Marius I. Stoka

Sulla misura cinematica in uno spazio euclideo E_n.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.4, p. 467–476.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_4_467_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulla misura cinematica in uno spazio euclideo E_n.

Nota di MARIUS I. STOKA (a Bucarest)

Sunto. - *In questo articolo l'autore mostra come si può introdurre la misura cinematica in uno spazio euclideo E_n, facendo uso delle nozioni di gruppo misurabile di Lie, misura di un insieme di varietà definita precedentemente, dando un'interpretazione geometrica a questa nozione. Si applicano poi i risultati ottenuti alle famiglie di cerchi e iperboli del piano e sfere dello spazio.*

Summary. - *In the present paper the author shows the manner in what the cinematic measure can be introduced in a euclidian space E_n by means of the notion of measurable group Lie, the measure of a the set of varieties and family measurable of varieties definited before, giving a geometrical interpretation to this notion. The results obtained are then and spheres of the space.*

Nel 1896, H. POINCARÉ ha introdotto la nozione di misura cinematica nel modo seguente [3] (1);

Sia una curva C nel piano (x, y) e $\mathcal{C}$ l'insieme di tutte le curve ottenute dalla curva C mediante dei movimenti euclidei. La misura cinematica dell'insieme di curve $\mathcal{C}$ è

$$M = \iiint f(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3$$

l'integrale essendo esteso all'intero insieme $\mathcal{C}$ e $f(u_1, u_2, u_3)$, essendo scelto in modo che M sia invariante del gruppo dei movimenti euclidei del piano.

Così POINCARÉ ottenne, per la misura cinematica del piano il valore

$$M = \iiint d\varphi dx dy$$

dove x e y sono le componenti della traslazione, e φ l'angolo di rotazione.

(1) Pag. 126.

Questa nozione è stata generalizzata nel 1942 da SHIING-SHEN CHERN [6], il quale ha introdotto la nozione di misura cinematica in uno spazio euclideo E_n. Egli ha definito questa misura per mezzo della teoria del riferimento mobile di E. CARTAN.

In questo lavoro mostreremo come si possa introdurre la misura cinematica, facendo uso delle nozioni di gruppo misurabile di LIE, misura di un insieme di varietà e famiglia di varietà misurabile, che ho già definite precedentemente [7], [8], [9], dando un'interpretazione geometrica di questa nozione.

DEFINIZIONE. – Sia E_n uno spazio euclideo di n dimensioni e $\mathcal{V}_p$ una varietà di p dimensioni. Chiamiamo varietà G_r-equivalenti alla varietà $\mathcal{V}_p$, l'insieme di tutte le varietà che possono essere ottenute da questa varietà, mediante le trasformazioni del gruppo G_r

Denoteremo questa famiglia di varietà con $\mathcal{V}$.

Dalla definizione risulta che il gruppo G_r è formato da tutte le trasformazioni che lasciano invariante globale la famiglia $\mathcal{V}$.

Se il gruppo G_r è transitivo, esso è il gruppo massimo d'invarianza della famiglia $\mathcal{V}$ (2), poichè, in questo caso, non ha nessuna varietà invariante.

Se il gruppo G_r è intransitivo, per essere gruppo massimo d'invarianza della famiglia $\mathcal{V}$ è necessario e sufficiente che $\mathcal{V}_p$ non sia varietà invariante di G_r.

Ci occuperemo dunque del caso in cui $\mathcal{V}_p$ non è varietà invariante del gruppo G_r, quindi esso è il gruppo massimo d'invarianza della famiglia $\mathcal{V}$.

Sia per conseguenza un gruppo di trasformazioni G_r di equazione

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^r) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1}$$

e una varietà di p dimensioni $\mathcal{V}_p$ di equazioni

$$F^\lambda(x^1, \dots, x^n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots, n-p)$$

che non è varietà invariante del gruppo G_r.

L'equazione della famiglia di varietà è dunque

$$F^\lambda[f^1(x, \alpha), \dots, f^n(x, \alpha)] = 0 \tag{2}$$

dove gli r parametri $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ sono essenziali.

Risulta che la famiglia di varieià $\mathcal{V}$ ha r parametri.

