UMI

Recensioni.

* G. Sansone, J. Gerretsen, Lectures on the theory of functions of a complex varianle, Vol. I, P. Noordhoff, Groningen 1960 (Luigi Merli)
* Ettore Casari, Lineamenti di logica matematica, Feltrinelli, Milano, 1960 (Alberto Ranzi)
* L. J. Slater, Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, 1960 (F. G. Tricomi)
* A. N. Rychonoff, A. A. Samrski, Differentialgleichungen der Mathematischen Physics, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959, (C. Agostinelli)
* D. F. Lawden, A course in applied Mathematics, The English Universities Press LTD, London, 1960 (C. Agostinelli)
* N. M. Günter, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der Mathematischen Physik, G. B. Teubner, Leipzig, 1957 (C. Agostinelli)
* Jean-Pierre Vigier, Structure des micro-objets dans l'interpétation causale de la théorie des quanta, Gauthier-Villars, Paris, 1956 (Antonio Pignedoli)
* H. Hermes, H. Scholz, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band I, Heft I, Teil I, B. G. Teubner, Leipzig (Pietro Lingua)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.3, p. 431–444.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_3_431_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

RECENSIONI

G. SANSONE - J. GERRETSEN, *Lectures on the theory of functions of a complex variable*, vol. I, (P. Noordhoff, Groningen, 1960), pp. 488, $ 13.

Nel 1947 la letteratura matematica italiana si arricchiva di una nuova opera che subito si imponeva all'attenzione degli studiosi: le « Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa », di G. SANSONE, edite dalla « Cedam » in veste litografica per le difficoltà editoriali di quei critici tempi. Il successo fu così grande che, esauritasi immediatamente la prima edizione, ne seguì subito una seconda e, finalmente, nel 1955, una bella edizione a stampa che ha ottenuto vasta risonanza anche oltre i confini del nostro Paese.

Appaiono ora, in una splendida veste tipografica, queste « Lectures » di G. SANSONE e J. GERRETSEN che si propongono di rendere più agevole la conoscenza dell'opera anche ai lettori di lingua inglese. Non si tratta però di una semplice traduzione del testo italiano di G. SANSONE, come forse la sola lettura del titolo inglese potrebbe indurre a credere: l'opera è da considerarsi invece come una nuova rielaborata edizione nella quali gli AA. hanno fuso armonicamente gusti e tendenze di scuole appartenenti a paesi diversi, raggiungendo una organicità di esposizione tale da permettere al lettore di trovare raccolti, già fin da questo primo volume, argomenti che vanno dalle classiche teorie generali sulle funzioni di variabile complessa, alle loro più svariate ed utili applicazioni e di addentrarsi in questo vastissimo campo con la sola conoscenza dell'analisi elementare.

Faremo ora una breve esposizione del contenuto degli otto capitoli di cui consta il volume.

Il primo di essi ha carattere introduttivo e contiene le definizioni e le proprietà fondamentali relative alle funzioni olomorfe, i teoremi di ABEL e di TAUBER sulle serie di potenze e lo studio delle funzioni elementari.

Il secondo capitolo è dedicato in gran parte al teorema integrale di CAUCHY la cui dimostrazione è ottenuta in maniera molto elegante con l'uso della nozione topologica del « numero indice ». La dimostrazione non è fatta in condizioni le più generali che avrebbero richiesto un approfondimento troppo grande e, al lettore, la conoscenza di strumenti più elevati dell'analisi; comunque, per le applicazioni, le ipotesi richieste nell'enunciato sono più che sufficienti per una trattazione rigorosa degli argomenti successivi. Seguono le classiche conseguenze più importanti di tale teorema fondamentale, che culminano nel teorema di VITALI sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni olomorfe.

Argomento principale del terzo capitolo è lo studio delle singolarità isolate delle funzioni olomorfe. In esso trovano ampio approfondimento la teoria dei residui e le loro numerosissime applicazioni. Seguono i classici teoremi di ROUCHÉ e di HURWITZ e, come applicazione, alcune generalizzazioni delle serie di TAYLOR e di LAURENT che permettono di giungere rapidamente ai polinomi di LEGENDRE, con relativo studio di alcune delle loro principali proprietà.

Al problema della fattorizzazione delle trascendenti intere, che viene risolto col classico metodo dei fattori primari di WEIERSTRASS e ai teoremi di MITTAG-LEFFLER, è dedicato il quarto capitolo. Come applicazione ha inizio lo studio di alcune classiche funzioni trascendenti quali la gamma euleriana, la psi di GAUSS, la funzione di BINET, la funzione zeta e la $\wp$ di WEIERSTRASS che trovano un approfondito esame delle loro proprietà fondamentali anche nei capitoli successivi.

Il quinto capitolo è infatti interamente dedicato alle funzioni ellittiche e alle loro più significative proprietà. Così trova posto in esso lo studio completo della $\wp$ di WEIERSTRASS di cui viene data l'equazione differenziale, i teoremi di addizione e la formula di bisezione; della funzione theta di JACOBI; della funzione σ di WEIERSTRASS; delle funzioni jacobiane seno amplitudine, coseno amplitudine e delta amplitudine e dei loro legami con le altre funzioni ellittiche. La trattazione è veramente notevole e permette al lettore di acquisire una conoscenza molto approfondita di tale interessante argomento.

Il sesto capitolo contiene un'altra elegante applicazione della teoria generale: lo studio delle trascendenti intere di ordine finito con i teoremi di HADAMARD, BOREL-CARATHEODORY, PICARD e PHRAGMEN. Chiude il capitolo l'analisi della funzione di MITTAG-LEFFLER e del suo comportamento asintotico.

Alla serie di DIRICHLET e al caso particolare della zeta di RIEMANN è dedicato il settimo capitolo. Viene molto studiata la funzione zeta generalizzata e la sua rappresentabilità mediante l'integrale di LAPLACE. È poi risolto, con estrema eleganza, alla maniera classica, facendo uso delle proprietà della zeta di RIEMANN il famoso problema sui numeri primi relativo alla valutazione della funzione $\pi(x)$. denotante il numero dei numeri primi che non superano un assegnato numero x non negativo. Bisogna convenire con gli AA. che la dimostrazione classica conserva ancor oggi inalterata la sua grande bellezza, anche se è pur vero che ora possediamo dimostrazioni elementari, ma complicate, che evitano l'uso delle funzioni trascendenti.

Argomento principale dell'ultimo capitolo è la sommabilità delle serie di potenze fuori del cerchio di convergenza con il metodo di BOREL e la generalizzazione di MITTAG-LEFFLER. Numerosissime e tutte interessanti sono le applicazioni. L'ultima parte del capitolo, infine, è dedicata agli sviluppi asintotici ottenuti col metodo del colle, con molti notevoli esempi.

