Bollettino Unione Matematica Italiana

J. Aczèl

Sopra un sistema d'equazioni funzionali che serve a determinare gli iso-(auto-) ed omo-(endo-) morfismi di gruppi a due parametri.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.4, p. 479–484.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_4_479_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

Sopra un sistema d'equazioni funzionali che serve a determinare gli iso-(auto-) ed omo-(endo-) morfismi di gruppi a due parametri.

Nota di J. ACZÉL (a Debrecen) (*)

Sunto. - *Si determinano le soluzioni di un sistema di equazioni funzionali, senza fare alcuna ipotesi di regolarità sulle funzioni che intervengono.*

Summary. - *General solutions of a system of functional equations are determined, without any hypothesis of regularity.*

1. In una nota recente, F. SPERANZA (1) ha dato fra l'altro una soluzione del sistema

$$(1)\qquad f(xu,\ xv+y)=f(x,\ y)f(u,\ v)\qquad\qquad f(1,\ 0)=1$$

$$(2)\qquad g(xu,\ xv+y)=f(x,\ y)g(u,\ v)+g(x,\ y),\qquad g(1,\ 0)=0$$

d'equazioni funzionali (con qualche cambiamento di notazioni):

$$(3)\qquad f(x,\ y)=x,\ g(x,\ y)=ay+bx-b,\qquad (a,\ b\ \text{costanti}).$$

Nel lavoro dello SPERANZA, data la natura della ricerca, si suppone sempre che le funzioni di cui si tratta siano derivabili e che la corrispondenza

$$\bar{x}=f(x,\ y),\qquad \bar{y}=g(x,\ y)$$

sia invertibile, dunque $g(x,\ y)$ dipenda effettivamente da y.

In questa nostra osservazione mostreremo, che (3) *è la sola soluzione dipendente da* y *del sistema* (1), (2) - *senza far alcuna ipotesi di regolarità delle funzioni* f, g (neanche di misurabilità). Vedremo che il metodo di soluzione è del tutto elementare. Finiremo con alcuni commenti somiglianti sulla soluzione d'altre equazioni funzionali della nota (1).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 7 giugno 1960.

(1) F. SPERANZA, *Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenza in sè*, I., « Boll. U. M. I. », (3) 13, 486-496 (1958), particolarmente pp. 495-496.

2. Il membro destro dell'equazione (1) essendo simmetrico per lo scambio delle coppie (x, y) ed (u, v) di variabili, anche il sinistro lo deve essere, perciò abbiamo

$$f(xu,\ xv + y) = f(ux,\ uy + v)$$

e scrivendo

$$xu = s,$$

$$xv + y = t_1 \tag{4}$$

$$v + uy = t_2, \tag{5}$$

abbiamo

$$f(s,\ t_1) = f(s,\ t_2)$$

cioè la funzione $f(x, y)$ è indipendente da y. Ma questa conclusione è giusta soltanto se il sistema (4), (5) d'equazioni lineari possiede una soluzione v, y essendo dati x, u, t_1, t_2. Questo è il caso se

$$0 \neq \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & u \end{vmatrix} = xu - 1 = s - 1,$$

cioè

$$f(s,\ t) \equiv m(s) \qquad \text{se } s \neq 1. \tag{6}$$

Ma ponendo $x = 1$, $u \neq 1$ nella (1) abbiamo

$$m(u) = f(1,\ y)m(u). \tag{7}$$

Se $m(u) \equiv 0$ per $u \neq 1$ allora (1) dà, per $x = \frac{1}{u} \neq 1$, $(u \neq 0)$, $v=0$, a causa di (6)

$$f(1,\ y) = m(x)m(u) = 0$$

in contraddizione con $f(1,\ 0) = 1$. Perciò da (7) segue

$$f(1,\ y) = 1, \tag{8}$$

cioè (6) resta valida, anche se $s = 1$:

$$f(x,\ y) \equiv m(x). \tag{9}$$

Ponendo (9) nella (1), abbiamo

$$m(xu) = m(x)m(u) \tag{10}$$

oppure: $m(x)$ è una funzione *moltiplicativa*. Con $x = 1$ a causa di $m(u) \not\equiv 0$ abbiamo $m(1) = 1$ in accordo con (8).

Volgiamoci all'equazione (2) la quale diventa a causa di (9):

$$g(xu,\ xv + y) = m(x)g(u,\ v) + g(x,\ y). \tag{11}$$

Distingueremo due casi:

a) $m(x) \equiv 1$. Allora con $\bar{f}(x,\ y) = e^{g(x,\,y)} > 0$ abbiamo

$$\bar{f}(xu,\ xv + y) = \bar{f}(x,\ y)\bar{f}(u,\ v).$$

Questa è un'equazione della forma (1) ed ha perciò la soluzione generale

$$\bar{f}(x,\ y) = \overline{m}(x) \quad \text{dove} \quad \overline{m}(x,\ y) = \overline{m}(x)\overline{m}(y).$$

Abbiamo quindi in questo caso a) la soluzione generale

$$f(x,\ y) = 1,\ g(x,\ y) = \log m(x),\ (m(x) > 0,\ m(xy) = m(x)m(y)) \tag{12}$$

del nostro sistema (1), (2). Il secondo caso è:

b) $m(x) \not\equiv 1$ cioè esista un x_0 tale che

$$m(x_0) \neq 1. \tag{13}$$

Con $y = v = 0$ (11) dà

$$g(xu,\ 0) = m(x)g(u,\ 0) + g(x,\ 0)$$

ed a causa della simmetria

$$g(xu,\ 0) = m(u)g(x,\ 0) + g(u,\ 0)$$

e perciò

$$m(x)g(u,\ 0) + g(x,\ 0) = m(u)g(x,\ 0) + g(u,0)$$

e con $u = x_0$, $b = \dfrac{g(x_0,\ 0)}{m(x_0) - 1}$ (vedi la (13)):

$$g(x,\ 0) = bm(x) - b. \tag{14}$$

D'altra parte con $x = u = 1$ (11) dà

$$g(1,\ v + y) = g(1,\ v) + g(1,\ y)$$

cioè

$$g(1,\ y) = a(y), \qquad a(y + v) = a(y) + a(v), \tag{15}$$

$a(y)$ è una funzione *additiva*. - Componiamo $g(x, y)$ mediante (14) e (15). Con $x=1$, $v=0$, $u=s$, $y=t$ risp. con $u=1$, $y=0$, $x=s$, $v=\frac{t}{s}$ abbiamo da (11), (14), (15)

$$g(s,\ t) = bm(s) - b + a(t) \tag{16}$$

risp.

$$g(s,\ t) = m(s)a\left(\frac{t}{s}\right) + bm(s) - b$$

e confrontando queste due equazioni:

$$a(t) = m(s)a\left(\frac{t}{s}\right)$$

e con $s = t$, $a(1) = a$

$$a(t) = am(t) \tag{17}$$

per $t \neq 0$, ma a causa di (16) e (14) anche $a(0) = 0$.

Se $a = 0$, abbiamo $a(t) \equiv 0$ e da (9) e (16) segue:

$$f(x,\ y) = m(x),\quad g(x,\ y) = bm(x) - b, \tag{18}$$

$$(m(xy) = m(x)m(y),\ m(x) \not\equiv 0,\ b \text{ costante}).$$

Se invece $a \neq 0$, allora da (17) e da (15) segue

$$m(x + y) = m(x) + m(y). \tag{19}$$

Ma (10) dà con $u = x$, per tutti i $t = x^2$ positivi

$$m(t) = m(x^2) = m(x)^2 \geqq 0.$$

D'altra parte è ben noto [2] che la sola soluzione di (19) non negativa per i valori positivi della variabile è

$$m(x) = ax \qquad (a \geqq 0)$$

e di queste funzioni soltanto

$$m(x) = x \tag{20}$$

ed $m(x)=0$ soddisfano alla (10); $f(x, y)=m(x)\equiv 0$ già è stato escluso. L'insieme di (9), (16), (17) e (20) dà la soluzione generale (3).

Tutte le funzioni (3), (12) e (18) soddisfano a (1), (2) ma soltanto (3) dipende da y.

[2] G. Darboux, *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*, « Math. Ann. », 17, 33-42 (1880).

3. Osservazioni: 1) Il nostro risultato resta vero anche se (1), (2) sono supposti soltanto per $xu \neq 0$. In questo caso anche le soluzioni (3), (12), (18) sono valevoli per $x \neq 0$.

2) Non abbiamo fatto nessun uso di $g(1, 0) = 0$ ed abbiamo usato anche $f(1, 0) = 1$ soltanto per escludere la soluzione $f(x, y) \equiv 0$ di (1). Senza questa esclusione abbiamo anche una soluzione

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = \begin{cases} -b & \text{se } x \neq 0, \\ g(y) \text{ (arbitraria)} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ma questo è il caso degenerato $m(x) \equiv 0$ di (18) se consideriamo soltanto $x \neq 0$.

3) Le soluzioni più generali, per esempio misurabili (o limitate ecc.), di (10) sono ([3])

$$m(x) = |x|^c, \ |x|^c \operatorname{sg} x, \ 0, \ 1, \ |\operatorname{sg} x|, \ \operatorname{sg} x, \ (c \neq 0).$$

Questo può essere dimostrato in modo elementare e perciò anche l'equazione (3) della nota ([1]) la quale è identica alla nostra (10) può esser risolta così senza supporre derivabilità. Similmente anche

$$f(x) = e^{cx}, \ 0$$

posson esser trovate senza derivare come le soluzioni le più generali misurabili dell'equazione (4) di ([1]):

$$f(x + y) = f(x)f(y);$$

e

$$f(x) = c \log |x|,$$

come quelle dell'equazione

$$f(xy) = f(x) + f(y), \ (xy \neq 0)$$

anch'essa figurante in ([1]).

4) Tutto questo, insieme coll'equazione

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

– soluzione generale misurabile $f(x) = ax$ – serve in ([1]) a determi-

([3]) Vedi R. Schimmack, *Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition*, (Dissertazione, Halle, 1908) ed anche ([2]) e W. Sierpinski, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x + y) = f(x) + f(y)$, « Fund. Math. », 1, 116-122 (1920).

nare gli automorfismi ed i isomorfismi fra i gruppi ad un parametro colle leggi di composizione

$$xou = x + u \quad \text{ed} \quad xou = xu$$

mentre (1), (2) e

$$f(x+u,\ y+v) = f(x,\ y) + f(u,\ v), \quad g(x+u,\ y+v) = g(x,\ y) + g(u,\ v)$$

- soluzione generale $f(x,\ y) = a_1(x) + a_2(y)$, $g(x,\ y) = a_3(x) + a_4(y)$ $(a_i(x+y) = a_i(x) + a_i(y),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ - determina ivi gli automorfismi dei gruppi a due parametri (sostituzioni lineari e traslazioni) colle leggi di composizione

$$(x,\ y)\, o\, (u,\ v) = (xu,\ xv + y) \quad \text{ed} \quad (x,\ y)\, o\, (u,\ v) = (x+u,\ y+v)$$

e (12), (18) sono i loro endomorfismi. In modo similare a quello seguito nel n. 2. si può dimostrare che dei due sistemi rimanenti,

$$f(xu,\ xv + y) = f(x,\ y) + f(u,\ v), \qquad g(xu,\ xv + y) = g(x,\ y) + g(u,\ v)$$

- soluzione generale $f(x,\ y) = \log m_1(x)$, $g(x,\ y) = \log m_2(x)$, $(m_i(xy) = m_i(x) m_i(y),\ m_i(x) > 0,\ i = 1,\ 2)$ - non ha di soluzione dipendente di y, mentre

$$f(x+u,\ y+v) = f(x,\ y) f(u,\ v), \qquad g(x+u,\ y+v) = f(x,\ y) g(u,\ v) + g(x,\ y)$$

ammette $f(x,\ y) \equiv 1$, $g(x,\ y) = a_1(x) + a_2(y)$; $f(x,\ y) \equiv 0$, $g(x,\ y) =$ $=$ costante ed $f(x,\ y) = e^{a_1(x) + a_2(y)}$, $g(x,\ y) = c(e^{a_1(x) + a_2(y)} - 1)$, $(a_i(x+y) = a_i(x) + a_i(y),\ i = 1,\ 2)$ come soluzioni generali, ma anche questi non sono invertibili (rappresentano dunque di omomorfismi).

5) È interessante, che un sistema d'equazioni funzionali molto somigliante a (1), (2) che può esser risolto similmente, fa una parte decisiva nella teoria degli oggetti geometrici lineari nello spazio ad una dimensione [4].

[4] Vedi O. E. GHEORGHIU, *Les lois de transformations des objets géomètriques spéciaux linéaires de classe* ν *avec une composante en* X_1, « Comptes Rendus, Paris », 229, 611-613 (1949) ed anche J. ACZÉL - S. GOