
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CATALDO AGOSTINELLI

Sui moti magnetofluidodinamici stazionari in due coordinate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 15
(1960), n.3, p. 414–423.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_414_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui moti magnetofluidodinamici stazionari in due coordinate.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - Come nel n. 1.

1. Mentre in alcuni lavori precedenti ⁽¹⁾ mi sono occupato dei moti magnetodinamici stazionari di masse fluide compressibili, altamente conduttrici dell'elettricità, rotanti e a simmetria assiale in questa nota considero invece il caso in cui gli elementi del moto e del campo magnetico dipendono soltanto dalle coordinate piane x, y . Dopo aver stabilito le condizioni che devono essere verificate perchè tali moti siano possibili, segnalo alcuni casi particolari notevoli in cui quelle condizioni sono soddisfatte, casi che possono essere la base di ulteriori ricerche e in particolare dello studio dei vortici cilindrici fluidomagnetici.

2. Le equazioni da considerare, col solito significato dei simboli, sono:

$$(1) \quad \text{rot}(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) = 0, \quad (2) \quad \text{div} \mathbf{H} = 0$$

$$(3) \quad \text{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\rho} \text{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \text{grad} \left(U - \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$(4) \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5) \quad p = C\rho^\gamma.$$

Con riferimento a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (xyz) , se supponiamo gli elementi del campo e del moto indipendenti dalla coordinata z , l'equazione (2) diventa

$$(2') \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0,$$

⁽¹⁾ C. AGOSTINELLI, *Sulle equazioni dell'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa uniformemente rotante e gravitante*, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. XXVI, fasc. 5, maggio 1959. IDEM, *Sull'equilibrio adiabatico magnetodinamico di una massa fluida gassosa gravitante, in rotazione non uniforme*, « Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XXVIII, fasc. 3, marzo 1960.

dalla quale segue che dovrà esistere una funzione $V(x, y)$ per cui si può porre

$$(6) \quad H_x = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Se $\mathbf{K}$ è il versore dell'asse z avremo allora

$$(7) \quad \mathbf{H} = \text{grad } V \wedge \mathbf{K} + H_z \mathbf{K}.$$

La (1) dà luogo alle seguenti equazioni scalari

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} (H_x v_y - H_y v_x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (H_x v_y - H_y v_x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (H_z v_x - H_x v_z) - \frac{\partial}{\partial y} (H_y v_z - H_z v_y) = 0,$$

le prime due delle quali porgono⁽²⁾

$$(9) \quad H_x v_y - H_y v_x = 0$$

cioè per le (6)

$$(9') \quad \frac{\partial V}{\partial y} v_y + \frac{\partial V}{\partial x} v_x = 0,$$

mentre la terza della (8), in virtù della (2') e delle (6) si può scrivere

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} (H_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (H_z v_y) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0.$$

Passando ora all'equazione (4) di continuità essa diventa

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) = 0.$$

(2) Allo stesso risultato si perviene osservando che dalla (1) si ha che deve esistere una funzione $\Phi[x, y]$, tale che $\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} = \text{grad } \Phi$; proiettando sull'asse z si ha proprio la (9).

Esisterà pertanto un'altra funzione $W(x, y)$ tale che

$$(11) \quad v_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x}$$

e quindi

$$(12) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad } W \wedge \mathbf{K} + v_z \mathbf{K}.$$

Le condizioni (9) e (10) diventano ora

$$(13) \quad \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H_z}{\rho} \right) \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_z}{\rho} \right) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0.$$

Per trasformare ora l'equazione (3) del moto, osserviamo che dalla (12) si ricava

$$\text{rot } \mathbf{v} = -\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } W \right) \cdot \mathbf{K} + \text{grad } v_z \wedge \mathbf{K}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } W \right) \cdot \frac{1}{\rho} \text{grad } W -$$

$$- \frac{1}{\rho} \text{grad } W \wedge \text{grad } v_z \times \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{grad } v_z^2,$$

e dalla (7) si ha inoltre

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\Delta_2 V \cdot \mathbf{K} + \text{grad } H_z \wedge \mathbf{K}, \quad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$$\text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = -\Delta_2 V \cdot \text{grad } V - |\text{grad } V| \wedge \text{grad } H_z \times \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{grad } H_z^2.$$