In considerazione del fatto che il prodotto di due trasformazioni

(2) Abbiamo chiamato gruppo massimo d'invarianza di una famiglia di varietà il gruppo di LIE che lascia invariante globale la famiglia di varietà, senza contenere trasformazioni (oltre quella identica) cha lascino invariata ogni varietà della famiglia.

del gruppo G_r appartiene al gruppo, risulta che

$$f^i[f^1(x, \alpha), \dots, f^n(x, \alpha), a^1, \dots, a^r] = f^i(x, \beta)$$

dove

$$\beta^h = \varphi^h(\alpha^1, \dots, \alpha^r, a^1, \dots, a^r) \qquad (h = 1, \dots, r)$$

è il primo gruppo parametrico π_r del gruppo G_r.

Applicando il gruppo G_r alla famiglia (2) otteniamo

$$F^\lambda[f^1(f(x, a), \alpha), \dots, f^n(f(x, a), \alpha)] = F^\lambda[f^1(x, \gamma), \dots, f^n(x, \gamma)]$$

dove

$$\gamma^h = \varphi^h(a^1, \dots, a^r, \alpha^1, \dots, \alpha^r)$$

è il secondo gruppo parametrico π'_r del gruppo G_r.

Dunque il gruppo associato al gruppo massimo d'invarianza G della famiglia di varietà $\mathfrak{V}$ è π_r'.

Ognuno sa che i gruppi parametrici di un gruppo G_r sono semplicemente transitivi [1] (³), dunque il gruppo π_r' è misurabile [8] (⁴).

Notando con $\Psi(\alpha^1, \dots, \alpha^r)$ la funzione invariante integrale del gruppo π'_r, risulta:

La famiglia di varietà $\mathfrak{V}$ è misurabile e ammette la misura

$$\int \Psi(\alpha^1, \dots, \alpha^r) d\alpha^1 \dots d\alpha^r$$

che non dipende che dal gruppo G_r.

Calcoleremo adesso effettivamente la funzione $\Psi(\alpha^1, \dots, \alpha^r)$.

I coefficienti delle trasformazioni infinitesimali del gruppo π_r sono

$$\nu_l^h = \delta_l^h - \frac{1}{2} c_{lk}{}^h \alpha^k + \dots \qquad (h, k, l = 1, \dots, r)$$

dove $c_{kl}{}^h$ sono le componenti del tensore di struttura del gruppo G_r.

Se denotiamo con

$$\omega^k(a, da) = \varphi_h{}^k(a) da^h \tag{3}$$

le r componenti relative del gruppo G e con

$$\bar{\omega}^k(a, da) = a\, \Psi_h{}^k(a) da^h$$

le componenti assolute del gruppo, allora abbiamo [12] (⁵)

$$\Psi_h{}^k(\alpha) \cdot \nu_l{}^h(\alpha) = \delta_l{}^k, \quad \varphi_h{}^k(\alpha)\mu_l{}^h(\alpha) = \delta_l{}^k \tag{4}$$

dove $\mu_l{}^h$ sono i coefficienti delle trasformazioni infinitesimali del primo gruppo parametrico π_r.

(³) Pag. 300.
(⁴) Pag. 8.
(⁵) Pag. 78.

Il sistema di DELTHEIL che determina la funzione $\Psi(\alpha)$ è [2] (6).

(5) $$\nu_k^{\,h}\frac{\partial \log \Psi}{\partial \alpha^h} = -\frac{\partial \nu_k^{\,h}}{\partial \alpha^h}\,.$$

Le funzioni $\nu_k^{\,h}$ soddisfano le equazioni

$$\nu_h^{\,u}\frac{\partial \nu_k^{\,l}}{\partial \alpha^u} - \nu_k^{\,u}\frac{\partial \nu_h^{\,l}}{\partial \alpha^u} = -c_{hk}^{\;\;u}\nu_u^{\,l}.$$

Mediante un calcolo analogo a quello del lavoro citato [8] (7), otteniamo

$$\frac{\partial \nu_k^{\,h}}{\partial \alpha^h} = \nu_k^{\,h}\frac{\partial \operatorname{Log}\Delta}{\partial \alpha^h} - c_k$$

dove $\Delta = \det|\nu_k^{\,h}(\alpha)|$, e $c_k = c_{hk}^{\;\;h}$ è il vettore di struttura di VRANCEANU del gruppo G_r.