Anche da questa rapida e forzatamente incompleta sintesi del contenuto del volume, appare chiara la vastità e l'importanza degli argomenti trattati. Concludiamo con l'augurarci che veda presto la luce l'annunciato secondo volume, a completamento di quest'opera veramente significativa.

LUIGI MERLI

ETTORE CASARI: *Lineamenti di logica matematica*, Milano, Feltrinelli, 1960, pp. 323, L. 5000.

Il libro del Casari è il primo trattato istituzionale di logica simbolica (limitato alla logica estensionale) in lingua italiana e di autore italiano. Preceduto di qualche anno dall'opera del Pasquinelli (*Introduzione alla logica simbolica*, Torino, 1957), che aveva carattere di introduzione alla problematica generale della logica moderna, esso riempie una grave lacuna nella cultura scientifica e filosofica italiana, rimasta purtroppo arretrata, in questo campo, rispetto a quella dei maggiori paesi europei e americani.

L'A. si è formato all'Università di Münster seguendo le lezioni di Hermes e Ackermann, e da questo insegnamento deriva l'impostazione generale dell'opera articolata sulla distinzione, a tutti i livelli della logica, del metodo semantico da quello sintattico. Il testo si divide in una introduzione e in tre parti, corrispondenti alla divisione ormai tradizionale della materia: logica degli enunciati (o delle proposizioni), logica dei predicati (o delle funzioni), logica dei predicati allargata. Il sistema degli assiomi e delle regole è quello di Hilbert e Bernays.

L'A. comincia col definire i metodi fondamentali della derivazione e della conseguenza. La possibilità di formulare una teoria è creata dalla istituzione di un linguaggio che rappresenti un certo universo, che sia, cioè, « interpretato »; ma ogni teoria, per essere tale, deve poter isolare alcune delle espressioni del suo linguaggio caratterizzandole come « vere » o meglio, « giuste » — come preferisce il Casari, dato che il termine « vero » ha assunto un significato specifico nell'interpretazione semantica. Le teorie deduttive impiegano due diverse procedure per definire le espressioni « giuste »: il metodo della derivazione e il metodo della conseguenza. Nonostante la convinzione di diversi cultori delle scienze deduttive particolari che le due procedure si equivalgano, esse differiscono profondamente. La definizione di derivabilità si basa sul concetto di regola effettiva. In ogni linguaggio una espressione deriva da altre (dette assunzioni iniziali), mediante una successione di espressioni, di cui ogni elemento è una delle assunzioni, oppure un'espressione ottenuta da elementi precedenti per l'applicazione di una delle regole del linguaggio. (La derivabilità diventa « dimostrabilità » quando l'insieme delle assunzioni è l'insieme vuoto). La regola è una pura precisazione per eseguire una certa trasformazione di un numero finito di complessi segnici: essa è indipendente da ogni eventuale interpretazione dei segni e permette anche a chi ignora la materia su cui verte di verificare se essa è stata correttamente applicata o no e se una certa successione di espressioni è o no una derivazione di una certa espressione dalle assunzioni di un linguaggio dato. Tali caratteristiche di effettiva verificabilità e di meccanicità presenti nel metodo della derivazione mancano completamente nel metodo della conseguenza. Questa sussiste quando una interpretazione che trasformi le premesse di un argomento deduttivo in enunciati veri intorno a un certo universo, ovvero una interpretazione che sia « modello » delle premesse, trasformi in enunciato vero anche la conclusione, ovvero sia anche modello della conclusione. (La conseguenza diventa « validità » quando l'insieme delle premesse è l'insieme vuoto). Non è possibile verificare meccanicamente l'esistenza di una relazione di conseguenza mediante la semplice applicazione di regole effettive, ma occorre accertare l'esistenza di un « nesso razionale » tra certe espressioni mediante un'interpretazione che determini un rapporto tra le espressioni e l'universo che esse rappresentano. Sostenere la coincidenza dei due concetti di derivazione e di conseguenza, di una definizione sintattica e di una definizione semantica delle espressioni giuste, equivale a sostenere la riproducibilità meccanica dei nessi razionali — cosa che risulterà non sempre possibile.

È appunto il problema della precisazione del concetto di conseguenza e della possibilità di una sua trattazione in termini di derivazione, che costituisce il perno dell'opera del Casari e il criterio per l'ordinamento di tutta la logica matematica.

Il problema fondamentale dei rapporti tra i concetti sintattici e semantici si scinde nel problema della « validità » e nel problema della « completezza ». Il primo consiste nel dimostrare che, se una certa espressione H è derivabile da un insieme M, allora H è anche una conseguenza di M (e, che se H è dimostrabile, è anche valida); il secondo, nel dimostrare che, se H è una conseguenza di M, allora H è derivabile da M (e, che se H è valida, è anche dimostrabile). L'equivalenza tra i due concetti è dimostrabile nella logica degli enunciati e in quella dei predicati; quindi, a questi livelli, il metodo semantico, o della costruzione di un « linguaggio formalizzato », è rispecchiato perfettamente dal metodo sintattico, o della costruzione di un

« calcolo »: esiste cioè sempre — per usare i termini del Casari — una macchina, il calcolo, capace di compiere l'operazione del trarre conseguenze, del determinare nessi razionali tra proposizioni. « Mentre il teorema di validità ci assicura che tutto quanto è dimostrabile (o derivabile) è valido (o è una conseguenza), e ci dice cioè, in sostanza che la nostra macchina è stata costruita 'bene' in quanto non potrà mai fare altro che cose 'ragionevoli', quello di completezza, assicurandoci che tutto quanto è valido (o è una conseguenza) è anche dimostrabile (o derivabile), ci dice, in sostanza, che la nostra macchina è in grado di fare tutte le cose 'ragionevoli' » (p. 114).

Quando, però, si passa dalla logica dei predicati di primo ordine — che ammette solo la quantificazione delle variabili soggettive — alla logica dei predicati di secondo ordine — che ammette anche la quantificazione delle variabili predicative — l'equivalenza tra derivabilità e conseguenza non è più sostenibile. La logica dei predicati di secondo ordine costituisce un sistema, in cui è possibile la formulazione della teoria dei numeri: ora, per tali sistemi, Gödel dimostrò, in un famoso teorema, l'impossibilità della completezza, cioè la mancanza di un algoritmo capace di enumerare le espressioni valide. All'interno di questi sistemi esiste sempre una espressione affermante la propria inderivabilità: pur essendo — in base al particolare procedimento di « aritmetizzazione » usato dal Gödel — aritmeticamente valida, essa non è nè derivabile nè refutabile. Pertanto è possibile dimostrare, nella logica dei predicati di secondo ordine, un teorema di incompletezza, secondo il quale esiste sempre una espressione di cui si può affermare nello stesso tempo che è valida e non è dimostrabile. L'A., pur non riportando la dimostrazione di questo teorema, ne dà una breve illustrazione e ne indica il significato particolare rispetto al problema della meccanizzazione del metodo della conseguenza. Il teorema di incompletezza può essere interpretato come « l'affermazione che *non* esiste alcuna macchina capace di sostituire perfettamente l'uomo nella misura in cui egli si propone di trarre conseguenze da un certo insieme di premesse ». Il termine « macchina » va naturalmente preso nel senso preciso e limitato datogli dal Casari: uno strumento, cioè, in grado di compiere le operazioni di derivazione mediante l'impiego degli assiomi e delle regole effettive di un certo linguaggio.

