteggiamento è del tutto fuori della prospettiva storica delle idee « e della giustizia verso chi ha lavorato! ... ».

BENIAMINO SEGRE

L. LOMBARDO RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani*, G. Denaro, Palermo, pp. 90, prezzo L. 1.600.

L'Autore prendendo le mosse dagli assiomi dei piani grafici e dalle definizioni dei corpi ternari di Hall, mette in luce due metodi con cui possono essere studiati detti piani: il metodo algebrico-geometrico e quello aritmetico-gruppale. (Di un terzo metodo quello combinatorio vi è un cenno nel n. 1 dell'Appendice).

Segue poi uno studio dettagliato e sistematico dei quasicorpi (destri), dei piani di traslazione, dei piani microdesarguesiani o di R. Moufang e dei piani a caratteristica p con particolare riguardo al caso $p=2$ (piani di Fano). Una parte di esso è dedicata alla dimostrazione completa dei due fondamentali teoremi di M. ZORN - F. W. LEVI: *Ogni piano microdesarguesiano finito è desarguesiano* e di A. M. GLEASON: *Ogni piano di* FANO *finito è desarguesiano.*

L'interesse dell' Opera è notevole, sia perchè introduce in modo facile e chiaro il lettore « non iniziato » (viene presupposto soltanto la conoscenza dei fondamenti dell'algebra astratta e della teoria dei gruppi) nel vivo delle questioni sui piani grafici, sia perchè offre all' « iniziato » la prima esposizione organica in lingua italiana dei due classici teoremi sopra citati di Zorn-Levi e di Gleason.

Il volumetto contiene inoltre una importante Appendice: Complementi e problemi, in cui sono esposti una ricca sintesi dei più recenti risultati ed un gruppo numeroso di problemi aperti.

Segue infine un'ampia ed aggiornata bibliografia.

DAVIDE C. DEMARIA

VASCO RONCHI, *Il cannocchiale di Galileo e la scienza del Seicento*, Edizioni scientifiche Einaudi, Torino 1958, pp. 248, figg. 11 L. 2500.

In verità il titolo è più ampio dell'argomento trattato; più esattamente il volume avrebbe dovuto avere per titolo: *Il cannocchiale di Galileo e l'ottica del Seicento* (o, meglio, *del suo tempo*). L'opera fu già pubblicata, come avverte l'editore, nel 1942 col titolo *Galileo e il cannocchiale* (Idea, Udine). La nuova edizione differisce dalla precedente per l'introduzione di un cenno sull'opera ottica di Francesco Maurolico; per un'analisi critica del *De Telescopio* di Giovan Battista Porta, scoperto intorno al 1930 da Giuseppe Gabrieli e descritto da Maria Amalia Naldoni in due note rispettivamente del 1946 e 1952; per alcune modificazioni formali; per la riduzione del numero di figure, riprodotte nella nuova edizione con maggior cura e raggruppate in tavole fuori testo; per l'aggiunta dell'indice dei nomi.

Sostanzialmente, dunque, si tratta di una nuova edizione di un'opera ormai nota agli specialisti, come nota è la tesi fondamentale sostenutavi da Ronchi: il cannocchiale non nacque nell'ambiente colto, ma nell'ambiente artigiano; i dotti, quando se lo videro tra mano, così lontano dalle loro teorie e dalle loro convinzioni filosofiche, tentarono di distruggerlo; il trionfo del cannocchiale è opera della « fede » di Galileo nel nuovo strumento. E in parecchi passi pare che Ronchi parli di « fede » galileiana nel cannocchiale proprio in senso mistico, cioè irrazionale: sarebbe un'interpretazione sulla quale si potrebbe avanzare qualche riserva.

Nei quattro capitoli del volume (*L'ottica prima del cannocchiale; La comparsa del cannocchiale; Il cannocchiale nelle mani di Galileo; L'ottica dopo il cannocchiale*) la ricostruzione storica è ampia, talvolta minuta, sempre fondata sulla conoscenza diretta dei documenti, largamente riprodotti nel testo originale, seguito dalla traduzione italiana.

Nel primo capitolo è tratteggiata la storia dell'ottica prima del cannocchiale. Accennato rapidamente alla corrente classica che nel cinquecento aveva lasciato in retaggio ai matematici i raggi visuali di Euclide e ai fisici le *scorze* o *simulacri* o *éidola* che si staccano dai corpi e portati dal lume s'infilano nella pupilla del veggente, Ronchi si sofferma alquanto sull'opera di Alhazen. Ma la parte più ampia del capitolo è dedicata a Giovan Battista Porta, caratteristica figura del nostro cinquecento, mezzo scienziato e mezzo mago, portato più a travedere che a vedere, sempre dominato dal senso del mistero. Nel XVII libro dei *Magiae naturalis libri viginti* (Neapoli, 1589) e nel *De refractione* (Neapoli, 1593) Porta dette trattazioni organiche dell'ottica del tempo e tentò per primo (gli scritti d'ottica di Maurolico erano ancora inediti) di costruire una teoria delle lenti. È soprattutto dallo studio delle opere del Porta che Ronchi trae la ben fondata convinzione che le teorie ottiche del cinquecento non portavano al cannocchiale, ma ne allontanavano. La teoria geometrica degli specchi e delle lenti muoveva dall'apparente semplicittà della sfera e forse anche dal pregiudizio della sua perfezione tra i solidi geometrici, ma le aberrazioni, tanto nello specchio emisferico, quanto, e più, nella *pila crystallina* dalla quale cominciava lo studio della rifrazione, mascheravano l'effetto principale; la concezione dei simulacri, incapace d'interpretare le più comuni esperienze di rifrazione, portava alla teoria nuova confusione; infine, la tecnica sperimentale di guardare le immagini direttamente « a occhio », senza raccoglierle su uno schermo, conduceva allo studio di un'ottica fisiologica molto più complicata e difficile dell'attuale ottica geometrica. Per tutte queste ragioni, Porta e gli altri scienziati del suo tempo s'impelagavano in difficoltà e contraddizioni, che rafforzavano la tradizionale diffidenza scolastica verso la percezione dei sensi, in particolare dell'occhio, ritenuto il più ingannatore.

Va data veramente ampia lode a Vasco Ronchi di avere avuto la pazienza e il coraggio di affrontare minutamente e con molta acutezza lo studio tecnico delle opere del Porta, d'impostazione tanto lontana dalle nostre, così irte di contraddizioni e di stravaganze, redatte, per giunta, in un latino contorto e confuso. Forse sarebbe stato utile analizzare, specialmente per la parte avuta dal Porta nella costruzione del cannocchiale, i suoi rapporti scientifici con Paolo Sarpi, che gli insegnò molte cose, come lo stesso Porta riconosce nel VII libro della *Magia*.

Ma intanto, non ostante gli insuccessi teorici e l'atteggiamento scettico dei dotti, il cannocchiale faceva, verso il 1590, la sua comparsa negli ambienti degli occhialai, forse in Olanda, forse in Italia. Visse una ventina d'anni senza storia; poi cominciarono ad occuparsene i militari, che non lo trovarono di grande interesse.

Si giunge così alla primavera del 1609, quando Galileo, allora a Venezia, riceve qualche notizia di questi nuovi occhiali; se ne incuriosisce; ne costruisce il primo esemplare nella prima settimana di luglio 1609: dieci mesi dopo, nel marzo 1610, viene stampato a Venezia il *Sidereus nuncius*. Bastano queste date per capire che la storia del cannocchiale cambia radicalmente. Ronchi segue passo passo, e non sarebbe esagerato dire giorno per giorno, il cammino del nuovo strumento, che Galileo a buon diritto poteva dire « suo figliuolo »: la prima costruzione, i successivi miglioramenti, la misura dell'ingrandimento. E da tutto l'esame critico di questa attività galileiana risulta ancora una volta confermato che Galileo in fatto d'ottica scientifica aveva una preparazione modesta: diciamo, era un incompetente.

Ma appunto un incompetente, non irretito nei vecchi pregiudizi, un incompetente della levatura scientifica di Galileo, era necessario per portare il cannocchiale entro la cittadella della scienza, con una complessa azione tecnica, umana e filosofica, studiata da Ronchi con cura ed amore, esposta in forma avvincente. In questa parte dell'analisi critica di Ronchi un punto ci pare meritevole di particolare menzione. I critici moderni sogliono dire che Kepler, alla prima lettura del *Sidereus nuncius*, si schierò tra i fautori di Galileo. Ma Ronchi, invece, dimostra, in base a una documentazione sicura, che Kepler, di fronte alle scoperte astronomiche di Galileo, si mantenne molto prudente ed evasivo; si convertì soltanto quando con un cannocchiale costruito da Galileo poté, alla fine di agosto 1610, accertarsi coi propri occhi che i quattro satelliti di Giove erano una realtà, non un'invenzione della mente allucinata di Galileo, fuorviata dalle apparenze ingannevoli del nuovo strumento.