Dunque l'equazione (5) diventa

$$\nu_k^{\,h}\frac{\partial \log \Psi\Delta}{\partial \alpha^h} = c_k\,,$$

ovvero

(6) $$\frac{\partial \log \Psi\Delta}{\partial \alpha^h} = c_k\Psi_h^{\,k}.$$

Tenendo conto che le funzioni $\Psi_h^{\,k}(\alpha)$ soddisfano alle equazioni di MAURER-CARTAN

$$\frac{\partial \Psi_h^{\,k}}{\partial \alpha^l} - \frac{\partial \Psi_l^{\,k}}{\partial \alpha^h} = -c_{uv}^{\;\;k}\Psi_h^{\,u}\Psi_l^{\,v},$$

risulta che il sistema (6) è compatibile e dunque

$$\Psi(\alpha) = \frac{e^{c_k\int \Psi_h^{\,k}(\alpha)d\alpha^h}}{\Delta}\,,$$

ovvero

$$\Psi(\alpha) = \frac{e^{c_k\int \omega^k(\alpha,\,d\alpha)}}{\Delta}\,.$$

(6) Pag. 28.
(7) Pag. 6.

Se denotiamo $\Delta_1 = \det | \Psi_k^h(\alpha) |$, dalla relazione (4) risulta

$$\Delta_1 = \frac{1}{\Delta}$$

dunque

$$\Psi(\alpha) = \Delta_1 e^{c_k \int \bar{\omega}^k(\alpha, d\alpha)}$$

ovvero, tenendo conto di una formula di SANTALÒ [4] (8)

$$\Psi(\alpha) = D(\alpha) \tag{7}$$

dove $D(\alpha) = \det | \varphi_k^h(\alpha) |$.

Quindi la misura dell'insieme di varietà $\mathfrak{V}$ è

$$\int D(\alpha) d\alpha^1 \dots d\alpha^r$$

ovvero, in base alla relazione (3)

$$\int [\omega^1 \dots \omega^r]$$

dove $[\omega^1 \dots \omega^r]$ è il prodotto esterno delle forme differenziali $\omega^1, \dots, \omega^r$. Tenendo conto che questa è appunto l'espressione della misura cinematica del gruppo G_r [5] (9) risulta il

TEOREMA. – *Dato un gruppo* G_r *e una varietà a* p *dimensioni* $\mathfrak{V}_p$, *che non sia una varietà invariante del gruppo, l'insieme* $\mathfrak{V}$ *delle varietà* G_r*-equivalenti a* $\mathfrak{V}_p$ *è misurabile, avendo come misura la misura cinematica del gruppo* G_r, *che è la misura del secondo gruppo parametrico* π_r' *del gruppo* G_r.

L. A. SANTALÒ chiama la forma differenziale

$$dG = [\omega^1 \omega^2 \dots \omega^r]$$

elemento di volume invariante a sinistra del gruppo G_r, e la forma

$$d\bar{G} = [\bar{\omega}^1 \bar{\omega}^2 \dots \bar{\omega}^r]$$

elemento di volume invariante a destra del gruppo G_r, dimostrando il teorema [4] (10).

(8) Pag. 28.
(9) Pag. 113.
(10) Pag. 29.

La condizione necessaria e sufficiente perchè i due elementi di volume coincidano è $c_j = 0$.

Daremo ora un' altra forma a questo teorema.

Tenendo conto che il primo gruppo parametrico π_r è semplicemente transitivo, dunque misurabile, denoteremo con $\Phi(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ la sua funzione invariante integrale. Dunque abbiamo

$$\mu_k{}^h \frac{\partial \log \Phi}{\partial \alpha^h} = -\frac{\partial \mu_k{}^h}{\partial \alpha^h}$$

e in considerazione che

$$\mu_h{}^u \frac{\partial \mu_k{}^l}{\partial \alpha^u} - \mu_k{}^u \frac{\partial \mu_h{}^l}{\partial \alpha^u} = c^u{}_{hk}\mu^l{}_u$$

risulta che

$$\mu_k{}^h \frac{\partial \log \frac{\Phi}{D}}{\partial \alpha^h} = -c_k$$

ovvero

$$\frac{\partial \log \frac{\Phi}{D}}{\partial \alpha^h} = -c_k \varphi_h{}^k.$$

Quindi

$$\Phi(\alpha) = D(\alpha) e^{-c_k \int \omega^k(\alpha,\, d\alpha)}$$

ovvero, tenendo conto della formula (7),

$$\Psi(\alpha) = \Phi(\alpha) e^{c_k \int \omega^k(\alpha,\, d\alpha)}.$$

Affinchè $\Psi(\alpha) = \Phi(\alpha)$ occorre dunque che

$$c_k \omega^k(\alpha, d\alpha) = 0$$

e tenendo conto che le forme $\omega^k(\alpha, d\alpha)$ sono linearmente indipendenti, $c_k = 0$.

Dunque abbiamo il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè i due gruppi parametrici di un gruppo di Lie abbiano le funzioni invarianti integrali uguali è che $c_k = 0$.

Applicheremo adesso questi risultati a speciali famiglie di varietà del piano e dello spazio.

Nel lavoro citato [7] ([11]), abbiamo dimostrato che l'insieme dei cerchi del piano

$$(x-u)^2+(y-v)^2=\frac{1}{w} \tag{8}$$

ha come misura

$$\mu(\mathfrak{A})=\int_{\mathfrak{A}_\alpha} du\,dv\,dw$$

dove $\mathfrak{A}_\alpha$ è l'insieme di punti che corrisponde all'insieme $\mathfrak{A}$ di cerchi nello spazio (u, v, w).

In un altro lavoro [10] ([12]), abbiamo dimostrato che la misura dei cerchi (8) è uguale alla misura cinematica del gruppo

$$\begin{cases} x'=\sqrt{w}(x-u) \\ y'=\sqrt{w}(y-v). \end{cases}$$

Ci occuperemo adesso dell'insieme delle iperboli del piano e delle sfere dello spazio ordinario.

Sia dunque nel piano (x, y) l'insieme delle iperboli non degeneri, di equazione

$$x^2+2Axy+(A^2-B^2)y^2+2Cx+2Dy+E=0. \tag{9}$$

Nel lavoro citato [9] ([13]). abbiamo dimostrato che la misura di quest'insieme è

$$\mu(\mathfrak{A})=\int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{B}{\Delta^2}\, dA\,dB\,dC\,dD\,dE \tag{10}$$

dove

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & A & C \\ A & A^2-B^2 & D \\ C & D & E \end{vmatrix} \neq 0$$

è il discriminante della iperbole.

Considereremo il gruppo triangolare

$$\begin{cases} x'=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 \\ y'=\alpha_4 y+\alpha_5 . \end{cases} \tag{11}$$

([11]) Pag. 915.
([12]) Pag. 558.
([13]) Pag. 479.

Il secondo gruppo parametrico associato a questo gruppo è

$$\begin{cases} \alpha_1' = a_1\alpha_1 \\ \alpha_2' = a_2\alpha_1 + a_4\alpha_2 \\ \alpha_3' = a_3\alpha_1 + a_5\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_4' = a_4\alpha_4 \\ \alpha_5' = a_5\alpha_4 + \alpha_5 \, . \end{cases}$$

La funzione invariante integrale di questo gruppo è

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_4^2}$$

e quindi la misura cinematica del gruppo (11) è

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4 d\alpha_5}{\alpha_1\alpha_4^2} \, . \tag{12}$$

Considereremo adesso l'iperbole equilatera

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \, .$$

L'insieme $\mathcal{H}$ delle iperboli G_r-equivalenti a questa iperbole è

$$x^2 + 2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)xy + \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right)^2\right]y^2 + \tag{13}$$

$$+ 2\frac{\alpha_3}{\alpha_1}x + 2\frac{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4\alpha_5}{\alpha_1^2}y + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_5^2 - 1}{\alpha_1^2} = 0 \, .$$

Trasformando

$$\alpha_1 = \frac{B}{\sqrt{\Delta}} \, , \quad \alpha_2 = \frac{AB}{\sqrt{\Delta}} \, , \quad \alpha_3 = \frac{BC}{\sqrt{\Delta}} \, , \quad \alpha_4 = \frac{B^2}{\sqrt{\Delta}} \, , \quad \alpha_5 = \frac{AC - D}{\sqrt{\Delta}}$$

l'iperbole (13) diventa appunto l'iperbole (9), e le misure (10) e (12) diventano eguali.