Naturalmente l'incompletezza non esclude che sia possibile istituire un sistema assiomatico abbastanza forte da bastare per le principali applicazioni. Tuttavia alcuni studiosi hanno cercato di superare l'irriducibilità dei concetti semantici a quelli sintattici, modificando adeguatamente i concetti semantici. Recentemente, Henkin ha dimostrato, utilizzando precedenti ricerche di Skolem, che, con l'allargare la classe dei modelli considerata nei sistemi di secondo ordine, l'insieme delle espressioni valide viene a coincidere con l'insieme delle espressioni dimostrabili. Introducendo il concetto di modello « non standard » o « irregolare », Henkin è riuscito a estendere il teorema di completezza alla logica dei predicati di secondo ordine. Si può dire che tale procedura consente di ovviare alle difficoltà (rispetto alla completezza) derivanti dall'introduzione della quantificazione delle variabili predicative e ristabilisce, entro questi limiti, l'equivalenza tra concetti semantici e sintattici.

I teoremi di validità e di completezza ci permettono di ottenere successivamente tutte le espressioni valide. Ci si può chiedere, però, se è possibile avere anche un metodo per stabilire meccanicamente se una certa espressione è valida o no. Questo problema è noto come problema della « decisione ». Per la logica degli enunciati la soluzione è positiva. Infatti, mediante le tavole di verità si può sempre stabilire, in un numero finito di passi, se una qualunque espressione è valida o no. Inoltre, i teoremi delle forme normali congiuntive e alternative dimostrano non solo che, data una qualunque espressione, esiste un'altra espressione in forma normale congiuntiva o alternativa ad essa equivalente, ma anche che è possibile *costruire*, a partire dall'espressione data, una forma normale corrispondente, e che è sempre possibile decidere, per ogni espressione, attraverso un suo sviluppo in forma normale congiuntiva, se essa è valida o no. Ne consegue che: « ogni problema di una teoria deduttiva avente un numero finito di assiomi, qualora dipenda unicamente dalla struttura enunciativa, ammette una soluzione puramente meccanica » (p. 142). Negli scritti di Leibniz si esprimeva la fiducia nella scoperta di una *ars judicandi*, di un metodo universale di decisione per risolvere tutte le questioni scientifiche. Ma nella logica dei predicati il teorema di indecidibilità di Church afferma l'impossibilità dell'esistenza di un procedimento generale di decisione: il sogno di Leibniz non potrà mai divenire realtà. Poichè il teorema di completezza dimostra l'esistenza di un algoritmo capace di enumerare tutte le espressioni valide, basterebbe poter dimostrare l'esistenza di un altro algoritmo capace di enumerare le espressioni non-valide per avere un procedimento di decisione: ma è proprio la possibilità di costruire un tale algoritmo che è negata dal teorema di Church.

L'incompletezza e l'indecidibilità sono tra i risultati più sconcertanti e rivoluzionari della logica contemporanea. Essi rendono impossibile una assiomatizzazione radicale delle matematiche, come quella proposta nel programma di Hilbert. Ciò non significa, tuttavia, la rinuncia pura e semplice alla assiomatizzazione, ma la rinuncia al sistema totale e il riconoscimento delle limitazioni interne ai sistemi formali e della loro inevitabile molteplicità.

Anche se nella logica degli enunciati, la trattazione del problema della completezza, sussistendo un procedimento di decisione, ha limitata rilevanza, nondimeno essa permette all'A. di ordinare le tre sezioni della logica con lo stesso metodo e di dimostrarvi i medesimi teoremi, pur con diverse, ma equivalenti formulazioni; ne risulta un quadro estremamente chiaro dei nessi che legano tra di loro le varie parti della logica e una suggestiva visione unitaria, in base a un solo grande problema, di tutti i problemi particolari.

Abbiamo cercato di dare un'idea del volume del Casari soffermandoci sulle sue linee generali; il lettore esperto non mancherà di apprezzare anche particolari interessanti, come l'originalità di alcune dimostrazioni. Ma il grande pregio di questo libro è costituito dalla ricchezza del suo contenuto, dalla limpida sistematicità e dal rigore della sua articolazione nonché, conseguentemente, dalla sua sicura efficienza come strumento tecnico per affrontare e intendere recenti sviluppi delle dottrine matematiche tradizionali e di nuove branche della matematica moderna, come l'aritmetica ricorsiva e l'analisi ricorsiva, le algebre reticolari, il metodo metamatematico e le sue applicazioni all'algebra classica, la teoria assiomatica degli insiemi. Non resta che augurare all'opera del Casari la massima diffusione fra gli studiosi e nelle università, dove potrà portare un notevole contributo all'auspicato sviluppo degli studi di logica matematica in Italia.

Alberto Ranzi

L. J. Slater, *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1960; X + 247 pp.; 65 s.

Le funzioni ipergeometriche confluenti sono, in senso largo, tutte le soluzioni di equazioni differenziali, lineari, del secondo ordine, « totalmente fuchsiane », dotate di *tre* punti singolari, di cui due siano venuti a *confluire* (all'infinito) generando così una singolarità essenziale.

Poichè l'equazione in parola può assumere più forme e le sue soluzioni da considerarsi possono *standardizzarsi* in diverse maniere, è chiaro che possono aversi diverse specie di funzioni « confluenti », che presentano, le une rispetto alle altre, questo o quel vantaggio. In epoca recente ma non recentissima, sono state prevalentemente considerate le funzioni $M_{k,m}$ e $W_{k,m}$ di WHITTAKER, che presentano però vari inconvenienti (principalmente quello di essere entrambe non uniformi) e non hanno perciò incontrato molto favore. Per rimediarvi, chi scrive ha rimesso in primo piano la vecchia funzione ipergeometrica ${}_1F_1$ di KUMMER (che è invece uniforme), affiancando ad essa (da lui denotata con Φ) una opportuna, seconda soluzione Ψ della medesima equazione differenziale cui soddisfa Φ.

