Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gino Paoluzi

Sul contenuto fisico del principio dei lavori virtuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 122–127.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_122_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sul contenuto fisico del principio dei lavori virtuali [1].

Nota di GINO PAOLUZZI (a Roma)

Sunto. - *Con riferimento a vincoli bilaterali, si introduce il concetto di «reazioni essenziali» e quello di «reazioni superflue»; e si dimostra che «l'assenza di reazioni superflue è condizione necessaria e sufficiente affinchè il lavoro complessivo esplicato dai vincoli risulti nullo per ogni singolo spostamento virtuale».*

Summary. - *With reference to bilateral bonds, the concept of «essential reactions» and that of «superfluos reactions» is introduced; and it is proved that «the absence of superfluos reactions is a necessary and sufficient condition so that the total work displayed from the bonds be null for each single virtual movement».*

Sia Σ un sistema di N punti materiali, di coordinate cartesiane $q_1, \dots, q_{3N}$, sottoposto a p vincoli bilaterali olonomi, espressi dalle p relazioni (indipendenti)

$$f_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0 \qquad (i = 1, \dots, p) \tag{1}$$

dove si suppone che la generica f_i ammetta derivate parziali, sino al secondo ordine almeno, rispetto a tutti i suoi argomenti.

Per il principio dei lavori virtuali «se i vincoli sono privi di attrito, il lavoro virtuale delle reazioni è nullo» [2].

È noto che alcuni trattatisti definiscono come vincoli (bilaterali) privi di attrito appunto quelli le cui reazioni forniscono lavoro virtuale nullo [2]. Ma tale definizione, conferendo al principio in oggetto un contenuto meramente tautologico, appare solo accettabile come espediente didattico, utile per una più agile esposizione. Pertanto, nel seguito, intenderemo attribuire agli attriti il signi-

[1] Il principio in oggetto viene qui considerato nella forma di postulato riguardante le reazioni (cfr. ad es. LEVI CIVITA e AMALDI «Lezioni di Meccanica Razionale», Bologna, Zanichelli, 1949, vol. I pag. 708).

[2] Con l'espressione abbreviata «lavoro virtuale nullo» intendiamo «lavoro complessivo nullo per ogni singolo spostamento virtuale».

ficato suggerito dall'esperienza, cioè quello di forze tangenziali che insorgono quando due corpi, o due parti di uno stesso corpo, si trovano a contatto (in condizioni di quiete o di moto relativo).

Ai nostri fini gioverà considerare, oltre allo spazio fisico in cui si muovono gli N punti materiali, una ausiliare varietà euclidea a $3N$ dimensioni, che indicheremo col simbolo S_{3N} e nella quale immagineremo fissata una $3N^{\text{pla}}$ di assi cartesiani ortogonali. Ad ogni configurazione del sistema potrà allora farsi corrispondere quel punto di S_{3N} che ha per coordinate $q_1, \dots, q_{3N}$. Codesto punto sarà assunto — istante per istante — come primo estremo per tutti i vettori di cui si verrà in discorso. Siffatta rappresentazione ci consentirà, in via preliminare, di ritrovare con speditezza alcuni risultati già sostanzialmente noti e di dare ad essi quella forma espressiva che si addice al nostro scopo.

Ciò premesso, deriviamo le (1) totalmente, una e due volte, rispetto al tempo. Abbiamo

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_1^{3N}{}_r \frac{\partial f_i}{\partial q_r} \dot{q}_r = 0$$

$$(i = 1, \dots, p)$$

$$\text{(3)} \qquad \Phi_i(q, \dot{q}, t) + \sum_1^{3N}{}_r \frac{\partial f_i}{\partial q_r} \ddot{q}_r = 0$$

dove le Φ_i sono funzioni determinate delle q, $\dot{q}$, t, che non stiamo ad esplicitare.

Indicheremo con $\vec{\varphi}_i$ il vettore di S_{3N} avente per componenti gli elementi della i^{ma} riga della matrice

$$\text{(4)} \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_{3N}} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial q_2} \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial q_{3N}} \end{matrix} \right\| .$$

Poichè, per la supposta indipendenza delle (1), la matrice (4) ha caratteristica p, i vettori $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_p$ individuano entro S_{3N} — istante per istante — una sottovarietà euclidea a p dimensioni, che indicheremo col simbolo S_p.

