Guido Vaona

Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve simili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 170–174.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_170_0>

Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve simili.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Si determinano le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve simili* (1).

Summary. - *Plane transformations which have an infinity of similar curves are determined.*

1. Sia T una trasformazione puntuale regolare fra due piani reali π, π' e siano γ e γ' due curve corrispondenti in T. Se esiste una *similitudine* fra π, π' che trasforma γ in γ' e che subordina fra i punti di γ e γ' la stessa corrispondenza subordinata da T, si dirà brevemente che *le due curve γ e γ' sono simili.*

In questa Nota si determinano le trasformazioni che posseggono ∞^1 e ∞^2 coppie di curve simili.

Dopo aver osservato che una trasformazione che possiede ∞^λ coppie di curve simili, se $\lambda > 2$ è una similitudine (n. 2), si dimostra che (nn. 3, 4):

Le uniche trasformazioni fra piani che posseggono ∞^2 coppie di curve simili sono le affinità.

Infine (n. 5) si indica una costruzione delle trasformazioni che hanno ∞^1 coppie di curve simili.

2. Proviamo dapprima che: *Ogni trasformazione T fra due piani che possiede ∞^λ coppie di curve simili, se $\lambda > 2$ è una similitudine.*

Si supponga infatti che T possegga ∞^3 coppie di curve simili e siano (P, P'), (Q, Q') due coppie generiche di punti corrispondenti.

(1) In altro lavoro ho trattato le questioni analoghe nel caso affine e proiettivo. Si veda: G. VAONA, *Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve omografiche od affini*, questo « Bollettino », (3), 9, 250-261 (1954).

Sul piano π esistono ∞^1 curve γ del sistema ∞^3 che passano per P e Q e che hanno per corrispondenti ∞^1 curve simili γ' che passano per i punti P' e Q' di π'.

Siccome esistono soltanto due similitudini fra π e π' che mutano P in P' e Q in Q', le ∞^1 coppie di curve simili saranno tutte corrispondenti in una di tali similitudini. Poichè le ∞^1 curve considerate ricoprono intere regioni dei piani π e π', segue che T coincide con la similitudine suddetta.

Si tratta quindi di determinare le eventuali trasformazioni che ammettono ∞^2 o ∞^1 coppie di curve corrispondenti simili.

3. Siano

$$(1) \qquad \begin{array}{l} x = x(u,\ v) \\ y = y(u,\ v) \end{array}, \qquad \begin{array}{l} x' = x'(u,\ v) \\ y' = y'(u.\ v) \end{array}$$

le equazioni di una trasformazione analitica T fra due piani $\pi(x,\ y)$, $\pi'(x',\ y')$, ove si convenga siano corrispondenti coppie di punti $(P,\ P')$ ottenute per gli stessi valori dei parametri $(u\ \ v)$.

Poniamo

$$(2) \qquad \begin{array}{l} E = x_u^{\ 2} + y_u^{\ 2} \\ F = x_u x_v + y_u y_v \\ G = x_v^{\ 2} + y_v^{\ 2} \end{array}, \qquad \begin{array}{l} E' = x_u'^{2} + y_u'^{2} \\ F' = x'_u x'_v + y'_u y'_v \\ G' = x_v'^{2} + y_v'^{2} \end{array}$$

e supponiamo che gli jacobiani

$$(3) \qquad J = \sqrt{EG - F^2}, \qquad J' = \sqrt{E'G' - F'^2}$$

siano $\neq 0$.

Assumendo come linee coordinate in π, π' le linee principali [2] si ha

$$(4) \qquad F = F' = 0.$$

Ricordiamo ora che *affinchè la trasformazione sia una similitudine deve essere*

$$(5) \qquad E = kE', \qquad G = kG' \qquad (k = \text{costante});$$

(2) Si chiamano direzioni principali uscenti da un punto P le due direzioni ortogonali che sono trasformate in direzioni ortogonali uscenti dal punto corrispondente P'.

in quanto gli elementi lineari

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2, \qquad ds'^2 = E' du^2 + G' dv^2$$

devono essere proporzionali.

Infine *affinchè la trasformazione sia conforme* deve essere

$$EG' = E'G. \tag{6}$$

Siano ora γ e γ' due curve corrispondenti in T ottenute ponendo nelle (1) $v = v(u)$. Affinché γ e γ' siano simili è necessario e sufficiente che esista una costante k tale che in ogni coppia di punti corrispondenti di γ, γ' si abbia

$$ds^2 = k^2 ds'^2, \qquad R = kR', \tag{7}$$

essendo R, R' i raggi di curvatura di γ, γ'.

Dalle (7), posto

$$\begin{aligned} L &= -\frac{EE_v}{2J}, & M &= \frac{EG_u}{2J}, & N &= \frac{EG_v}{2J}, \\ \overline{L} &= -\frac{GE_u}{2J}, & \overline{M} &= -\frac{GE_v}{2J}, & \overline{N} &= \frac{GG_u}{2J}; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} L' &= -\frac{E'E'_v}{2J'}, & M' &= \frac{E'G'_u}{2J'}, & N' &= \frac{E'G'_v}{2J'}, \\ \overline{L}' &= -\frac{G'E'_u}{2J'}, & \overline{M}' &= -\frac{G'E'_v}{2J'}, & N' &= \frac{G'G'_u}{2J'}, \end{aligned} \tag{9}$$

si hanno le due equazioni differenziali

$$E + Gv'^2 = k^2(E' + G'v'^2), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &L + (2M + \overline{L})v' + (N + 2\overline{M})v'^2 + \overline{N}v'^3 + Jv'' = \\ &= k^2[L' + (2M' + \overline{L}')v' + (N' + 2\overline{M}')v'^2 + \overline{N}'v'^3 + J'v'']. \end{aligned} \tag{11}$$

4. Si osservi ora che la (10) possiede ∞^2 soluzioni $v = v(u)$ essendo del 1° ordine e comparendo in essa la costante arbitraria k. Affinchè T possegga ∞^2 coppie di curve corrispondenti simili occorre quindi che le soluzioni della (10) soddisfino alla (11).