L'autrice del bel volume in esame segue sostanzialmente questo suggerimento e la generale impostazione della teoria data dallo scrivente, ma, accanto alle due funzioni Φ e Ψ (per cui l'A. usa i simboli ${}_1F_1$ ed U), considera ampiamente anche le due funzioni $M_{k,m}$ e $W_{k,m}$ di WHITTAKER, estendendo ad esse molte delle considerazioni e delle formule del recensore relative a Φ e Ψ. Ciò costituisce senza dubbio un vantaggio perchè nella letteratura s'incontrano ancora lavori usanti le funzioni di WHITTAKER (nonchè le cosiddette *Coulomb wave functions* ecc.) ma crea inevitabilmente un po' di confusione, sì che il volume in esame non sembra particolarmente raccomandabile per un primo studio dell'argomento. Potrà invece prestare buoni servigi ad un lettore già un po' esperto, che non si smarrirà nel groviglio di formule nè si lascerà fuorviare da alcune espressioni non del tutto ortodosse dal punto di vista della teoria delle funzioni analitiche. Soprattutto poi il libro in esame potrà essere utile a chi si propone dei calcoli numerici su funzioni confluenti, perchè vi troverà utili indicazioni pratiche (in parte, credo, inedite) sul come migliorare l'approssimazione di certe serie asintotiche, sul calcolo numerico degli *zeri*, ecc.

Ad ogni modo, dal punto di vista numerico, la cosa più notevole sono le ampie tabelle numeriche che occupano tutta la seconda metà del libro. Finora non si aveva invero alcuna tavola numerica sistematica della funzione ${}_1F_1(a;\ b;\ x)$ di KUMMER, ma solo alcune tavole occasionali (sparse qua e là), riferentesi a particolari scelte dei parametri a e b. Qui abbiamo invece (oltre ad una tabella di *zeri* e una di valori di ${}_1F_1$ per $x = 1$) una sistematica tabella di valori (ad 8 cifre) di ${}_1F_1(a;\ b;\ x)$ negli intervalli

$$a = -1{,}0(0{,}1)1{,}0; \qquad b = 0{,}1(0{,}1)1{,}0; \qquad x = 0{,}1(0{,}1)10{,}0$$

che occupa da sola ben 100 pagine del volume.

Dubito però che questa tabella, per quanto preziosa, possa modificare la diffusa opinione circa l'impossibilità pratica d'intabulare funzioni di tre (o più) variabili: nel nostro caso a, b e x. Invero, nonostante la considerevole ampiezza della tavola in discorso, vi sono tali sbalzi passando da un valore all'altro da rendere disperato ogni tentativo d'interpolazione! Tuttavia una tavola come questa è lungi dall'essere inutile, anzitutto perchè serve a dare una prima idea dell'andamento della funzione nella regione considerata. In secondo luogo, essa costituisce la base indispensabile per l'applicazione del moderno metodo di calcolo di funzioni mediante formule d'approssimazione « ritoccate » (su cui non posso qui dilungarmi), che forse fornisce la sola via per risolvere soddisfacentemente difficili problemi d'intabulazione quale quello offerto dalle funzioni confluenti.

F. G. TRICOMI

A. N. TYCHONOFF - A. A. SAMARSKI, *Differentialgleichungen der Mathematischen Physik* (Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959).

È la traduzione tedesca dell'opera dei ben noti autori russi, pubblicata a Mosca nel 1953 e che aveva tratto origine dalle lezioni che A. TYCHONOFF aveva tenuto nella Facoltà di Fisica della Università di Mosca.

In essa, partendo dalla considerazione di alcuni problemi centrali della Fisica matematica, si perviene alla determinazione dei tipi fondamentali di equazioni differenziali che dominano questo ramo della Scienza, mostrando nello stesso tempo come problemi fisici differenti risultano strettamente collegati e caratterizzati da analoghe equazioni, con proprietà generali in comune. Viene inoltre messo in rilievo come la trattazione matematica di un dato fenomeno fisico è diversa, secondo la fase del processo che di esso viene analizzato.

La molteplicità dei problemi trattati, gli aspetti diversi secondo cui vengono considerati, e i metodi esposti per la loro risoluzione, rendono questo libro particolarmente utile ai cultori della Fisica matematica, sebbene non si possa considerare un vero trattato di Fisica matematica, come riconoscono gli stessi autori, mancando uno sviluppo organico e completo delle teorie che dominano la Fisica matematica, come la teoria del potenziale, l'elettrostatica, l'elettrodinamica, la meccanica dei fluidi, l'elasticità, la propagazione del calore, ecc.

Il volume contiene ancora una parte della materia che ordinariamente viene trattata nelle lezioni sopra i metodi della Fisica matematica, e sono indicati anche i metodi di integrazione approssimata delle equazioni differenziali.

Esso si compone di sette capitoli, ciascuno dei quali comincia ordinariamente con la considerazione di alcuni semplici problemi fisici che conducono a un determinato tipo di equazione differenziale e si chiude con esercizi, o con applicazioni relative a problemi classici di Fisica matematica.

Nel capitolo I vien fatta una classificazione delle equazioni differenziali parziali del 2° ordine, con due o con più variabili indipendenti, e nel successivo capitolo II vengono trattate le equazioni differenziali iperboliche, partendo dalla considerazione delle vibrazioni trasversali di una corda, delle oscillazioni elettriche in un circuito, delle vibrazioni trasversali di una membrana, ecc. Si passa quindi al metodo di D'ALEMBERT per l'equazione delle onde, all'integrazione colla separazione delle variabili, e alla considerazione dei problemi dei valori al contorno con condizioni stazionarie o variabili col tempo; all'analisi di soluzioni più generali, con la definizione della funzione di RIEMANN e la sua interpretazione fisica; infine ad applicazioni relative alle vibrazioni delle corde con masse collegate, all'equazione della gas-dinamica e alla teoria delle onde d'urto.

Il capitolo III è dedicato alle equazioni differenziali paraboliche, alle quali si perviene dopo avere considerato la conduzione lineare del calore e poi quella spaziale. Vengono quindi formulate le condizioni ai limiti, e viene stabilito il teorema di unicità. Si esamina il metodo della separazione delle variabili, si definisce la funzione di GREEN e si considerano i problemi dei valori al contorno. Applicazioni sono fatte per la propagazione del calore nel senso rettilineo indefinito e nel senso di una semiretta.

Nel capitolo IV è sviluppata la teoria delle equazioni differenziali ellittiche, considerando inizialmente alcuni problemi di Fisica matematica che conducono all'equazione di LAPLACE e quindi la trasformazione di questa equazione in coordinate curvilinee ortogonali, la determinazione di soluzioni particolari, con cenni sulle funzioni armoniche e sulle funzioni analitiche di una variabile complessa. Vengono esposte le proprietà generali delle funzioni armoniche e considerati i problemi dei valori al contorno col metodo della separazione delle variabili, con applicazione al caso del cerchio. Vien definita quindi la funzione di GREEN per l'equazione di LAPLACE, dimostrandone le proprietà fondamentali e dando la sua espressione nel caso del cerchio, della sfera e del semispazio. Un paragrafo di questo capitolo è ancora dedicato alla teoria del potenziale newtoniano e del potenziale logaritimico, alla considerazione del potenziale di superficie e del potenziale di doppio strato, con le loro proprietà e la loro applicazione alla risoluzione di problemi dei valori al contorno. Applicazioni finali di questo capitolo contengono fra l'altro cenni sulle funzioni biarmoniche e la loro rappresentazione mediante funzioni armoniche.

Nel capitolo V si ritorna al problema della propagazione per onde nello spazio, si derivano le equazioni di KIRCHHOFF, le equazioni della elasticità e quelle del campo elettromagnetico.

Nel capitolo VI si riprendono invece i problemi della diffusione e della conduzione del calore in un mezzo limitato o illimitato, con la loro risoluzione per mezzo della separazione delle variabili o per mezzo della funzione di GREEN.

Infine il capitolo VII è una continuazione sulle equazioni differenziali ellittiche, e in esso vengono analizzati alcuni problemi fondamentali che conducono all'equazione differenziale $\Delta v + cv = 0$, oppure all'equazione non omogenea $\Delta v + cv = f$. Alla fine si trovano applicazioni sulle guide d'onda, sulle vibrazioni elettromagnetiche in un risuonatore cavo, sullo skineffekt e sulla propagazione di radioonde sopra la superficie terrestre.

Ai suddetti capitoli fa seguito un'Appendice sulle *Funzioni speciali*, suddivisa in tre parti. La parte I è relativa alle *funzioni cilindriche* con i diversi tipi di *funzioni di Bessel*, la loro espressone in serie di potenze, la rappresentazione integrale e la rappresentazione asintotica. Seguono nella parte II le *funzioni sferiche*, incominciando dai *polinomi di Legendre*, con la loro generazione, l'equazione cui soddisfano, le proprietà di ortogonalità, la considerazione dei loro aggiunti (funzione di FERRERS), ecc. Alle funzioni sferiche propriamente dette, o funzioni di Laplace, si perviene partendo dai polinomi armonici. Se ne dànno quindi le proprietà generali, si arriva allo sviluppo in serie di funzioni sferiche, ad alcuni problemi relativi alla sfera, quali la polarizzazione in un campo omogeneo, le vibrazioni e i problemi al contorno per il campo esterno.

Nella parte III infine sono considerati i polinomi di TSCHEBYSCHEFF-HERMITE e di TSCHEBYSCHEFF-LAGUERRE, con semplici applicazioni all'equazione di SCHRÖDINGER, all'oscillatore armonico e al movimento di un elettrone in un campo coulombiano.

Il volume, che riempie 660 pagine in un'accurata veste tipografica, contiene ancora alcune tavole relative ai valori dell'integrale degli errori e delle funzioni di Bessel e si chiude con una scelta bibliografica delle pubblicazioni più importanti relative agli argomenti trattati.

C. AGOSTINELLI

D. F. LAWDEN, *A Course in applied Mathematics*, (The English Universities Press LTD, London, 1960).

Questo corso di Matematiche applicate, destinato principalmente agli studenti che, secondo l'ordinamento inglese, seguono il primo periodo dei corsi di matematica delle università, si compone di quattro parti. Le parti I e II sono dedicate alla *Dinamica* e alla *Statica*, e nel loro insieme costituiscono un breve corso di Meccanica razionale esposto in maniera facile ed elementare, con deduzione di leggi e teoremi basata, più che su un'analisi approfondita dei principi, sulla interpretazione dei risultati di opportuni esempi. E a questo spirito sono anche improntate le rimanenti parti dell'opera.

La *Dinamica* comprende: lo studio del moto di una particella, dei corpi rigidi piani e dei corpi rigidi in tre dimensioni, considerazioni sul teorema del momento della quantità di moto, le equazioni di Eulero sul moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso e le equazioni di Lagrange. È da segnalare un breve paragrafo sul moto di un corpo di massa variabile, argomento di attualità che interessa il movimento di un razzo.

Diverse lacune, come la nozione di sistemi olonomi, come il Principio di D'Alembert, che è un principio fondamentale della Dinamica, fanno supporre che questi argomenti facciano parte di corsi di natura più elevata. Così pure raramente si riscontra qualche riferimento storico e i nomi di LEONARDO e di GALILEI sono completamente ignorati, soprattutto quando si parla delle tre leggi fondamentali della dinamica del punto, che vanno sotto il nome di leggi di NEWTON.

La *Statica* viene trattata come un caso particolare della dinamica e solo in essa vien fatto un cenno al *principio dei lavori virtuali*, che da LAGRANGE fu, come si sa, posto a base di tutta la Meccanica. In questa parte vengono anche considerati i sistemi di forze equivalenti, è definito il centro di un sistema di forze parallele, e sono definite le forze d'inerzia e le forze centrifughe, concetti che interessano particolarmente la Dinamica. Della Statica fa parte anche un capitolo relativo alla deformazione di un corpo elastico, limitato all'analisi delle deformazioni e degli sforzi e alle relazioni che legano le componenti dello *stress* alle componenti dello *strain*, con applicazioni all'equilibrio di una lastra emisferica, di un involucro cilindrico e di un disco rotante.

La parte III è relativa alla *teoria dei campi* e comprende: nozioni sulla teoria newtoniana dell'attrazione gravitazionale, con cenni sulle funzioni armoniche, la teoria della polarizzazione dei mezzi dielettrici, le correnti elettriche stazionarie, l'elettromagnetismo con le equazioni di MAXWELL e brevi cenni sulle onde elettromagnetiche.

La parte IV è infine dedicata all'*idromeccanica*, con un primo capitolo relativo all'equilibrio di un fluido in un campo gravitazionale generale. Segue lo studio della corrente unidimensionale di un fluido perfetto in un tubo liscio, con applicazione al problema del razzo motore, e successivamente vengono stabilite le equazioni euleriane del movimento di un fluido perfetto e studiate le caratteristiche essenziali di correnti irrotazionali e di correnti dovute a vortici lineari.

Il volume è ricco di esempi applicativi e illustrativi felicemente scelti ed è corredato di numerosi esercizi, molti dei quali sono stati tratti dalle pubblicazioni di diversi corpi universitari del Regno Unito.

C. AGOSTINELLI

N. M. GÜNTER, *Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der Mathematischen Physik.* (G. B. Teubner, Leipzig, 1957).