L'adesione di Kepler alle vedute galileiane fu della massima importanza. Kepler era il maggiore specialista del tempo nel campo dell'ottica scientifica ed aveva una particolare capacità di risolvere i problemi, più che di porseli. Convinto che il cannocchiale non era un giocattolo per illusioni, ma uno strumento scientifico, egli si propose di darne la teoria. Muovendo dai nuovi concetti d'ottica esposti fin dal 1604 nei suoi *Ad Vitellionem paralipomena*, già nel settembre 1610 egli aveva composto il suo capolavoro d'ottica, la *Dioptrice*, fondamento dell'ottica geometrica dei nostri tempi, che praticamente si chiude con la teoria del cannocchiale di Galileo, la teoria di oggi.

Abbiamo detto in principio che sarebbe stato più opportuno intitolare il volume all'ottica del tempo di Galileo e non alla scienza del Seicento. E il rilievo ci sembra calzante, se limitiamo l'esame al contenuto tecnico del libro. Ma possiamo convenire con l'editore nella esattezza del titolo, se pensiamo che l'introduzione del cannocchiale nel mondo dotto rappresentò una grande rivoluzione per l'astronomia che vide aprirsi nuovi orizzonti, per l'ottica che ne fu ricostruita su basi moderne, per la fisica in genere che vide sorgere una nuova fiducia nella « sensata esperienza », in particolare nella esperienza visiva; ma specialmente per la continuità ridata al mondo, già spezzato da Aristotele in mondo sublunare e mondo etereo.

Abbiamo notato l'impegno posto da Ronchi nella ricerca, con una critica dei testi puntuale, precisa, talvolta tanto sottile da giungere alle sfumature di carattere filologico. E non ostante questo impegno critico ed erudito, Ronchi, da buon toscano, ha sempre l'espressione facile, la battuta pronta, la trovata felice, sì da rendere la lettura del volume non soltanto piacevole, ma avvincente.

MARIO GLIOZZI

Is. NEWTON. *Sistema del mondo* «Enciclopedia di autori classici diretta da Giorgio Colli, 23». Traduzione di Marcella Ronzoni, pp. 147, Torino, Boringhieri, 1959, L. 800.

Si tratta di una traduzione italiana dell'operetta, che « Anglii omnes Newtono tribuunt », la quale porta lo stesso titolo del terzo Libro « *De mundi systemate* » dei *Principia* di Newton.

Vi è però tra il « *Sistema del mondo* », del quale appare oggi la traduzione italiana, e il predetto Libro terzo una differenza essenziale, che si può ritenere messa in evidenza dallo stesso Newton nelle parole da lui premesse al Libro terzo: « Nei libri precedenti ho esposto i Principii della Filosofia, « non quelli filosofici, bensì solo quelli matematici ... Rimane da spiegare con « questi stessi principii la costituzione del sistema del mondo. Su questo « argomento avevo scritto un terzo libro in forma popolare, perchè potesse « essere letto da un maggior numero di persone. Ma in seguito ... ho preferito « ridurre la sostanza di questo Libro nella forma di Proposizioni (secondo « l'uso matematico) che possano essere lette da coloro che si sono resi « padroni dei principii stabiliti nei libri precedenti ».

Da queste parole si inferisce che il « Sistema del mondo » deve essere stato scritto da Newton prima della pubblicazione dei Principia. In realtà esso fu pubblicato solo dopo la morte di Newton. « Secondo la Bibliografia « newtoniana di George J. Gray (A Bibliography of the works of Sir Isaac « Newton, Cambridge, 1907) » si legge a p. 10 dell'edizione italiana ora pubblicata « questo opuscolo di Newton fu pubblicato per la prima volta in una « traduzione inglese nel 1728: A Treatise of the System of the World. By « Sir Isaac Newton, Translated into English, London, 1728. Dalla descrizione « di questa edizione risulta che il libro si apriva con una prefazione, dove « veniva riprodotta la prima parte del breve avviso che Newton aveva posto « all'inizio del terzo libro dei *Principia mathematica,* e si dava una breve « relazione sullo stato dell'astronomia ai tempi di Newton. Sempre secondo « la Bibliografia di Gray, la prima edizione latina risalirebbe al 1731: *De* « *mundi Systemate liber* ISAACI NEWTONI: opus diu integris suis partibus « desideratum, in usum juventutis academicae, Londini, 1731 ... L'edizione « latina potrebbe non essere la prima latina. Nella Biblioteca Marucelliana

« di Firenze esiste infatti una copia del De mundi systemate, che porta come « data di stampa, Londra, 1728: De mundi Systemate liber Isaaci Newtoni, « Londini, impensis J. Tonson, J. Osborn & T. Longman, 1728. Nel frontespizio « di questa edizione si possono notare, nei confronti di quella del 1731, le « seguenti particolarità: ... Per il resto l'edizione del 1728 sembra corrispon- « dere esattamente alla descrizione data dal Gray dell'edizione del 1731: ... « Il frontespizio della copia conservata nella Biblioteca Marucelliana di « Firenze è stampato sullo stesso tipo di carta del resto del volume, e non « sembra esservi stato applicato in un secondo tempo ».

Appunto sull'esemplare latino del 1728, conservato nella Biblioteca Marucelliana di Firenze, è condotta la traduzione italiana ora pubblicata.

L'esistenza di un'edizione latina del 1728, a quanto mi consta, è anche affermata da H. ZEITLINGER, che nel capitolo *A Newton Bibliography* (pp. 148-170) del volume: *Isaac Newton 1642-1727. A Memorial Volume edited for the Mathematical Association by W. J. Greenstreet*, London 1927, a p. 156, riferendosi a certe traduzioni inglesi dei Principia, dice che la principale aggiunta a queste edizioni « was a translation of De mundi Systemate « Liber Isaaci Newtoni ... first published at London in 1728, and reprinted « in 1731, while an anonimous English translation appeared in 1728, 1731 « and 1737 ».

Il contenuto del Sistema del mondo riguarda essenzialmente la legge di attrazione, i moti dei corpi celesti, le maree, le comete.

Esso è articolato in capitoletti, numerati da 1 a 79. Chi voglia fare un raffronto coi 78 che si trovano nella traduzione inglese — riprodotta da F. Cajori nelle pp. 549-626 della nota opera *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of natural Philosophy and his System of the World. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translations revised, and supplied with an historical and axplanatory appendix, by* FLORIAN CAJORI, University of California Press, 1947 — tenga presente che il paragrafo 75 della traduzione inglese si sdoppia nei n.i 75, 76, quali appaiono in quella italiana.

La traduzione italiana è scorrevole, e appare generalmente buona. Una osservazione a caso: il principio del n. 78 della traduzione italiana « Da « tali calcoli concludo che la cometa dell'anno 1618 era uscita dalla super- « ficie sferica della grande orbita il 7 dicembre, verso il tramonto del « Sole » non pare corrispondere fedelmente al testo latino (quale riprodotto nell' Opusc. xvii degli Opuscula di Newton, Losanna-Ginevra, 1744, cfr. vol. II, pp. 1-71, v. p. 63): « Similibus computis colligo, quod Cometa anni 1618 « ingressus erat sphaericum limiten Orbis magni Decem. 7, ad Solis occa- « sum »; cfr. anche la traduzione inglese in l. c., p. 618.

ALESSANDRO TERRACINI

E. KÄHLER, *Algebra und Differentialrechnung*, «Mathematische Monographien» herausgeben von Wilhelm Blaschke, 1 (Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1958).

Lo sviluppo rigoglioso — tanto da poter talora sembrare anche disordinato — delle scienze matematiche durante l'ultimo secolo, ha reso sempre più impellente la ricerca di nuove vedute unificatrici, atte a mettere in risalto le principali lineé direttive delle varie teorie e ad effettuare fra queste opportuni collegamenti. Per tali scopi si poteva pensare di porre a fondamento la nozione di « corpo » (commutativo), introducendo quali concetti derivati od ausiliari quelli di « anello », « intero », « spazio », « varietà », ecc., e di raccostare poi i fenomeni algebrici con quelli aritmetici e differenziali, culminando col trasporto dell'idea e dello studio dei differenziali abeliani di 1a specie al caso astratto più generale.

Il Kähler, già qualche anno prima dell'ultima guerra, si era appunto proposto questo ambizioso programma, che ha poi condotto a termine magistralmente colla sua *Geometria aritmetica,* imponente lavoro — testè uscito quale vol. 45 (serie IV) degli « Annali di Matematica » — significativamente dedicato a Francesco Severi e alla memoria di Guido Castelnuovo e Federico Enriques. Ed è da rilevare che tale lavoro, oltre a soddisfare pienamente alle suddette esigenze teoriche, potrà forse anche avere non trascurabili riflessi pratici negli analoghi problemi di coordinamento e sintesi della fisica.

La parte basilare del suaccennato programma era stata svolta da tempo dal Kähler, che l'aveva comunicata quale Rapporto nei « Mathematiker-Tagung » di Berlino del 1953. Il Nostro — attraverso ad originali rielaborazioni ed acuti perfezionamenti di cose note — era così pervenuto ad un suggestivo inquadramento entro gli schemi algebrici del calcolo differenziale, con speciale riguardo al calcolo delle forme differenziali esterne. Il Rapporto di Berlino è poi apparso nel 1958 quale prima Monografia della nuova collezione edita dal Blaschke.

Sebbene la Monografia in discorso non si spinga tanto in là quanto la citata Memoria degli Annali, essa — nei confronti di questa — ha spiccati pregi didattici, sicchè lo studio dell'una può utilmente precedere quello dell'altra. La prima sta però anche benissimo a sè, e basta per fare apprezzare al loro giusto valore la forte personalità dell'Autore, la profondità delle sue vedute, l'efficacia dei suoi metodi. L'opera è divisa in cinque capitoli — dedicati ordinatamente all'algebra, al calcolo differenziale, ai corpi algebrici, ai differenti ed all'aritmetica — dei quali passiamo ora a dare un'idea, necessariamente sommaria.

Nel cap. I, dopo alcune premesse elementari sulle composizioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e sulla nozione di anello, si introduce il concetto di *percezione* (*Anschauung* = omomorfismo di un anello sopra un altro non ridotto al solo elemento nullo), che viene poi applicato nel dare la più ampia portata al problema di risolvere un sistema di equazioni algebriche. Si passa quindi alle *percezioni centrali* (quelle definite da un ideale massimo), ed alle nozioni di *aspetto* (*Erscheinung* = legame fra un anello commutativo dotato di unità che ammetta una percezione centrale ed il relativo anello quoziente) e di *prospettiva* (*Perspective* = percezione centrale di un anello siffatto), nonchè alle proprietà concernenti le relative *estensioni,* in termini delle quali vengono definite e studiate l'*integrità* degli elementi e la *chiusura* delle prospettive.

Nel cap. II, introdotto l'anello libero generato da una o più indeterminate sopra un anello, si definiscono i *differenziali* a partire da isomorfismi fra due sottoanelli di un anello fra loro infinitamente vicini, e si studiano gli *anelli infinitesimali* e *differenziali* e le varie *differenziazioni* sopra un anello commutativo comunque assegnato. Ciò porta, fra l'altro, a porre in modo estremamente generale ed elegante i fondamenti del calcolo delle forme differenziali esterne ed i relativi problemi di integrazione.

Il cap. III parte dalla nozione di corpo K algebrico sopra un suo sottocorpo k, generabile cioè, a partire da k, mediante un numero finito di elementi, e da quelle di *rango lineare* (Grad) e di *dimensione* (Transzendenzgrad) di K sopra k; considera poi le *equazioni algebriche* e quelle *differenziali* di K sopra k, nonchè le *differenziazioni parziali* di un anello sopra un suo sottoanello. Si definisce allora l'*inseparabilità* di K sopra k, quale differenza fra il rango del K-modulo delle forme pfaffiane ottenibili con differenziazioni parziali di K sopra k e la dimensione di K sopra k, e si stabiliscono le proprietà salienti dei corpi *separabili* (cioè ad inseparabilità nulla) e di quelli *inseparabili,* ottenendo anche opportune generazioni di tali corpi.

Il cap. IV introduce gli ideali *differenti relativi* dei vari ordini (nel senso di Fitting) di un anello commutativo R dotato di unità, rispetto ad un suo sottoanello r, nell'ipotesi che l' R-modulo delle forme pfaffiane ottenibili con differenziazioni parziali di R sopra r abbia rango finito, ricorrendo a matrici convenientemente definite da tale R-modulo (estensioni delle matrici jacobiane). Vengono quindi fatte varie interessanti *applicazioni* alla teoria delle percezioni e degli aspetti.

Il cap. V giunge al cuore delle questioni aritmetiche che si riferiscono all'*anello infinitesimale* sopra un corpo K, definendo come *interi* gli elementi di tale anello che si comportano in modo conveniente di fronte alle prospettive chiuse di K, ciò che porge una notevole amplissima generalizzazione della nozione di *differenziale semiesatto* (nel senso di Severi), ed approfondendo quindi lo studio di quegli elementi. In particolare, gli interi dell'anello suddetto che appartengono a K sono gli *interi di K*, i quali costituiscono una estensione degli ordinari numeri algebrici interi; e fra le *forme differenziali intere* ve ne sono di singolarmente importanti, che generalizzano le *forme canoniche* e *pluricanoniche* della geometria algebrica (nel senso di M. Noether e di Castelnuovo ed Enriques).

Il volume termina con un rapido schizzo storico, che soltanto in parte supplisce alla quasi totale mancanza di indicazioni bibliografiche e di raffronti terminologici, e con un utile indice analitico.

BENIAMINO SEGRE

A. O. GELFOND, *Differenzenrechnung*. - Berlin, VEB: Deutscher Verlag der Wissensch., 1958 - VIII + 336 pp.

Questo libro — che si affianca alle numerose traduzioni di altre opere russe curate dalla medesima casa editrice — dà modo di utilizzare, anche a chi non conosce il russo ma il tedesco, un pregevole trattato di calcolo delle differenze finite, pubblicato dall'A. a Mosca nel 1952.

Accanto alle classiche questioni (interpolazione, sommazione di funzioni, numeri e polinomi di Bernoulli, ecc.) che soglionsi considerare in trattati del genere, p. es. in quello ben noto del Nörlund, l'A. dedica particolare attenzione ai problemi interpolatori nel campo complesso, fornendo informazioni su interessanti risultati da lui raggiunti in argomento e da altri autori russi, specie dal Gontscharow. Tali risultati riguardano particolarmente la costruzione di una funzione analitica *intera*, di cui si conoscono i valori (o quelli di certe sue derivate) in determinati punti del piano complesso. Altri risultati originali dell'A. riguardano le equazioni alle differenze finite, specie di ordine infinito.

Le applicazioni considerate si riferiscono prevalentemente alla teoria dei numeri (trascendenza di e e di π) ma è anche riportata la dimostrazione (di Ostrowski) del teorema di Hölder sull'inesistenza di equazioni differenziali algebriche soddisfatte dalla funzione *gamma*.

Il libro è di facile e piacevole lettura (a patto di non lasciarsi indisporre dalla consueta, quasi completa ignoranza di quanto viene fatto fuori dell' Unione sovietica) e lo stile con cui è scritto è eccellente.

FRANCESCO G. TRICOMI

TIBERIU MIHĂILESCU, *Geometrie diferentială proiectivă*, Edizioni dell'Accademia della Repubblica Popolare Romena, 1958, pp. 494.

In questo trattato l'autore si propone di compiere un lavoro di sistemazione nell'immenso materiale accumulatosi nel dominio della geometria proiettiva differenziale del piano e dello spazio ordinario servendosi del metodo del riferimento mobile sotto la forma differenziale data da Cartan

Nel primo Capitolo sono trattate questioni generali preliminari. Definendo un S_n proiettivo come una varietà isomorfa alla varietà formata dall'insieme delle rette di uno spazio affine con $n+1$ dimensioni E_{n+1} che contengono l'origine di questo spazio, riesce in un modo semplice la distinzione fra i punti geometrici ed i punti analitici dello spazio proiettivo S_n e le formazioni tensoriali dello E_{n+1} si adattano senza difficoltà essenziali allo spazio proiettivo S_n.

La teoria del riferimento mobile proiettivo è stabilita direttamente senza ricorrere ai teoremi generali della teoria dei gruppi continui finiti.

Le diverse fasi che si presentano nell'operazione di particolarizzazione di un riferimento proiettivo in un punto di una varietà sono indicate classificando i riferimenti rispettivi in certe famiglie. I riferimenti corrispondenti ad una fase ben determinata formano una famiglia di classe $p[R_p]$, due riferimenti appartenenti ad una stessa famiglia $[R_p]$ essendo equivalenti rispetto alle trasformazioni di un sottogruppo proiettivo con p parametri che è il *gruppo di stabilità* della famiglia.