L'equazione del moto, tenendo ancora conto della (5), diventa quindi

$$(15) \quad - \left(\frac{1}{\rho} \Delta_2 W + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W \right) \frac{1}{\rho} \text{grad } W - \frac{1}{\rho} \text{grad } W \wedge \\ \wedge \text{grad } v_z \times \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\rho} \left(\Delta_2 V \cdot \text{grad } V + \text{grad } V \wedge \text{grad } H_z \times \right. \\ \left. \times \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} + \frac{1}{2} \text{grad } H_z^2 \right) = \text{grad} \left[U - \frac{1}{2\rho^2} (\text{grad } W)^2 - \frac{C_Y}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} \right]$$

che dà luogo alle seguenti equazioni scalari

$$(16) \quad -\left(\frac{1}{\rho} \Delta_z W + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x} + \\ + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\rho} \left(\Delta_z V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_z^2}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

$$(17) \quad -\left(\frac{1}{\rho} \Delta_z W + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W\right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial y} + \\ + \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\rho} \left(\Delta_z V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_z^2}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}$$

$$(18) \quad \text{grad } v_z \wedge \text{grad } W \times \mathbf{K} + \frac{\mu}{4\pi} \text{grad } V \wedge \text{grad } H_z \times \mathbf{K} = 0,$$

dove per semplicità si è posto

$$(19) \quad \Pi = \frac{C\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2\rho^2} (\text{grad } W)^2 - U.$$

Per l'integrabilità delle equazioni (16) e (17) si ha la condizione

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta_z W}{\rho} + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W \right) \right] \frac{\partial W}{\partial y} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta_z W}{\rho} + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W \right) \right] \frac{\partial W}{\partial x} + \\ + \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta_z V}{\rho} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta_z V}{\rho} \right) \frac{\partial V}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z^2}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

In definitiva il problema considerato richiede che siano verificate le condizioni (13), (14), (18) e (20).

3. La (13) mostra che sarà V funzione di W . Ponendo allora $V' = dV/dW$, le condizioni (14), (18) e (20) diventano rispettivamente

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H_z}{\rho} - V' v_z \right) \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_z}{\rho} - V' v_z \right) \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

$$(22) \quad \text{grad} \left(v_z - \frac{\mu}{4\pi} V' H_z \right) \wedge \text{grad } W \times \mathbf{K} = 0$$

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta_z W}{\rho} + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W \right) - \frac{\mu}{4\pi} V' \frac{\Delta_z V}{\rho} \right] \frac{\partial W}{\partial y} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta_z W}{\rho} + \text{grad } \frac{1}{\rho} \times \text{grad } W \right) - \frac{\mu}{4\pi} V' \frac{\Delta_z V}{\rho} \right] \frac{\partial W}{\partial x} + \\ + \frac{\mu}{8\pi} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z^2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z^2}{\partial y} \right) = 0$$

e risulta

$$(24) \quad \Delta^2 V = V' \Delta_z W + V'' (\text{grad } W)^2, \quad \left(V'' = \frac{d^2 V}{dW^2} \right).$$

Le (21) e (22) richiedono che sia

$$(25) \quad \frac{H_z}{\rho} - V' v_z = \Phi(W)$$

$$v_z - \frac{\mu}{4\pi} V' H_z = \Psi(W),$$

con Φ e Ψ funzioni arbitrarie di W . In tal modo ci si riduce a dover considerare la condizione (23) e le equazioni (25).

4. Esaminiamo ora alcuni casi particolari notevoli:

a) Se poniamo $H_z = 0$ e v_z uguale a una funzione arbitraria di W , le condizioni (21) e (22) sono automaticamente soddisfatte, e

la (23) si riduce alla seguente

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_2 W + \frac{1}{\rho} \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \text{grad} W - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{4\pi} V' V'' (\text{grad} W)^2 \right] \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_2 W + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \text{grad} W - \frac{\mu}{4\pi} V' V'' (\text{grad} W)^2 \right] \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

In questo caso, essendo $F(W)$ una funzione arbitraria di W , avremo

$$(27) \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_2 W + \frac{1}{\rho} \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \text{grad} W - \\ - \frac{\mu}{4\pi} V' V'' (\text{grad} W)^2 = \frac{dF}{dW}$$

e dalle (16) e (17) seguirà l'integrale

$$(28) \quad \frac{C\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2\rho^2} (\text{grad} W)^2 - U = F(W).$$

Assegnando allora le funzioni $F(W)$ e $V(W)$, nonchè il potenziale U delle forze di massa, le (27) e (28) vengono a costituire un sistema di due equazioni differenziali parziali in cui sono incognite la densità ρ e la funzione di corrente W .