Questo volume di 341 pagine è sostanzialmente una traduzione tedesca, redatta dal Dr. J. THOMAS di Potsdam, della originaria opera di GÜNTER, l'esimio professore di Leningrado, edita nelle collezioni Borel a Parigi nel 1934, dal titolo: *La théorie du potential et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, successivamente completata e ampliata in edizione russa da W. I. SMIRNOW.

L'opera, che per il suo contenuto, il rigore e la precisione con cui gli argomenti sono trattati sta a fianco dell'analogo trattato di O. D. KELLOGG: *Fondations of Potential Theory.* (Berlino, 1929), è composta di cinque capitoli, il primo dei quali contiene delle definizioni e considerazioni relative ai dominii e loro confini, alle funzioni in essi definite, alla loro differenziazione e integrazione, alle funzioni armoniche, alle identità di Green e agli integrali di Gauss.

Nel capitolo secondo è svolta la teoria del potenziale di semplice strato e di doppio strato e quindi del potenziale newtoniano di una distribuzione di masse in un volume, con la dimostrazione delle proprietà fondamentali di questi tipi di potenzali, circa la loro derivabilità, la continuità e le discontinuità. In questa trattazione è stato tratto particolare profitto dalla considerazione di speciali classi $H(l, A, \lambda)$ di funzioni $f(x, y, z)$, limitate in un certo dominio e che in questo dominio posseggano derivate limitate e connue fino all'ordine l.

Nel successivo terzo capitolo viene considerato il problema di Neumann interno ed esterno, relativo a domini limitati da una o più superficie soddisfacenti alle condizioni dette di Ljapunow, e viene data la soluzione effettiva riducendo la questione alla determinazione di un potenziale di semplice strato.

Analogamente nel quarto capitolo è trattata la risoluzione del problema di Dirichlet che vien ridotto alla determinazione di un potenziale di doppio strato e quindi alla risoluzione di un'equazione integrale in cui è incognita la densità della distribuzione.

Nel quinto capitolo infine viene data la risoluzione del problema di Dirichlet (interno ed esterno), per mezzo della funzione di Green, e quella del problema di Neumann per mezzo della funzione di Neumann.

Applicazioni della funzione di Green vengono quindi fatte per la risoluzione del problema delle temperature stazionarie, dei problemi relativi alla equazione $\Delta u = Lu + K$, per l'integrazione dell'equazione delle onde e della equazione del calore nel caso delle temperature variabili col tempo.

Il volume è completato da quattro appendici tre delle quali riguardano alcune proposizioni di Ljapunow relative alla prima derivazione del potenziale di semplice strato, alla derivazione normale del potenziale di doppio strato e alla derivata seconda del potenziale newtoniano. L'ultima è relativa ai valori del potenziale di doppio strato e della derivata normale del potenziale di semplice strato sopra una superficie appartenente a una speciale classe detta L_k.

L'opera si chiude con una breve biografia di GÜNTER, contenente una rassegna dei suoi lavori, scritta da W. I. SMIRNOW ed S. L. SOBOLEV.

C. AGOSTINELLI

JEAN-PIERRE VIGIER, *Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta*, Gauthier-Villars, Paris, 1956, vol. in VIII, di pagg. XI-192 con 26 figure, prezzo 3000 franchi.

Nella interpretazione delle soluzioni delle equazioni della Meccanica quantistica, si è pervenuti, come si sa, ad una revisione delle idee filosofiche sulla esistenza di oggetti non osservati e, perfino, ad una revisione dei princìpî della Logica, giungendo fino alle fondamenta profonde della Teoria della conoscenza. (Per fissare le idee su tale fatto, basta tener presente l'evoluzione per cui all'uso della Logica a due valori, *vero* e *falso*, è subentrato, con HANS REICHENBACH, per l'interpretazione filosofica della Meccanica quantistica, l'uso di una Logica a tre valori, *vero, falso* e *indeterminato*, che non è « sconosciuto » ma « conosciuto come non determinato »). Si è raggiunto, anzi, uno stadio che si presenta in autentica antitesi coi concetti tradizionali di *conoscenza* e di *realtà*. Ciò in funzione di quell'atteggiamento puramente *operativistico* che i fisici hanno, per così dire, assorbito dal pensiero positivistico ed, in particolare, da quello di AUGUSTO COMTE. Anzi va tenuto bene presente che l'atteggiamento operativistico dei fisici che hanno costruito la

Meccanica quantistica trova la sua spiegazione nel fatto che essi si erano formati in una atmosfera positivistica e che il Positivismo era loro apparso come il sistema filosofico più risonante con le esigenze della loro ricerca scientifica; ciò anche in virtù di quella loro ansia tutta tesa a stabilire una corrispondenza fra schemi matematici e fenomeni osservabili, senza preoccuparsi delle cose che dietro i fenomeni stanno. Tale è, per esempio, già la posizione di pensiero di scienziati come MACH e DUHEM, che sono da considerare nettamente come degli scienziati positivisti in posizione polemica.

Per questa via, anzi, pare che si possa affermare che se, per esempio con BRIDGMAN, si mette in discussione la validità della Matematica come schema conoscitivo del mondo fisico — per far questo basta affermare il carattere meramente postulazionale dei corpi di dottrina matematici stessi, con difficile connessione coi fatti della natura — della possibilità di conoscenza del mondo fisico non resta più nulla. Ne svaniscono, invero, ogni conoscenza anche fenomenologica ed ogni possibilità di scoperta di legami quantitativi fra enti aventi un qualche significato concreto. Vero è che tale pericolo, definitivo o finale, come possiamo chiamarlo, svanisce di fronte al fatto che la Matematica non è scienza soltanto e meramente postulazionale, ma intimamente connessa con istanze pratiche. Anzi in questo si è confortati dal pensiero di COURANT e ROBBINS, i quali considerano come una seria minaccia alla parte più vitale della scienza il pensare che « la Matematica sia soltanto un sistema di conclusioni tratte da un certo numero di definizioni e postulati soggetti alla sola condizione di non essere contraddittorî, ma, per il resto, creati dalla libera volontà del matematico ».

Per fermarci al livello del fenomenismo positivistico, il fatto cruciale da sottoporre ad esame profondo è che, a tale livello ed in una visione di tale tipo, pare si debba operare una rinuncia al « causalismo scientifico ». VON NEUMANN, nella sua indagine sui fondamenti della Meccanica quantistica, pensa che tutti i sistemi rappresentati da una stessa « funzione d'onda » siano identici e che, poichè essi non si evolvono nello stesso modo, non si possa più parlare di « causalismo » nella descrizione quantistica del mondo delle particelle elementari. Naturalmente, si presenta l'obiezione che la descrizione quantistica non sia l'ultima, e che si debba, o comunque si possa, ammettere l'esistenza, ad un livello più raffinato, di « variabili nascoste » atte a differenziare fra loro i sistemi aventi la stessa funzione d'onda e che sono capaci di evolversi in modo diverso, cioè atte a fare rinascere una visione causalistica; essendo tali variabili nascoste responsabili della ragione sufficiente a fare sì che il fatto *diversa evoluzione negli stati successivi* si inserisca nel fatto *identità, in senso operativo, dei sistemi considerati*.