Applicando il metodo allo studio delle curve piane, delle curve dello spazio, delle superficie e delle varietà anolonome lineari V_3^2, per ciascuna famiglia $[R_p]$ di riferimenti si considera il problema degli invarianti finiti, degli invarianti infinitesimi e delle equazioni invarianti, mettendo in evidenza l'apparizione necessaria di tali formazioni, il numero degli invarianti indipendenti, il loro significato geometrico e stabilendo sviluppi per le equazioni locali rispettive.

Anche il riferimento tangenziale è presentato con tutti i suoi particolari sebbene i calcoli siano identici a quelli del caso puntuale. Ma i risultati ottenuti: invarianti, figure geometriche associate, ecc., permettono un istruttivo confronto coi risultati trovati per il riferimento puntuale rispettivo, operazione che non è sempre facile mediante la legge di dualità.

Nel secondo e terzo Capitolo sono considerate le curve piane e le curve dello spazio ordinario, utilizzando il riferimento $[R_3]$ di classe zero per la trattazione di problemi diversi: le cubiche del cono osculatore, il problema di Santaló cioè la determinazione delle famiglie di linee rette associate ai punti di una curva data in modo invariante ed intrinseco e formanti superficie sviluppabili, problema che include come casi particolari le curve di Tzitzeica e le curve W che ammettono un gruppo proiettivo di automorfismi con un parametro, ed il problema delle evolventi di Cartan e Salini che permette di definire il birapporto di quattro punti di una curva.

Il quarto Capitolo contiene l'esposizione dei fondamenti della teoria delle superficie non rigate, rigate, rigate sviluppabili e delle quadriche.

E molto notevole la circostanza sottolineata dall'autore che per le superficie non rigate tutte le figure fondamentali associate ad un punto della superficie cioè le tangenti di Darboux e di Segre, le quadriche di Darboux, le rette canoniche di Wilczynski e di Green e le rette di Sullivan si ottengono da considerazioni fatte su due invarianti infinitesimi che appaiono con la famiglia di riferimenti asintotici di classe $8[R_8]$ e che l'autore indica col nome di *invarianti fondamentali di Bompiani.*

Nel quinto Capitolo sono trattate questioni riguardanti le superficie non rigate: figure associate, corrispondenze, curve ipergeodetiche, teoremi del tipo di Gauss-Bonnet e classi importanti di tali superficie: le superficie di coincidenza, le superficie isotermo-asintotiche di Fubini, le superficie di Demoulin-Godeaux e di Tzitzeica, le superficie le cui asintotiche appartengono a complessi lineari e le superficie R_0.

La teoria geometrica delle reti coniugate è esposta nel sesto Capitolo e contiene, oltre i risultati classici, le ricerche dell'autore sopra certe classi di reti coniugate.

Nel settimo e ultimo Capitolo è presentata la teoria delle varietà anolonome lineari V . Queste figure, considerate per la prima volta nel modo più generale da G. Vranceanu nel 1926 furono studiate prima soltanto dal punto di vista topologico, affine e metrico. Il loro studio proiettivo fu iniziato più tardi da Bompiani e Bortolotti.

Nel presente libro questo studio è trattato sotto una forma sistematica, è ampliato e continuato con la considerazione di certe classi di varietà anolonome: le varietà V aventi le linee asintotiche indeterminate — che coincidono con i sistemi nulli — le $V_3^{'}$ coll'invariante fondamentale costante e le V_3^2 appartenenti al tipo di Tzitzeica-Wilczynski.

Un indice bibliografico che prosegue fino all'anno 1956 l'indice pubblicato nel trattato omonimo di G. Bol termina il libro.

L'autore stesso segnala nella prefazione l'assenza della teoria della corrispondenza fra due superficie e della teoria delle congruenze binarie di rette, sulle quali promette di ritornare ulteriormente in pubblicazioni monografiche.

Faculté des Sciences de Paris, Séminaire de « Théorie du Potentiel » dirigé par MARCEL BRELOT et GUSTAVE CHOQUET (Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris 5[e], 1958).

Si tratta di un fascicolo contenente sei conferenze sulla *Teoria del Potenziale*, tenute nel 1957 nel Seminario diretto da Marcel Brelot e Gustave Choquet, presso la Facoltà di Scienze di Parigi.

Il titolo può trarre in inganno i cultori di Meccanica e di Fisica matematica, poichè gli argomenti trattati in quelle conferenze non riguardano affatto la teoria classica del potenziale, ma piuttosto delle generalizzazioni del problema di Dirichlet agli spazi topologici, esposte con linguaggio ermetico, che possono interessare i cultori dell'Analisi moderna.

Il volumetto si apre con una conferenza di G. Choquet sui fondamenti della teoria *fine* del potenziale in cui imposta una teoria nella quale la funzione potenziale e il suo nucleo sono delle *misure*, utilizzando la topologia *debole* sull'insieme di misure.

Seguono due conferenze di M.lle Linda Naïm nella prima delle quali studia l'andamento delle funzioni soprarmoniche positive alla cosidetta frontiera di R. S. Martin, mentre nella seconda applica detta frontiera allo studio assiomatico del problema di Dirichlet.

Di una conferenza di J. L. Doob, riguardante l'applicazione dei metodi probabilistici al problema di Dirichlet generalizzato, vi è solo un breve sommario.

In una successiva conferenza Jacques Deny si occupa degli spazi di Dirichlet e della teoria del potenziale in questi spazi.

Infine Marcel Brelot sviluppa una assiomatica generale del problema di Dirichlet negli spazi topologici localmente compatti.

Ciascuna conferenza è corredata di una estesa bibliografia dei lavori che si connettono agli argomenti trattati; ma purtroppo il simbolismo a volte molto complicato e l'ermetismo del linguaggio rendono spesso la lettura poco chiara e penosa.

CATALDO AGOSTINELLI

Faculté des Sciences de Paris - Séminaire de «Mécanique Analytique et de Mécanique Céleste» dirigé par MAURICE JANET (Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris 5e, 1958).

È una raccolta di otto conferenze sulla *Meccanica Analitica* e la *Meccanica celeste* tenute nel 1957-58 presso il relativo Seminario della Facoltà di Scienze di Parigi, diretto da Maurice Janet.

Esse riguardano essenzialmente la *Meccanica relativistica* e le sue applicazioni alla *Meccanica Celeste* e sono di alto interesse per i cultori di questo ramo moderno della Matematica applicata.

Una prima conferenza di M.me Fourés Bruhat è dedicata alle equazioni del movimento nella teoria della relatività, e precisamente del movimento di n corpi sotto l'azione gravitazionale. Queste equazioni sono stabilite in modo approssimato a partire dalle equazioni del campo, supponendo piccole le masse dei corpi in confronto delle loro distanze, e piccole le loro velocità rispetto a quella della luce, come si fa appunto nel problema degli n corpi della Meccanica celeste. In queste ipotesi le equazioni della relatività generale conducono come si sa in prima approssimazione alle leggi newtoniane del movimento di masse gravitanti, e gli effetti relativistici si manifestano in seconda approssimazione come correttivi dei precedenti. Per il calcolo di questi effetti vi è il metodo del tensore d'impulso-energia, e il metodo delle singolarità. Nella conferenza, dopo aver richiamato i tratti essenziali della teoria della gravitazione di Einstein, vengono esposti i principi su cui quei metodi sono fondati.

Nella successiva conferenza di M.me F. Hennequin viene dettagliatamente sviluppato il metodo del tensore d'impulso-energia, il quale tensore, che rappresenta la materia, è nullo all'esterno delle masse, e prende all'interno una forma che dipende dallo stato delle masse. In questo caso le equazioni del movimento di un corpo si ottengono integrando le condizioni di conservazione del tensore di energia sul volume a tre dimensioni occupato da questo corpo.

Un'altra conferenza di Phan Tan Hoang è relativa allo studio delle equazioni del movimento col metodo delle singolarità, metodo dovuto essenzialmente ad Einstein e perfezionato da Infeld ed Hoffmann, in cui si utilizzano le equazioni del campo nel caso *esterno*, e nel quale la materia è rappresentata dalle singolarità del campo.

Dello stesso autore vi è poi una conferenza sul principio di Fermat in relatività generale in cui, partendo dall'idea che la luce è un fenomeno elettromagnetico governato dalle equazioni di Maxwell, stabilisce dapprima le equazioni della teoria elettromagnetica di Maxwell in relatività generale. Studia quindi le caratteristiche delle equazioni generalizzate mostrando che i raggi elettromagnetici sono geodetiche di lunghezza nulla di una varietà riemanniana associata allo spazio tempo V_4. Uno studio geometrico dei raggi elettromagnetici nello spazio a tre dimensioni fornisce infine l'enunciato generalizzato del principio di Fermat.