Se più in particolare poniamo $F = \text{cost.}$ si ha più semplicemente

$$(27') \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_2 W + \frac{1}{\rho} \text{grad} \frac{1}{\rho} \times \\ \times \text{grad} W - \frac{\mu}{4\pi} V' V'' (\text{grad} W)^2 = 0$$

$$(28') \quad \frac{C\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2\rho^2} (\text{grad} W)^2 - U = \text{cost.},$$

il quale sistema si semplifica ancora nel caso in cui si supponga V una funzione lineare di W e quindi $V' = \text{costante}$, $V'' = 0$.

b) Se la densità ρ si suppone, come la V , funzione di W , dalle (25) si ha che anche H_z e v_z risultano funzioni di W e le condizioni (21) e (22) sono identicamente soddisfatte, mentre la (23) diventa

$$(29) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_z W + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d^1}{dW} - \frac{\mu}{4\pi} V' V'' \right) (\text{grad } W)^2 \right] \frac{\partial W}{\partial x} - \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_z W + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{d^1}{dW} - \frac{\mu}{4\pi} V' V'' \right) (\text{grad } W)^2 \right] \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Ponendo ora

$$(30) \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_z W + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dW} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{8\pi} V'^2 \right) (\text{grad } W)^2 = \frac{dF}{dW}$$

si ha l'integrale

$$(31) \quad \frac{C_Y}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2\rho^2} (\text{grad } W)^2 - U + \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{1}{\rho} \frac{dH_z^2}{dW} dW = F(W).$$

Se è dato il potenziale U delle forze, le equazioni (30) e (31) risultano in generale incompatibili. Se però scegliamo la funzione V' in modo che sia

$$(32) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 = 0 \text{ e quindi } (32') \quad V' = \pm \sqrt{\frac{4\pi}{\mu\rho}}$$

la (30) diventa

$$(33) \quad \frac{1}{2\rho} \frac{d^1}{dW} (\text{grad } W)^2 = \frac{dF}{dW}.$$

Questa dimostra che nel caso considerato sarà $(\text{grad } W)^2$ una funzione di W . Se pertanto poniamo

$$(34) \quad (\text{grad } W)^2 = K(W)$$

si ricava

$$(35) \quad F = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\rho} \frac{d}{dW} K(W) dW$$

e l'integrale (31) diventa

$$(36) \quad \frac{C_\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2\rho^2} K(W) - U + \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{1}{\rho} \frac{dH_z^2}{dW} dW - \\ - \frac{1}{2} \int \frac{d}{dW} \frac{K(W)}{\rho} dW = 0,$$

oppure, calcolando gli integrali per parti,

$$(36') \quad \frac{C_\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \frac{\mu}{8\pi} \frac{H_z^2}{\rho} - \frac{\mu}{8\pi} \int H_z^2 \frac{d}{dW} \frac{1}{\rho} dW + \frac{1}{2} \int \frac{d}{dW} \frac{K}{\rho} dW = 0.$$

In questo caso abbiamo dunque: se si assegna la funzione di corrente $W(x,y)$ in modo che $(\text{grad } W)^2$ sia uguale a una funzione di W , e inoltre il potenziale U delle forze di massa è pure funzione di W , o eventualmente nullo se esse sono trascurabili, la (36) definisce la densità ρ in funzione di W , supposto pure assegnata H_z in funzione di W .

Derivando ambo i membri della (36) rispetto a W si ha per la densità ρ un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine.