VON NEUMANN, nel suo ormai celebre « teorema sulle variabili nascoste » nega la possibilità di trovare variabili di tale genere. La probabilità viene, dunque, considerata da VON NEUMANN stesso, da MAX BORN e dalla così detta Scuola di Copenaghen (BOHR - HEISENBERG - PAULI) come un elemento *irriducibile*, che limita *definitivamente* la nostra conoscenza della natura.

È ben noto come di fronte a tale interpretazione — che inizialmente trovò la perplessità di FERMI — stia, col suo carattere nettamente meccanicistico, il pensiero di ALBERTO EINSTEIN.

Vari sono attualmente gli atteggiamenti del pensiero fisico-teorico tesi ad una ricerca della ricostruzione delle posizioni « causalistiche » nella Meccanica dei micro-oggetti del mondo fisico. Un primo gruppo di ricerche è quello che si basa sulla concezione e considerazione delle già citate « variabili nascoste ». Tale concezione nasce da un processo per analogie del seguente tenore: la Meccanica statistica, allorchè studia, per esempio, il comportamento di un sistema di molecole, ammette che ciascun individuo del sistema segua una traiettoria univocamente determinata dalle mutue azioni cui esso individuo è sottoposto; traiettoria che si potrebbe caratterizzare dando le coordinate di posizione e la velocità dell'individuo considerato nella folla in agitazione. Ma le singole traiettorie in questione sono troppo numerose e complesse, e la Meccanica statistica rinuncia a caratterizzarle, ritenendosi soddisfatta dalla formulazione di certe ipotesi assai semplici sulle distribuzioni iniziali delle variabili di posizione e di velocità e dall'operare delle medie su tali variabili, medie legate a grandezze statistiche molto significative dal punto di vista fisico, come la temperatura e la pressione. Da tali grandezze medie viene dedotta l'evoluzione generale del sistema. Le leggi che ne conseguono hanno sì valore probabilistico, ma esse non distruggono il valore causalistico del mondo sotto-giacente, anche se non espressamente studiato.

Rispetto alle leggi probabilistiche, le variabili di posizione e di velocità si comportano, evidentemente, come *variabili nascoste*.

In maniera analoga, poichè le leggi della Meccanica dei quanta appaiono come leggi probabilistiche, appare più che lecito domandarsi se esse non risultino da medie prese su variabili nascoste sottostanti. Ciò tanto più quando si può osservare, con J. ULLMO, che il teorema di VON NEUMANN è bensì una prova della coerenza interna della assiomatica quantistica, ma non costituisce una proposizione di sbarramento, pregiudicante la ricerca di un'altra teoria, sotto-giacente, capace di descrivere le vicissitudini di un sistema individuale e di ritrovare, per sistemi di sistemi simili, gli stessi risultati della Meccanica quantistica. Ciò mediante un'altra struttura, allo stesso modo che la Termodinamica e la Meccanica statistica trovano gli stessi risultati, essendo peraltro teorie a struttura diversa, l'una operante nel continuo, l'altra nel discontinuo. Ma v'è di più. Secondo D. BOHM e D. I. BLOKHINZEV, il teorema di VON NEUMANN è attaccabile sul terreno stesso della assiomatica quantistica. Essi hanno mostrato, sostanzialmente, che il teorema in questione prova soltanto la impossibilità di introdurre un giuoco unico di variabili supplementari, relative al sistema, aderente ai risultati di tutte le previsioni connesse con tutte le osservazioni possibili; come se tutti tali risultati di esperienze future fossero già simultaneamente presenti nel sistema, e ciò contro la nozione stessa di *osservabile* scaturiente dalla inter-azione del sistema osservato e dell'apparecchio di misura (mutevole a seconda del sistema da osservare e del tipo di misura da compiere). E, come esempio contro la validità del teorema di VON NEUMANN, BOHM ha costruito una teoria della misura basata sulle variabili nascoste, relative al sistema ed all'apparecchio, convenientemente accoppiate, riuscendo a fare vedere come la teoria conduca alle stesse previsioni alle quali conduce la assiomatica quantistica. LUIGI DE BROGLIE poi aveva, com'è noto, a suo tempo proposto la teoria cosiddetta della « onda pilota », secondo la quale alle onde sono associati effettivamente corpuscoli « guidati » dalle medesime. BOHM ha ripreso tale teoria sviluppandola. Le variabili nascoste sono le variabili di posizione degli elementi corpuscolari del sistema, ed esse vanno associate alla funzione d'onda.

Particolare interesse hanno presentato le ricerche di DE BROGLIE e di VIGIER, tese allo scopo di costruire una « teoria della doppia soluzione » capace di una conciliazione delle posizioni probabilistiche con una visione oggettiva e « causale » del dualismo onde-corpuscoli, mediante il raggiungimento di una posizione nuova, in cui si pensa la struttura del sistema considerato come descritta da un'onda con singolarità. Ciò in contrasto con la concezione della assiomatica quantistica, nella quale la funzione d'onda presenta il carattere essenziale di non avere singolarità. Di fronte alla teoria della doppia soluzione, l'assiomatica quantistica fornisce una teoria *globalmente* equivalente alla teoria più profonda.

Il motivo conduttore del pensiero causalistico, di DE BROGLIE, di BOHM e di VIGIER è, in definitiva, anche negli sviluppi ulteriori ed, in particolare, nell'opera di VIGIER alla quale si riferisce la presente recensione, la concezione secondo la quale i micro-oggetti individuali del mondo fisico esistono *oggettivamente* ed *indipendentemente* da ogni osservazione, essendo sempre *tanto* onde *quanto* corpuscoli, quindi enti suscettibili di rappresentazione nel teatro spazio-temporale. Il determinismo nel comportamento di tali micro-oggetti presi singolarmente riappare attribuendo movimenti ben determinati alla loro parte corpuscolare. Su tali punti di vista si basa la notevole opera di VIGIER. Dopo una introduzione generale dedicata all'aspetto corpuscolare ed a quello ondulatorio dei microfenomeni, all'interpretazione probabilistica della Meccanica dei quanta ed al principio di complementarità, nonchè alle interpretazioni di SCHRÖDINGER e JANOSSY e « causale », viene un primo capitolo, con la definizione delle classi di movimenti associati, nella interpretazione nuova, all'aspetto corpuscolare dei micro-oggetti pensati come *puntuali*. Ciò viene fatto con riferimento alle equazioni di SCHRÖDINGER e KLEIN-GORDON nonchè a quelle relativistiche, per particelle dotate di spin, di DIRAC e KEMMER.