Jacques Lévy considera le correzioni relativistiche del movimento dei pianeti, effettuando una discussione sul ds^2 di Schwarzschild.

Della teoria generale dei sistemi dinamici della Meccanica classica si occupa André Kolmogoroff in cui, per mezzo dei concetti fondamentali e dei risultati della teoria spettrale, studia i movimenti asintoticamente stabili, in particolare i punti di equilibrio stabili e i cicli stabili, nonchè le curve integrali che si accumulano verso questi movimenti.

S. Kichenassamy dà un metodo generale per la determinazione di soluzioni particolari in relatività generale con applicazione al caso in cui lo spazio tempo ha simmetria assiale.

Infine una conferenza di C. Lanczos concerne la formulazione canonica delle equazioni del campo in relatività generale.

Quasi tutte le conferenze sono seguite da estese note bibliografiche che consentono uno studio approfondito delle questioni considerate.

CATALDO AGOSTINELLI

L. V. KANTOROVICH and V. I. KRYLOV, *Approximate methods of higher analysis*, tradotto dal russo da Curtis D. Benster, Ed. P. Noordhoff Ltd. - Groningen - The Netherlands 1958.

Si tratta di traduzione in lingua inglese di un'opera russa già apparsa tradotta in tedesco nel 1956 nella collezione « Hochschulbücher für Mathematik » a cura della « Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften ». Rimandando alla recensione già pubblicata nel vol. 12 (1957) di questo Bollettino (p. 712-714), ci limitiamo a segnalare che si tratta di un'edizione veramente pregevole sia per la traduzione, che per la veste tipografica.

ALDO GHIZZETTI

LEONHARD EULER, *Lettere a una principessa tedesca*, Torino, Boringhieri 1958.

Queste lettere sono un documento del più alto interesse sia per lo storico che intenda studiare il costume e più precisamente le condizioni della cultura nel secolo XVIII, sia, più ancora, per lo psicologo che voglia affrontare gli ardui problemi relativi alle manifestazioni del Genio.

Si tratta di una raccolta di ben 234 lettere, scritte fra il 1760 e il 1762, nelle quali Eulero espone con estrema chiarezza e semplicità, ma senza seguire un ordine metodico, i più disparati argomenti di fisica e di filosofia. Sono indirizzate alla principessa di Anhalt Dessau (figlia del margravio regnante di Brandenburg-Schwedt, congiunto del re Federico II di Prussia e uno dei più autorevoli esponenti della sua corte), alla quale Eulero aveva già impartito lezioni private sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria. Ma le alterne vicende della guerra dei Sette anni avevano costretto la Corte a rifugiarsi a Magdeburgo. Comprendiamo così il significato delle parole d'introduzione: « Poichè la speranza di continuare a impartire a Vostra Altezza le lezioni sulla geometria sembra, con mio grande dispiacere, ancora una volta tramontare, mi auguro di potervi rimediare per iscritto, per quanto potrà permettermelo la natura degli oggetti trattati » (p. 3). Eulero, rimasto a Berlino, riprende per corrispondenza le sue lezioni e le prosegue regolarmente fino alla fine, al ritmo di due o tre la settimana (1).

Il proposito di Eulero di continuare ad insegnar geometria non deve prendersi sul serio, poichè di geometria vera e propria se ne trova ben poca in tutto il libro. Da questo punto di vista meritano d'essere segnalate le tre sole lettere nn. 122, 123, 124, rimaste giustamente famose, portanti rispettivamente i titoli: « Sulla vera nozione dell'estensione », « Sulla divisibilità all'infinito dell'estensione », « Se tale divisibilità all'infinito possa verificarsi nei corpi effettivamente esistenti ». Ma si tratta più propriamente d'una cri-

(1) Vi sono però alcune lettere scritte a distanza d'un giorno l'una dall'altra, altre (fino a tre) nello stesso giorno.
Dobbiamo segnalare che la data della lettera n. 181 è errata.

tica di taluni concetti filosofici che stanno alla base della geometria, o che vi stavano — sarebbe forse meglio dire — in quella travagliata epoca pre-kantiana. Eulero afferma infatti, nella lettera n. 122, che il concetto dell'estensione geometrica partecipa dello stesso tipo d'astrazione di tutte le nozioni generali (per es. delle nozioni di: « albero », « uomo », « ammalato », ecc.), e che « il valore di ciascuna scienza è tanto più grande quanto più perviene a nozioni maggiormente generali, cioè astratte ». Fra i concetti propri della matematica (della geometria, in particolare) e quelli delle altre scienze, Eulero vede solo una differenza d'ordine quantitativo, e ciò in contrapposto alla scuola del Wolf, secondo la quale l'astrazione dei concetti geometrici doveva considerarsi d'ordine *qualitativamente* diverso.

Dalla concezione wolfiana si riteneva di dover dedurre « conseguenze spiacevoli », afferma Eulero, prima di tutto « negare che le proprietà convenienti all'estensione in generale, cioè le proprietà considerate in geometria, valgano anche per i corpi realmente esistenti... », negare che « dagli oggetti formati per astrazione sia lecito trarre conseguenze valide per gli oggetti reali... », onde « nessuna conclusione e nessun ragionamento sarebbero più possibili, perchè noi concludiamo sempre dalle nozioni generali a quelle particolari ». È ben noto in che modo Kant sia riuscito ad evitare tali deduzioni e a risolvere per altra via il problema.

Nelle lettere nn. 123 e 124 Eulero applica le premesse filosofiche della precedente, esponendo una dimostrazione del fatto che sia un segmento geometrico, sia un « essere esteso », o « attuale », o « individuale », ecc., come Egli in più modi chiama un qualunque corpo od oggetto concreto, possono essere suddivisi in parti piccole a piacere, cioè suddivisi all'infinito. La dimostrazione, facile e precisa per il segmento, non è certo tale per il corpo od oggetto concreto: il ragionamento d'Eulero non convince, *non può* convincere chiunque si renda conto che i concetti geometrici non sono che *immagini convenzionali* della realtà sensibile, nel senso che dalla scienza moderna è stato definitivamente chiarito.

Una buona parte del libro (particolarmente le lettere nn. 80 - 121, 125 - 132) è dedicata all'esposizione critica di questioni filosofiche e teologiche (Eulero figlio d'un pastore protestante, era, come noto, profondamente credente), sulle quali non è qui il caso di trattenersi. Segnaliamo soltanto le lettere nn. 102 - 108, che costituiscono per sè stesse un breve trattato di logica: in essa si trova esposta fra l'altro, l'interpretazione geometrica della teoria dei sillogismi solitamente attribuita ad Eulero (circoli d'Eulero).

Quasi tutta la rimanente parte del libro, la più estesa, è dedicata alla fisica: meccanica, ottica, acustica, elettricità e magnetismo, astronomia, geodesia, meteorologia, ecc. Vi si ritrovano, sommariamente esposti, i risultati d'alcune celebri ricerche d'Eulero, particolarmente relative alle leggi fondamentali della musica (lettere nn. 4 - 8), alla geografia fisica (nn. 155 - 172), alla declinazione ed all'inclinazione dell'ago magnetico (nn. 173 - 183), alla costruzione delle lenti, dei cannocchiali e microscopi (nn. 187 - 224). La redazione è elementare e discorsiva, spoglia d'ogni apparato matematico.

La raccolta di queste lettere venne pubblicata per la prima volta a Pietroburgo fra il 1768 e il 1772, dopo che Eulero si era colà trasferito su invito della zarina Caterina II. Fu subito accolta con grandissimo interesse, tanto che se ne moltiplicarono ben presto le edizioni. Il testo originale francese fu riprodotto prima in Germania (1770 - 1774), poi in Svizzera e in Inghilterra (1775), a Parigi (otto edizioni, dal 1787 al 1866), parzialmente a Bruxelles (1839). Quattro le edizioni in russo (1770 - 1796), cinque in tedesco (1769 - 1853), nove in inglese (1795 - 1858), una in olandese (1785), una in danese (1792), due in svedese (1786 e 1793), una parziale in spagnolo (1798), una in italiano (1787).

La presente edizione, seconda in Italia, è dunque l'unica pubblicata da quasi un secolo a questa parte (2). Per la sua veste dignitosissima essa fa

(2) È prevista l'inserzione delle Lettere nell'edizione monumentale *Opera omnia* di Eulero, a cura della Società elvetica delle Scienze naturali.

onore all'arte editoriale italiana, mentre per il commento e l'apparato critico di Gianfranco Cantelli, degni del massimo elogio, essa si classifica ad un alto livello di serietà scientifica. Molto opportuna ci sembra l'aggiunta, in appendice, delle tre note d'Eulero su argomenti affini, rispettivamente dai titoli: « Ricerche fisiche sulla natura delle più piccole particelle della materia » (pp. 939 - 949), « Introduzione alla dottrina della natura » (pp. 950 - 952), « Dissertazione sul magnete » (pp. 953 - 955). E le citazioni, raccolte dal Cantelli dalle opere dei massimi scienziati dei secoli XVII e XVIII, costituiscono un materiale veramente prezioso per chiunque si proponga d'approfondire le ricerche sull'argomento.

Ma, a questo proposito, non possiamo fare a meno di domandarci: qual genere di ricerche? Non crediamo che le Lettere abbiano reale interesse nè per lo storico delle Scienze, nè tanto meno per lo storico della Filosofia. Non ci sentiamo di condividere l'opinione che il Cantelli esprime nella prima pagina della sua introduzione: cioè che Eulero sia stato, come fisico, altrettanto grande che come matematico. Fu grandissimo matematico, addirittura sommo algebrista, non altrettanto grande fisico. Lo stesso Cantelli è costretto, ad un certo punto, ad ammettere che « Eulero non aveva certo la tempra dello sperimentatore fisico » (p. 915). Infatti il contributo d'Eulero, in tutti i campi della fisica, eccelleva, fra i Suoi contemporanei, sempre e solo là dove nuove ipotesi richiedevano i più potenti strumenti algebrici ed analitici per la verifica. Diceva di sembrargli che « i suoi simboli e le sue formule s'incaricassero di pensare e ragionare per lui e che la sua matita vincesse di perspicacia il suo cervello ». Ed egli spingeva la sua fiducia nella sua matita fino al punto di pronunciare, in presenza d'un risultato assurdo a cui essa lo portava, la celebre frase: « Sebbene ciò sembri contrario alla verità, pure è più da fidarsi del calcolo che del nostro stesso giudizio » (*Mechanica*, vol. I, § 272) (3).

Non parliamo poi di Eulero come filosofo! I Suoi ragionamenti, in questo campo, valgono ben poco, e sono interessanti, in proposito, le citazioni che il Cantelli ci riporta del carteggio fra D'Alembert e Lagrange, entrambi Suoi amici, ma entrambi di ben altra levatura in campo filosofico: « Fra le opere che Eulero ha pubblicate a Pietroburgo, scrive Lagrange,... ce n'è una che Eulero per il suo onore non avrebbe mai dovuto pubblicare: le *Lettere a una principessa tedesca* ». E D'Alembert risponde: « Il nostro amico Eulero è un grande analista, ma un pessimo filosofo! » (p. 903). E in tempi recenti sono stati pronunciati giudizi molto severi (4) sull'influenza d'Eulero sullo sviluppo delle idee filosofiche nel secolo XVIII.

Oseremmo dire che le Lettere fanno, in molte pagine, impressione addirittura penosa. La semplicità e la chiarezza, come la sicurezza di sè e l'af-

(3) Togliamo la citazione dagli *Scritti* di G. VAILATI (Ediz. 1911) p. 72.

(4) Per es. da parte di G. Vailati, del quale riportiamo l'interessante brano seguente.

« La mancanza, nel Wolf e più ancora nella maggior parte degli altri seguaci dell'indirizzo filosofico leibniziano, di quella profonda conoscenza dello *spirito* dei metodi matematici, alla quale le idee di Leibniz erano state attinte, sembrano aver impedito che di esse venisse afferrata la parte più intima e sostanziale.

Un'opposta ragione, la scarsità di cultura filosofica e psicologica nei continuatori dell'opera matematica di Leibniz (scarsità di cui Eulero ci fornisce un esempio caratteristico nelle sue *Lettres à une princesse d'Allemagne*), non fu meno efficace ad impedire che tali idee potessero fruttificare nel campo delle scienze matematiche, ove esse non dovevano cominciare a germogliare che un secolo e mezzo più tardi, per opera del genio di Hermann Grassmann (*Ausdehnungslehre,* 1844) ». (Loc. cit. alla nota (3), p. 623). Il Vailati prosegue deplorando che la maturazione delle idee del Leibniz sul simbolismo logico sia stata ritardata fino alla metà del secolo XIX ed oltre, cioè fino all'epoca dei lavori decisivi del Boole e del Peano. A noi sembra che il giudizio del Vailati possa ripetersi anche a proposito della teoria delle monadi e di altri concetti fondamentali della filosofia di Leibniz e dei suoi prosecutori, cui Eulero fu tanto accanitamente avverso.

fermazione fiduciosa delle proprie idee, sono bellissime cose, purchè non diventino illusorie, ove pretendano di tutto spiegare anche ciò che semplice e chiaro non è. Persino nei principi fondamentali della fisica e della meccanica, il ragionamento si rivela debole e poco fondato: citiamo due soli esempi per tutti, il tentativo di dimostrazione del principio d'inerzia (pp. 234-239) (5), e la ricerca della « vera origine delle forze capaci di cambiare lo stato dei corpi » (pp 255-265) (6).

Dobbiamo forse ammirare l'arte pedagogica di Eulero? Neppure questo oseremmo affermare. Certamente Eulero non è qui un insegnante dottrinario, anzi l'esposizione si può dire ricca di spunti orginali e sempre improntata a criteri spiccatamente euristici. Ma non sembra di poter riconoscere qui il grande Maestro dei celebri, immortali trattati di Algebra e di Analisi. La prova è che, attraverso le Lettere, non si riesce neppure ad intravvedere il profilo dell'allieva. In quale stato mai d'ignoranza o di stupidità si trova questa, se il suo Maestro trova necessario trascriverle per esteso gli schemi secondo cui si eseguiscono i quadrati di 11, di 12 e di 258 (pp. 191-192)? E se tale è il suo stato, come mai il Maestro tira via, con la massima disinvoltura, su concetti tutt'altro che facili, come per esempio sul concetto di velocità, a proposito del quale dice: « La velocità è quella ben nota proprietà per la quale si dice che un corpo percorre in un certo tempo un determinato spazio. Son sicuro che Vostra Altezza ha a questo proposito idee più giuste di quanto io potrei fornirgliene con una più ampia spiegazione » (p. 237)?! (7).

Veramente non sembra che Eulero abbia avuto nella stesura delle Let-

(5) Il tentativo è singolarmente ingenuo. « Sia un corpo, solo e in quiete: ci si domanda allora se resterà in quiete o se comincerà a muoversi. Poichè non c'è nessuna ragione che lo porti a muoversi da un lato piuttosto che da un altro, se ne conclude che resterà sempre in quiete. Questo deve valere anche supponendo l'esistenza di altri corpi, purchè non agiscano sul corpo in questione » (p. 234). « Finchè dura il movimento, anche la direzione dovrà restare sempre la stessa. Non sarebbe infatti possibile concepire per quale mai motivo il corpo dovrebbe scostarsi dal proprio cammino da un lato piuttosto che da un altro; e poichè nulla accade senza ragione, ne segue che tale corpo conserva sempre la stessa direzione, che cioè il suo movimento avverrà secondo una linea retta; conseguenza questa di grandissima importanza allo scopo di risolvere la questione. Egualmente si sostiene che non potrebbe cambiare neppure la sua velocità, non essendovi nessuna ragione perchè avvenga un simile cambiamento. Se ne conclude che tale corpo conserverà sempre la stessa velocità e la stessa direzione, ovvero che si muoverà continuamente, seguendo una linea retta senza discostarsene mai e procedendo sempre alla stessa velocità... » (p. 239). Il principio di ragion sufficiente spiegherebbe tutto!

(6) « È l'impenetrabilità dei corpi a costituire la vera origine delle forze che cambiano continuamente lo stato dei corpi nel mondo » (p. 258). Eulero distingue, nel suo sistema, le forze meccaniche, manifestantisi per mutuo contatto dei corpi e in virtù dell'impenetrabilità di questi, dalle forze vitali o spirituali, com'Egli le chiama. Così facendo, Egli nega nel mondo fisico ogni possibilità di trasformazione d'energia da forme extrameccaniche a forme meccaniche o viceversa. Quanto più profonda e più vera la concezione di Newton, nella quale è chiarissimamente accennata la possibilità d'una trasformazione dell'energia calorifica o luminosa in meccanica (p. 901)!