Tenendo conto della (32), le equazioni (25) risultano compatibili e si riducono a una sola se si prende $\Phi = -V'\Psi$. Si ottiene così

$$(37) \quad H_z = \frac{4\pi}{\mu V'} (v_z + \Psi)$$

oppure

$$(37') \quad H_z = \pm \sqrt{\frac{4\pi\rho}{\mu}} (v_z + \Psi),$$

con v_z e ψ funzioni arbitrarie di W .

c) Nelle ipotesi considerate in b), se nelle (30) e (31) poniamo $F = \text{costante}$, esse porgono

$$(38) \quad \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) \Delta_2 W + \frac{d}{dW} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{8\pi} V'^2 \right) (\text{grad } W)^2 = 0$$

$$(39) \quad \frac{C_\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} + \frac{1}{2\rho^2} (\text{grad } W)^2 - U + \frac{\mu}{8\pi} \int \frac{1}{\rho} \frac{dH_z^2}{dW} dW = \text{cost.}$$

Dalla (38) si ha che il rapporto $\Delta_2 W / (\text{grad } W)^2$ sarà una funzione di W . Se assegnamo allora la funzione W in modo che sia

$$(40) \quad \frac{\Delta_2 W}{(\text{grad } W)^2} = G(W)$$

con $G(W)$ funzione nota di W , la (38) diventa

$$(41) \quad \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{4\pi} V'^2 \right) G(W) + \frac{d}{dW} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\mu}{8\pi} V'^2 \right) = 0,$$

che stabilisce un legame fra la densità ρ e la funzione V' , entrambe dipendenti da W . Da essa si ricava

$$(42) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{8\pi} \left\{ V'^2 + e^{-\int G(W) dW} \left[\int V'^2 G(W) e^{\int G(W) dW} dW + C_0 \right] \right\}$$

con C_0 costante arbitraria.

Se si fissa perciò la funzione $V'(W)$ si ha subito la densità ρ .

Assegnando inoltre in funzione di W la componente H_z del campo magnetico, la (39) fornisce il potenziale U delle forze di massa atte a generare il voluto moto magnetodinamico.

Se ad esempio definiamo la funzione $W(x, y)$ mediante l'equazione

$$\frac{x^2}{W^2} + \frac{y^2}{W^2 - c^2} - 1 = 0$$

che per $W > c$ rappresenta dei cilindri ellittici omofocali, di semidistanza focale uguale a c , risulta

$$\Delta_2 W = \frac{1}{M W (W^2 - c^2)}, \quad (\text{grad } W)^2 = \frac{1}{M W^2},$$

con

$$M = \frac{x^2}{W^4} + \frac{y^2}{(W^2 - c^2)^2}$$

e quindi

$$G = \frac{\Delta_2 W}{(\text{grad } W)^2} = \frac{W}{W^2 - c^2}.$$

Si ottengono in questo caso dei moti in cui le superficie fluide sono cilindri ellittici omofocali.

d) Consideriamo infine il caso in cui si suppone $v_x = 0$, $v_y = 0$, e quindi $W = \text{cost.}$, che conduce a risultati molto semplici.

Dalle (14) e (18) si ha ora che v_z e H_z sono funzioni di V e l'equazione del moto (15) diventa

$$(43) \quad \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{\rho} \left(\Delta_z V + \frac{1}{2} \frac{dH_z^2}{dV} \right) \text{grad } V = - \text{grad} \left(\frac{C_\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - U \right)$$

Se poniamo pertanto

$$(44) \quad \Delta_z V + \frac{1}{2} \frac{dH_z^2}{dV} = 0$$

si ha l'integrale

$$(45) \quad \frac{C_\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} - U = \text{cost.}$$

Fissando allora H_z in funzione di V la (44) definisce la funzione $V(x, y)$ da cui derivano le componenti H_x , H_y del campo magnetico. Essendo poi assegnato il potenziale U delle forze, dalla (45) si ha senz'altro la densità ρ .

Se in particolare poniamo

$$(46) \quad H_z = \lambda V$$

con λ costante si ha

$$(47) \quad \Delta_z V + \lambda^2 V = 0,$$

e la funzione V si otterrà tenendo conto di assegnate condizioni ai limiti.

Se le forze di massa sono trascurabili ($U = 0$), si può porre ancora

$$(48) \quad \Delta_z V + \frac{1}{2} \frac{dH_z^2}{dV} = \frac{dF}{dV}$$

con F funzione arbitraria di V , e la (43) porge l'integrale

$$(49) \quad C_\gamma \rho + \frac{\mu}{4\pi} F(V) = \text{cost.}$$

Assegnando allora H_z ed F in funzione di V la (48) definisce la funzione $V(x, y)$ e la (49) dà la densità ρ in funzione di V .