Nel secondo capitolo, l'aspetto corpuscolare del micro-oggetto viene considerato come « regione singolare » nell'ambito di una soluzione continua.

Nel terzo capitolo, si mostra la possibilità di trovare soluzioni particolari delle equazioni relativistiche tali che la *singolarità particella* sia associata ad un *campo proprio* esteso capace di sollecitarla a seguire le traiettorie « causali » descritte nel primo capitolo.

Il quarto capitolo è dedicato allo studio del comportamento degli insiemi di micro-oggetti dal punto di vista statistico. Tale comportamento è, sostanzialmente, il seguente. Supponendo che gli insiemi quantistici in uno stato assegnato siano definiti dall'identità dei loro campi proprî reali estesi φ, è possibile fare vedere che vale il *teorema stocastico fondamentale di* BOHM-VIGIER, del seguente tenore: « La conservazione del campo proprio esteso reale nell'ambito delle fluttuazioni generate dalle condizioni esterne obbliga le singolarità a distribuirsi con la densità $|\psi|^2 = k \cdot |\varphi|^2$, ($k =$ costante), prevista dalla interpretazione probabilistica. In altre parole, la densità degli aspetti corpuscolari di un insieme statistico reale di micro-oggetti tende necessariamente verso la distribuzione voluta dalla interpretazione probabilistica »

Nel capitolo quinto, si considerano i sistemi di N particelle inter-agenti. Partendo da una idea iniziale di L. DE BROGLIE, si fa vedere che i movimenti reali di N particelle, comportanti N aspetti corpuscolari ed N onde propagantisi nello spazio reale, possono essere rappresentati mediante un'onda fittizia nello spazio di configurazione, onda soddisfacente all'equazione di SCHRÖDINGER nello spazio di configurazione stesso. Il quadrato del modulo di tale funzione d'onda fittizia fornisce poi la ripartizione statistica voluta dalle interpretazione probabilistica.

Il sesto (ultimo) capitolo dell'opera è dedicato alla teoria della misura nel quadro della interpretazione causalistica. Si risponde a certe obiezioni di PAULI, dopo avere esposto i risultati ottenuti, in materia di teoria della misura, da BOHM. Secondo la posizione di BOHM, l'apparire di autovalori discreti dipende dalla inter-azione reale fra gli apparecchi di misura usati e il modello « causale » del micro-oggetto.

L'opera è dotata di una lucida prefazione di LUIGI DE BROGLIE, la quale la inquadra nel corpo di ricerche che, riallacciandosi, attraverso DE BROGLIE stesso, alla nota interpretazione idrodinamica di MADELUNG, vengono a BOHM e a VIGIER; e ne mette in rilievo la grande importanza nel campo della Fisica teorica. È di indubbio significato che l'opera stessa sia dedicata ad ALBERTO EINSTEIN, fisico « determinista », del quale sono riportate all'inizio alcune delle fondamentali affermazioni meccanicistiche a favore di una interpretazione oggettiva e causale delle leggi che regolano il comportamento dei micro-oggetti del mondo fisico.

ANTONIO PIGNEDOLI

H. HERMES - H. SCHOLZ, *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band I_1, Heft 1, Teil 1: «*Mathematische Logik*», vol. di pag. 82, in 8.vo gr., Ed. B. G. Teubner, Leipzig.

Si tratta del primo articolo della nuova edizione dell'« *Enzyklopädie* » teubneriana (licenziato il 15 gennaio 1951). Gli AA. hanno voluto esporre solo risultati interessanti ai fini delle applicazioni matematiche, e trattare delle questioni non ancora risolte, solo quando sulla loro formulazione esista un certo accordo. Vengono così escluse dalla trattazione le logiche intuizionistiche, costruttive, finite.

L'opera è divisa dagli AA. in quindici paragrafi.

Nell'introduzione, gli AA. espongono il loro punto di vista sulla Logica Matematica, nei riguardi delle teorie matematiche, assieme ad un riassunto dell'Articolo.

Nel § 1 si definiscono i concetti semantici, e quelli sintattici. Tra gli altri, vengono definiti i concetti di: forma proposizionale generalmente valida, modello, interpretazione semantica, forma proposizionale verificabile, costante logica, regola del dedurre, calcolo astratto.

Nei §§ 2, 3, 4, si imposta semanticamente il problema del linguaggio logico, dapprima sotto la forma di calcolo delle proposizioni, quindi di calcolo dei predicati, e infine di calcolo dei predicati con l'identità. Nel calcolo dei predicati, viene dato particolar rilievo al Teorema di LOEWENHEIM & SKOLEM, sulla validità generale di una espressione del calcolo dei predicati, che sia identicamente valida nel numerabile.

Nei §§ 5, 6, 7, 8 si tratta dei metodi ipotetico-deduttivi, e delle loro applicazioni ai calcoli, già trattati semanticamente nei §§ precedenti. (Gli AA. adoperano, in questi §§, i simboli $\in, \subset, \cup$. del calcolo delle classi, senza definirli, quasi non si trattasse di costanti logiche, ma di simboli del linguaggio ordinario: si può ritenere che abbiano inteso rimandarne la Definizione ad altra voce dell'« Enzyklopädie » (per es., a quella relativa alla Teoria degli insiemi). Tale silenzio può parere inopportuno).

I §§ 9, 10, 11 trattano del problema della decidibilità, in genere, e in relazione ai calcoli introdotti.

I §§ 12, 13, 14, 15 raccolgono i vari problemi aperti, relativi alla Logica Matematica. Si tratta degli ampliamenti del Calcolo dei Predicati, (gradi delle variabili, calcolo degli ideali, teorie matematiche e Logica, problema delle antinomie, calcolo delle conseguenze).

L'esposizione è condotta con grande sistematicità, il che può servire a dare un'idea abbastanza precisa dell'architettura della Logica Matematica, ma comporta anche uno schematismo, il cui valore non può esser percepito se non dal lettore, che già conosca l'argomento.

La forma linguistica è assai sobria, ma priva di oscurità.

Tenendo conto del pubblico a cui l'opera è rivolta si sarebbe potuto desiderare un maggiore sviluppo delle relazioni tra la matematica propriamente detta, e la logica simbolica.

Così com'è, l'articolo adempie egregiamente alla funzione di repertorio, per chi ha qualche iniziazione all'argomento.

PIETRO LINGUA