Abbiamo dunque

La misura dell'insieme delle iperboli non degeneri (9) è uguale alla misura cinematica del gruppo

$$\begin{cases} x' = \dfrac{B}{\sqrt{\Delta}}(x + Ay + C) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}(B^2y + AC - D). \end{cases}$$

Ci occuperemo adesso dell'insieme delle sfere dello spazio ordinario (x, y, z) di equazione

$$(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2-R^2=0. \tag{14}$$

In un lavoro precedente, abbiamo dimostrato che la misura dell'insieme delle sfere (14) è

$$\mu(\mathfrak{A})=\int_{\mathfrak{A}_\alpha}\frac{du\,dv\,dw\,dR}{R^4}. \tag{15}$$

Considereremo il gruppo

$$\begin{cases} x'=\alpha_1 x+\alpha_2 \\ y'=\alpha_1 y+\alpha_3 \\ z'=\alpha_1 z+\alpha_4 . \end{cases} \tag{16}$$

Il secondo gruppo parametrico associato a questo gruppo è

$$\begin{cases} \alpha_1'=a_1\alpha_1 \\ \alpha_2'=a_2\alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_3'=a_3\alpha_1+\alpha_3 \\ \alpha_4'=a_4\alpha_1+\alpha_4 . \end{cases}$$

La sua funzione invariante integrale è

$$F(\alpha)=\frac{1}{\alpha_1},$$

dunque la misura cinematica del gruppo (16) è

$$\mu(\mathfrak{A})=\int_{\mathfrak{A}_\alpha}\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4}{\alpha_1}. \tag{17}$$

Considerando la sfera

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

risulta che l'insieme $\mathfrak{S}$ delle sfere G_r-equivalente a questa sfera è

$$\left(x+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2+\left(y+\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^2+\left(z+\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right)^2-\frac{1}{\alpha_1^2}=0. \tag{18}$$

Trasformando

$$\alpha_1 = \frac{1}{R}, \quad \alpha_2 = \frac{-U}{R}, \quad \alpha_3 = \frac{-V}{R}, \quad \alpha_4 = \frac{-W}{R}$$

la sfera (18) diventa identica alla sfera (14), e le misure (17) e (15) diventano eguali.

Abbiamo quindi:

La misura dell'insieme delle sfere (14) è uguale alla misura cinematica del gruppo

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-u}{R} \\ y' = \dfrac{y-v}{R} \\ z' = \dfrac{z-w}{R}. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Bologna 1928.

[2] R. DELTHEIL, *Probabilités géomètriques*, Paris, 1926.

[3] H. POINCARÉ, *Calcul des Probabilités*, Paris, 1923.

[4] L. A. SANTALÓ, *Problemas de geometria integral.* Symposium sobre algunos problemas matematicos que se están estudeando en Latino América, Montevideo, 1951.

[5] L. A. SANTALÓ, *Introduction to integral geometry*, «Act. Sci. et Ind.» Nr. 1198, Paris, 1953.

[6] SHIING-SHEN CHERN, *On integral geometry in Klein spaçes*, «Annals of Math.», 43 (1942), 178-189.

[7] M. STOKA, *Masura unei multimi de varietati dintr-un spatiu R_n* «Bul. Stiint. Acad. R.P.R., Sectiunea de stiinte matematice, si fizice», T. VII, nr. 4, 1955.

[8] — — *Asupra grupurilor G_r masurabile dintr-un spatiu E_n*. «Comunicarile Acad. R. P. R.», T. IX, nr. 1, 1959.

[9] — — *Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», T. XIII, nr. 4, 1958.

[10] — — *Asupra masurii multimii cercurilor di plan*, «Gazeta Matematica si Fizica», seria A, nr. 10, 1955.

[11] — — *Masura familiilor de varieta ti din spatiul E_n*, «Studii si Cercetari Matematice», T. IX, nr. 2, 1958.

[12] G. VRANCEANU, *Leçons de Géometrie Differentielle*, «Ed. Acad. R. P. R.» Bucarest, 1957, Vol. I.