(7) La carenza del senso pedagogico deriva principalmente, a nostro parere, da quella del senso filosofico e psicologico (cfr. nota (4)), e n'è grave sintomo il non saper percepire le distinzioni qualitative del concetto matematico, come sopra abbiamo accennato (cfr. anche: T. VIOLA, *Lineamenti e problemi della pedagogia matematica*, in corso di pubblicazione nella rivista « I problemi della Pedagogia », Roma): perciò non stupisce il fallimento d'Eulero pedagogista, nel tentativo d'uscire dal dominio strettamente attinente all'Analisi ed all'Algebra. È interessante, a questo proposito, misurare l'enorme superiorità che, sulle Lettere d'Eulero, presentano gli *Elementi di Geometria* scritti dal Clairaut, pochi anni prima, con finalità del tutto analoghe.

tere, grandi preoccupazioni d'alcun genere, se non per la polemica. Nella quale non possiamo riconoscerGli davvero molta obiettività, nè coscienziosità, nè senso d'equilibrio. Lo dimostra il tono di sufficienza con cui tratta coloro che hanno opinioni diverse dalle Sue, dai più piccoli ai più grandi, ivi compreso Newton che ha tutta l'aria di compatire a proposito dell'ipotesi corpuscolare della luce (p. 59). Lo dimostrano le gravi inesattezze e trascuratezze nelle citazioni: non una volta ricorda Galileo, nè Huygens la cui ipotesi ondulatoria della luce Egli si appropria, trattandone a lungo (lettere nn. 17-20 e segg.), nè Franklin del quale descrive il parafulmine (n. 154) in tal modo da farlo quasi credere una scoperta propria; di Cartesio dice che « fu il primo che ebbe il coraggio di approfondire i misteri della natura » (p. 467), ecc. ecc..

Costume dell'epoca? Senza dubbio; ma è proprio per questo che, come abbiam detto in principio, l'opera è storicamente interessante. E proprio per questo, a lettura ultimata, siam rimasti pensosi a considerare l'immenso progresso fatto dalla cultura negli ultimi due secoli, e ad apprezzare le esigenze critiche, in tutta la loro elaboratezza e profondità, della scienza moderna.

TULLIO VIOLA

The Kinematics of Vorticity di CLIFFORD TRUESDELL, vol. di pag. 232 in 8°, Indiana University Press, Bloomington, 1954, dollari 6,00.

Il volume consta di nove capitoli preceduti da una introduzione sugli scopi espliciti che l'autore si prefigge, sui criteri che intende seguire, essenzialmente specialistici.

Il primo capitolo è dedicato alle premesse di calcolo vettoriale e di calcolo tensoriale ed è seguito da un capitolo di istituzioni cinematiche.

Il terzo capitolo prende le mosse dalla definizione di « vorticità », prosegue con le varie interpretazioni della medesima, passa a trattare delle sorgenti, dei vortici, dei moti irrotazionali, delle formule di accelerazione.

Il capitolo quarto è dedicato al campo di vorticità, il quinto alle misure e il sesto alle medie di vorticità.

Il capitolo settimo tratta dei teoremi bernoulliani, l'ottavo della convezione e diffusione della vorticità, il nono dei moti conservanti la circolazione.

Vasta è la bibliografia citata e segnalata al lettore.

L'opera, condotta in maniera snella e chiara, è concepita e costruita facendo uso di elevati mezzi analitici e geometrici, in elegante equilibrio col fluire del pensiero fisico. L'autore resiste ad ogni tentazione non tanto di trasformare l'opera in una esposizione generale di Cinematica dei mezzi continui, quanto anche solo di allargarla con tale atteggiamento più generico. Egli punta nella maniera più sintetica possibile allo scopo specifico indicato dal titolo, e ciò rende il lavoro ancora più utile ai cultori ed agli specialisti in particolare.

ANTONIO PIGNEDOLI

PIERRE DE FERMAT, *Osservazioni su Diofanto*, Trad. di Mario Michetti, Ediz. Boringhieri, Torino (1959), n. 17 della « Enciclopedia di Autori Classici », pagg. 110, L. 600.

Nella raccolta di opere di autori classici iniziata dall'editore Boringhieri figurano pezzi scelti con un gusto originale e raffinato, non esente da una certa ricercatezza, fra i quali trova molto bene il suo posto questo lavoro singolare del grande matematico francese.

Si tratta, come è noto, di una raccolta di « annotazioni marginali » apposte dal Fermat sui libri di Diofanto, pubblicati dal Bachet e da quest'ultimo commentati e corredati di traduzione latina, e di ragguardevoli appendici.

Sono una cinquantina di annotazioni, per lo più redatte in forma assai succinta, in cui si approfondiscono, si estendono, si criticano problemi posti e soluzioni prospettate da Diofanto o dal Bachet, riguardanti questioni di analisi indeterminata.

Esposte quasi sempre senza dimostrazioni queste osservazioni si rivelano spesso di notevolissimo interesse; sovente, come il Fermat non manca di far rilevare con una certa baldanza guascona, l'interesse dell'osservazione supera di gran lunga quello del testo che le ha offerto lo spunto. Celeberrima è divenuata l'osservazione n. 2, posta alla questione 8ª del libro II, ove è enunciato il cosidetto grande teorema di Fermat, di cui è ben nota la singolare vicenda.

Notevole soprattutto è il gusto rivelato dal Fermat per le ricerche nell'ambito dei numeri, interi, che si manifesta in questa come in altre sue opere; qui proprio troviamo la celebre frase (osservazione n. 42, alla questione 19ª del libro VI): « ma nè Bachet, nè alcun altro di cui mi siano pervenuti gli scritti, ha sinora conosciuto la teoria dei numeri interi, che è certamente la più bella e la più sottile ».

La spinta data dal Fermat alle ricerche sui numeri interi doveva storicamente rivelarsi uno dei più notevoli incentivi al vigoroso sviluppo preso dalla moderna teoria dei numeri. Possiamo dire che anche alcuni aspetti dell'algebra moderna hanno le loro remote origini nell'opera del nostro Autore. Non è questo il luogo per dilungarsi, ma vogliamo almeno ricordare che fu proprio nel tentativo di dimostrare il grande teorema di Fermat che il Kummer fu indotto a dare una prima sistemazione alla teoria dei domini d'integrità algebrici, le cui origini si possono far risalire a Gauss, introducendo per la prima volta la nozione di « fattore ideale ».

Naturalmente tutto questo è scarsamente lumeggiato nella presentazione che in questa edizione viene fatta dell'opera del Fermat. Evidentemente il presentatore, desiderando venire incontro a un pubblico più largo che non sia quello degli specialisti, ha preferito insistere sugli aspetti umani di questo genio singolare, lasciando intravvedere della sua opera soprattutto quei lati che potevano offrire un interesse psicologico, oppure quelli più curiosi e lievemente paradossali, che più possono far presa su un lettore non tecnico.

Fra le notizie esposte nella breve biografia viene indicata Tolosa come località della morte del Fermat, per quanto ci consta le fonti più attendibili indicano come tale la piccola città di Castres; non ci risulta che ricerche più recenti abbiano modificato questa opinione generalmente accettata. Comunque la notizia meritava forse di essere meglio suffragata.

Non vogliamo chiudere queste righe senza esprimere il nostro vivissimo assenso alla coraggiosa iniziativa dell' Editore, che, pur con qualche, del resto non facilmente evitabile, manchevolezza, si è preso l'assunto di presentare in una buona traduzione, e in decorosa veste tipografica, ad un pubblico possibilmente più vasto di quello degli specialisti, un'opera così severa, di lettura spesso ardua, eppure così ricca di un singolare interesse.

MARCO CUGIANI

CENTRO DI STUDI METODOLOGICI DI TORINO, *Il pensiero americano contemporaneo.* Direzione dell'opera F. ROSSI LANDI; un volume: *Filosofia Epistemologia Logica;* altro volume: *Scienze sociali;* ediz. Comunità, Milano 1958.

L'opera, pubblicata per iniziativa del « Centro di Studi Metodologici di Torino », ha lo scopo di presentare alcuni dei contributi più originali del pensiero nord-americano nei campi della filosofia (con particolare riferimento alla logica ed all'epistemologia) e delle scienze sociali.

I due volumi di cui l'opera è costituita sono indipendenti ma si completano a vicenda. I diversi saggi, redatti da vari Autori, discussi nella prima stesura con il Rossi Landi, sono stati successivamente riesaminati ed infine collegialmente approvati dai membri del « Centro ».

L'opera, per la varietà dei temi trattati, l'ampiezza della bibliografia e degli indici, costituisce una solida base per scambi di idee fra studiosi italiani e nord-americani ai fini di un approfondimento della comprensione reciproca.

I saggi considerati non sono soltanto presentazioni di vari caratteristici indirizzi del pensiero americano contemporaneo, ma contengono approfondite e mature visioni critiche delle teorie esposte, di cui spesso vengono posti in evidenza i punti deboli od oscuri.