Si osserverà che il generico spostamento virtuale di compo nenti $\delta q_1, \ldots, \delta q_{3N}$, essendo definito dalle p condizioni

$$\sum_1^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_r} \delta q_r = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

è rappresentato in S_{3N} da un vettore $\overrightarrow{\delta s}$ che soddisfa le p relazioni

$$\overrightarrow{\delta s} \times \overrightarrow{\varphi_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p);$$

e viceversa. Ne consegue che *i vettori (elementari)* $\overrightarrow{\delta s}$ *normali ad* S_P *rappresentano tutti e soli gli spostamenti virtuali.*

Supponiamo ora, *provvisoriamente,* che gli N punti del sistema abbiano tutti la stessa massa m. Potremo scrivere per le (3)

$$m\Phi_i + \sum_1^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_r} m\ddot{q}_r = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

ovvero — se $F_r(q, \dot{q}, t)$, con $r = 1, \ldots, 3N$, sono le $3N$ componenti delle forze direttamente applicate, ed $R_1, \ldots, R_{3N}$ le corrispondenti reazioni esplicate dai vincoli —

$$m\Phi_i + \sum_1^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_r} F_r + \sum_1^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial q_r} R_r = 0$$

e infine — indicando con $\overrightarrow{F}$ ed $\overrightarrow{R}$ i vettori che in S_{3N} hanno per componenti rispettive le F_r e le R_r —

$$m\Phi_i + \overrightarrow{\varphi_i} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{\varphi_i} \times \overrightarrow{R} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p). \tag{5}$$

Designati con $\overrightarrow{R'}$ ed $\overrightarrow{R''}$ i due vettori componenti di $\overrightarrow{R}$ rispettivamente parallelo e normale ad S_P (per cui $\overrightarrow{\varphi_i} \times \overrightarrow{R''} = 0$), le (5) danno luogo alle relazioni equivalenti

$$m\Phi_i + \overrightarrow{\varphi_i} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{\varphi_i} \times \overrightarrow{R'} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p). \tag{6}$$

Il vettore $\overrightarrow{R'}$ (che giace in S_P) darà per il generico $\overrightarrow{\delta s}$ (che è normale ad S_P)

$$\overrightarrow{R'} \times \overrightarrow{\delta s} = 0$$

ovvero — introducendo le $3N$ componenti R_r' di $\vec{R}'$, e δq_r di $\vec{\delta s}$ —

$$\sum_1^{3N}{}_r\, R_r'\delta q_r = 0.$$

Ciò prova, intanto, che le reazioni $R_1', \dots, R'_{3N}$ forniscono lavoro virtuale nullo ([2]).

È invece diverso da zero ([3]) il lavoro virtuale delle reazioni $R''_1, \dots, R''_{3N}$, supposte non tutte nulle, poichè il vettore $\vec{R}''$ che le rappresenta in S_{3N}, (essendo normale ad S_P), ha la direzione di un $\vec{\delta s}$.

Si può rilevare che il vettore $\vec{R}'$ di S_{3N} (giacendo nella varietà S_P individuata entro S_{3N} dai p vettori $\vec{\varphi}_i$) risulta interamente determinato in S_{3N} dai p vettori $\vec{\varphi}_i$ e dai p prodotti scalari $\vec{\varphi}_i \times \vec{R}'$. Poichè d'altra parte — fissati i vincoli (1) e date le forze applicate $F_r(q, \dot{q}, t)$ — questi prodotti scalari sono interamente definiti dalle (6) come funzioni di q, $\dot{q}$, t, ne consegue che altrettanto avviene per il vettore $\vec{R}'$ e quindi per le $R'_1, \dots, R'_{3N}$. Resta con ciò provato che le R'_r sono univocamente determinate in funzione delle q, $\dot{q}$, t, indipendentemente dal valore delle R_r'', cioè indipendentemente dalla natura dei vincoli.

Passeremo ora a dimostrare che le reazioni $R'_1, \dots, R'_{3N}$ sopra definite bastano da sole (cioè senza il contributo delle R_r'') al rispetto dei vincoli. A tal fine giova premettere la seguente osservazione: poichè le funzioni $\vec{\varphi}_i(q, t)$, $\Phi_i(q, \dot{q}, t)$ ed $\vec{F}(q, \dot{q}, t)$ determinano interamente, per il tramite delle (6), la funzione $\vec{R}(q, \dot{q}, t)$, le stesse (6), nelle quali in luogo di $\vec{R}'$ si ponga la funzione così definita, si riducono ad identità. Scriveremo queste identità nella forma

$$(7) \qquad m\Phi_i + \sum_1^{3N}{}_r \frac{\partial f_i}{\partial q_r} F_r + \sum_1^{3N}{}_r \frac{\partial f_i}{\partial q_r} R_r' = 0 \qquad (i = 1, \dots, p).$$

Ciò premesso, immaginiamo che — a partire da un certo istante t_0 — vengano soppressi i vincoli, e agli N punti materiati (divenuti liberi) vengano applicate nuove forze di componenti

$$\mathfrak{F}_r = F_r + R'_r \qquad (r = 1, \dots, 3N)$$

([3]) Coll'espressione abbreviata «lavoro virtuale non nullo» intendiamo «lavoro complessivo non nullo per qualcuno almeno degli spostamenti virtuali».

essendo $F_r(q, \dot{q}, t)$ le funzioni esprimenti le primitive forze applicate ed $R'_r(q, \dot{q}, t)$ le funzioni dianzi definite. Si tratta di verificare che nel prosieguo del moto, al variare delle $q_1, \ldots, q_{3N}$ con t, le p funzioni $f_i(q_1, \ldots, q_{3N})$, conservano valore nullo; ovvero (poichè all'istante t_0 sono nulle, insieme con le f_i, anche le $\frac{df_i}{dt}$) che si mantengono nulle le $\frac{d^2f_i}{dt^2}$. Orbene, ciò risulta immediatamente dalle identità (7) quando in esse — dopo aver diviso per m — si sostituisca $\ddot{q}_r$ ad $\frac{F_r + R'_r}{m}$.

Questo risultato resta ancora valido se agli N punti (considerati liberi) s'immaginano applicate — oltre alle sopra dette F_r ed R'_r — anche delle $R_1'' \ldots R''_{3N}$, qualsiasi, purchè queste siano rappresentate in S_{3N} da un vettore normale (istante per istante) ad S_P; infatti codeste R_r'' non danno contributo ai primi membri delle (5), e quindi non influiscono sul valore della generica $\frac{d^2f_i}{dt^2}$.

In definitiva, assegnati i vincoli (1) e le $3N$ componenti delle forze applicate

$$\alpha) \qquad F_1(q, \dot{q}, t), \ldots, F_{3N}(\dot{q}, q, t).$$

risultano interamente definite $3N$ reazioni

$$\beta) \qquad R'_1(q, \dot{q}, t), \ldots, R'_{3N}(q, \dot{q}, t)$$

le quali:

a) forniscono lavoro virtuale nullo ([2]);

b) sono necessarie al rispetto dei vincoli;

c) considerate come un campo di forze direttamente applicate assieme alle F_r, bastano da sole al rispetto dei vincoli.

Tutte le altre reazioni forniscono (se sono effettivamente presenti) lavoro virtuale non nullo ([3]).

Le reazioni β) — dovendo sussistere qualunque sia il dispositivo adottato per realizzare i vincoli (1) sotto l'azione delle forze α) — potrebbero chiamarsi «*reazioni essenziali*».

Tutte le altre reazioni eventualmente esplicate dai vincoli — aggiungendosi alle β) che già da sole assicurano il rispetto delle (1) — potrebbero a buon diritto definirsi «*reazioni superflue*» (cioè, non necessarie al rispetto dei vincoli).

Introdotto così — senza possibile ambiguità — il concetto di «reazioni essenziali» e quello di «reazioni superflue», i risultati ottenuti potranno riassumersi nel seguente enunciato:

«*Affinchè sia nullo* [2] *il lavoro virtuale esplicato dai vincoli, è necessario e sufficiente che siano nulle le reazioni superflue*».

Tale conclusione si estende immediatamente al caso in cui le masse $m_1, \dots, m_N$ degli N punti sono disuguali ma tuttavia multiple intere di una stessa massa μ: basta concepire il generico punto di massa m_l come l'insieme di $\dfrac{m_l}{\mu}$ punti coincidenti di massa μ; e tener presente che le eventuali reazioni necessarie per assicurare siffatta coincidenza sono sempre a due a due uguali e contrarie, e non possono fornire lavoro di sorta, essendo applicate a punti che non subiscono spostamenti relativi.

L'ulteriore estensione al caso generale, in cui le m_l sono qualsiasi, scaturisce infine da un ovvio passaggio al limite, in quanto per ciascun ε positivo, comunque piccolo, si possono considerare N masse $m'_1, \dots, m'_N$ le quali siano multiple intere di una stessa massa μ e soddisfino nel contempo le disuguaglianze

$$|m_l' - m_l| < \varepsilon \qquad\qquad l = 1, \dots, N.$$

Analoghe considerazioni potrebbero svolgersi per i vincoli bilaterali anolonomi.

Identificando le reazioni superflue con quelle di attrito, l'enunciato di questa Nota si traduce nell'enunciato classico del principio dei lavori virtuali.

È possibile pertanto ravvisare, nell'essenza del principio in oggetto, due distinte parti: l'una (espressa, per i vincoli bilaterali, dall'enunciato di questa Nota), che pur non apparendo intuitiva è tuttavia dimostrabile; l'altra (riguardante l'identità delle reazioni superflue con quelle di attrito), che pur non apparendo dimostrabile è nondimeno chiaramente intuitiva.