Eliminando fra le (10), (11) e la derivata della (10) sia la costante k^2 che la derivata seconda v'' si ottiene un'equazione differenziale del 1° ordine che deve essere identicamente soddisfatta rispetto a v'. Si hanno così le otto condizioni

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&A(G'G_v - GG'_v) = 0,\\
&B(E'E_u - EE'_u) = 0,\\
&2C(G'N - GN') - A(G'G_u - GG'_u) = 0,\\
&2C(E'L - EL') - B(E'E_v - EE'_v) = 0,\\
&2C[G'(N + 2\overline{M}) - G(N' + 2\overline{M}')] - B(G'G_v - GG'_v) -\\
&\qquad - A(E'G_v - EG'_v + G'E_v - GE'_v) = 0,\\
&2C[E'(2M + \overline{L}) - E(2M' + \overline{L}')] - A(E'E_u - EE'_u) +\\
&\qquad + B(G'E_u - GE'_u + E'G_u - EG'_u) = 0,\\
&2C[E'\overline{N} - E\overline{N}' + G'(2M + \overline{L}) - G(2M' + \overline{L}')] - B(G'G_u - GG'_u) +\\
&\qquad + A(E'G_u - EG'_u + G'E_u - GE'_u) = 0,\\
&2C[G'L - GL' + E'(N + 2\overline{M}) - E(N' + 2\overline{M}')] - B(E'E_v - EE'_v) +\\
&\qquad + A(G'E_v - GE'_v + E'G_v - EG'_v) = 0,
\end{aligned}
$$

dove

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
A &= J'G - JG'\\
B &= J'E - JE'\\
C &= EG' - E'G.
\end{aligned}
$$

Se T è una trasformazione conforme, non similitudine, la (10) si scrive

$$E + Gv'^2 = 0$$

e quindi T non possiede mai ∞^2 curve simili, essendo tale equazione del 1° ordine.

Se T non è conforme non può essere $A = 0$ oppure $B = 0$. Infatti se $A = 0$ segue che $EG' = E'G$ ed analogamente se $B = 0$.

Dalle prime due condizioni (12), integrando, si ha

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
G' &= \rho(u)G\\
E' &= \sigma(v)E
\end{aligned}
$$

dove ρ è funzione di sola u e σ è funzione di sola v.

Segue pure

$$(15)\quad J'^2 = \rho\sigma J^2.$$

La V e VIII delle relazioni (12) si scrivono ora

$$2\rho(\rho-\sigma)J^2\left(\frac{E_v}{J}-\frac{E_v'}{J'}\right)+(J'-\rho J)(\rho E_v-E_v')=0$$

$$(\sigma-\rho)J^2\left[\frac{E_v}{J}(\rho+\sigma)-2\frac{E_v'}{J'}\rho\right]-(J'-\sigma J)(\rho E_v-E_v')=0.$$

Il determinante dei coefficienti di E_v, E_v' è diverso da zero non potendo essere $\rho=\sigma$. In tale caso infatti per le (14) si avrebbe $\rho=\sigma=\text{cost}$ e quindi T sarebbe una similitudine. Si ha dunque

$$E_v=0, \qquad E_v'=0. \tag{16}$$

In modo analogo dalla VI e VII segue

$$G_u=0, \qquad G_u'=0. \tag{17}$$

Si ha quindi che E è funzione di sola u, G funzione di sola v; e quindi, per le (14), ρ e σ sono costanti.

Ciò basta per osservare che le curve caratteristiche di T, rappresentate dall'equazione

$$(J'L-JL')+[J'(2M+\overline{L})-J(2M'+\overline{L}')]v'+$$
$$+[J'(N+2\overline{M})-J(N'+2\overline{M}')]v'^2+(\overline{N}J'-\overline{N}'J)v'^3=0,$$

sono indeterminate e quindi T è un'omografia.

Inoltre poichè il rapporto di aree corrispondenti

$$\frac{J'}{J}=\text{cost.}.$$

segue pure che T è un'affinità.

5. Infine per le trasformazioni che posseggono ∞^1 coppie di curve simili osservo che esse sono tutte e sole quelle ottenute mediante la seguente costruzione:

Si fissi su π un sistema Σ ∞^1 di V curve arbitrarie tale che per ogni punto passi una ed una sola curva del sistema. Per ciascuna curva γ di Σ si fissi una similitudine S_γ fra π e π'. Ad ogni punto P di π si associ il punto P' di π' corrispondente di P nella similitudine S_γ relativa alla curva di Σ per P.

Tali trasformazioni, quando le curve di Σ si assumano come linee coordinate $v=\text{cost.}$, si possono evidentemente rappresentare con equazioni del tipo

$$\begin{aligned} x&=f(u,v) & y'&=a(u)f-b(u)\varphi+p(u)\\ y&=\varphi(u,v) & y'&=b(u)f+a(u)\varphi+q(u), \end{aligned} \tag{18}$$

dove f e φ sono funzioni arbitrarie di u e v ed a, b, p, q sono funzioni arbitrarie della sola u.