La vastità dell'opera, dedicata ad argomenti solo in parte strettamente legati al pensiero matematico, non ci consente di prendere singolarmente in esame i singoli saggi ivi contenuti. Ci limiteremo pertanto a segnalare alcuni aspetti dell'opera considerata i quali presentano maggior interesse dal punto di vista matematico e logico, riferendoci, nelle citazioni che seguono, esclusivamente al volume *Filosofia, Epistemologia, Logica.*

Uno dei motivi fondamentali dell'epistemologia nord-americana contemporanea, quale ci viene presentata nell'opera in esame, è costituito dal vivo interesse per i problemi del linguaggio. Gli epistemologi considerati partono in genere dalla cosiddetta « svolta linguistica » convenzionalmente fissata al 1921, data di pubblicazione dell'originale tedesco del *Tractatus Logico-philosophicus* del WITTGENSTEIN, fondatore del Wiener Kreis: v. F. ROSSI LANDI, *Universo del discorso e lingua ideale in filosofia*, pag. 153.

« L'universo del discorso » che si era presentato nelle riflessioni del Boole come insieme di tutti gli oggetti concepibili (v. F. Enriques, *Per la storia della Logica*, Bologna 1922, pag. 180) viene inteso dai logici americani presi in esame come insieme dei termini nei quali una certa ricerca viene condotta ed anche con significati alquanto diversi (pagg. 136 e sgg.).

Il progetto di una lingua ideale ideografica, che si può far risalire almeno a Leibniz, viene ripreso dal Bergmann che s'ispira prevalentemente alle idee del Wittgenstein, pur basandosi su di una conoscenza tecnicamente compiuta della logica simbolica dei *Principia Mathematica* di WHITEHEAD e RUSSELL. Il Bergmann mira all'ambiziosa meta di dissolvere mediante il suo simbolismo le perplessità della filosofia e risolverne i problemi.

Allo scopo appunto di trattare le questioni filosofiche, il Bergmann aggiunge ai termini che già compaiono nei *Principia* altri due termini destinati ad esprimere l'esperienza personale della consapevolezza. Il Bergmann introduce così il simbolo « *M* » che significa (pag. 169) « ciò che il parlante intende nella dimensione della sua consapevolezza ». Altro nuovo simbolo introdotto dal Bergmann è l'operatore menzionante (*quoting operator*): '...' che permette di far riferimento ad un pezzo di linguaggio in quanto tale. In virtù di questi due ultimi segni la lingua ideale del Bergmann diventerebbe, secondo il suo inventore, idonea a trattare filosoficamente delle menti e degli spiriti (v. F. ROSSI LANDI, *op. cit.*, pagg. 151-177).

Altro motivo dominante nel mondo culturale americano è dato dal com portamentismo, particolarmente sostenuto dal Morris, il quale respinge lo strumentario linguistico della tradizione che chiama « mentalistica » per attenersi soltanto, in un'atmosfera biologistica della ricerca, al comportamento (v. F. Rossi Landi, *op. cit.*, pag. 143).

V. Somenzi nel saggio *L'operazionismo in fisica* illustra nei suoi diversi aspetti con particolare riferimento alla fisica relativistica e quantistica il « programma » del Bridgmann « diretto a far corrispondere ad ogni termine scientifico, in particolare ad ogni termine della fisica, l'operazione o la serie di operazioni che permettono di individuarne univocamente il significato ». Questi procedimenti, che si sono dimostrati fecondi nella fisica moderna, si presentano come assai meno persuasivi quando il Bridgmann tenta di applicarli alla geometria, svolgendo, nei riguardi di quest'ultima disciplina, una critica di tipo empiristico (pag. 219): « Come facciamo a dire che due triangoli sono uguali in quanto sovrapponibili punto per punto? Di che cosa è fatto un triangolo che si può muovere? — si domanda Bridgmann — e come sappiamo che non cambia mentre lo spostiamo? Come identifichiamo i vertici per poter dire che cadono nello stesso punto dello spazio in cui cadono quelli di un altro? La più piccola particella che possiamo usare per indicare un punto dello spazio è l'elettrone ... non ha senso parlare di « interno » di un elettrone ». È chiaro che le considerazioni qui svolte, non prive di rilievo da un punto di vista fisico, sono invece estranee al sistema geometrico cui vorrebbero riferirsi e sono espresse in linguaggio diverso da quello di una delle geometrie rigorosamente costruite in modo assiomatico.

Nei riguardi della logica formale troviamo nei pensatori nord-americani una notevole varietà di atteggiamenti. F. Barone, nel suo saggio *La terapia semantica,* dopo aver rilevato a proposito delle idee del Korzybski (pag. 7) che « l'antiaristotelismo della semantica generale ha una funzione prettamente polemica e non è certo fondata su di un'esegesi storico-filologica delle opere dello Stagirita », osserva opportunamente a proposito delle vedute di S. Chase (pag. 16): « Sorprende la disinvoltura con cui si fa della matematica un elemento essenziale del metodo scientifico, mentre si mette contemporaneamente al bando la logica formale come antiscientifica ». In altre correnti del pensiero nord-americano (diverse dalla « terapia semantica ») incontriamo vivo interesse e notevoli sviluppi della logica simbolica: si pensi alla rivista « Journal of Symbolic Logic » diretta da A. Church. Al pensiero logico americano hanno recato valido contributo emigrati europei, quali K Gödel e R. Carnap esponenti del Wiener Kreis, ed A. Tarski della Scuola Polacca.

G. Vaccarino nel suo saggio *L'implicazione stretta e la logica delle modalità* (pagg. 235-270) attraverso l'esame di un determinato ordine di problemi, ci permette di addentrarci nella suggestiva e ricca problematica della logica americana.

Le ricerche di C. J. Lewis, di cui il Vaccarino ci fornisce una lucida esposizione critica, partono dalla constatazione secondo la quale l'implicazione materiale non coincide con la conseguenza logica. Si presenta quindi l'esigenza di definire in modo preciso una nuova operazione dotata delle proprietà della conseguenza logica. A tal fine si ricorre alla logica modale e si definisce quindi l'implicazione stretta mediante la formula (pag. 253):

$$p \mathrel{-\!\!\!\ni} q \cdot = \cdot \sim\, <>\, \sim(p \supset q)$$

dove i segni $\mathrel{-\!\!\!\ni}$ $<>$ $\supset$, significano rispettivamente: implica strettamente, è possibile, implica materialmente. Pertanto la formula indicata si legge: p implica strettamente q, significa che non è possibile che p non implichi materialmente q.

Il Vaccarino enuncia due sistemi di assiomi del Lewis destinati ad esprimere le proprietà fondamentali dell'implicazione stretta in relazione con le modalità e le operazioni del calcolo proposizionale, ma tuttavia egli osserva che si ritrovano per l'implicazione stretta paradossi analoghi a quelli incontrati per l'implicazione materiale.

Nell'ordine d'idee considerato più convincenti appaiono i risultati di H. Reichenbach il quale, continua il Vaccarino (pag. 264), « si occupa della questione di determinare un'*implicazione ragionevole* ... A suo avviso implicazioni del genere sono quelle fatte con le leggi, siano esse fisiche o logiche. In questo senso parla di *implicazioni nomologiche* ».

Il saggio del Vaccarino si conclude con un breve ma significativo cenno alla semantica delle modalità nelle ricerche del Carnap, del Quine, del Church e di altri eminenti logici americani.

Terminiamo il nostro rapido esame citando una significativa conclusione del Rossi Landi, il quale, dopo aver posto in rilievo le tecniche e le mentalità sviluppatesi nell'America del Nord nei campi delle ricerche linguistiche e della logica simbolica, afferma infine (pag. 181): « Non si può risalire a prima della svolta linguistica, ma non c'è più bisogno di fare i sacrifici filosofici che essa da principio sembrò imporre ».

ETTORE CARRUCCIO

LIBRI RICEVUTI

DYNKIN, E. B. - USPENSKY, W. A., *Mathematische Unterhaltungen I. Mehrfarbenprobleme*, pp. 65, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955.

FINZI, B., *Teoria dei campi*, pp. 294, Ed. C. Tamburini, Milano, 1958. (*)

IACOB C. - *Curs de matematici superioare*, pp. 988, Editura tehnica, Bucuresti, 1957

IACOB, C. - *Introducere matematica in Mecanica fluidelor*, pp. 838, Editura academiei republicii populare romane, Bucuresti, 1952.

KELLER, O.-H., *Analytische Geometrie und lineare Algebra*, pp. VIII + 442 Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

ZURMUHL R., *Matrizen*, pp. XIV + 467, Springer Verlag, Berlin, 1958.

(*) La prima edizione è stata recensita su questo Bollettino, S. III, A. X, pp. 268-69 (1955).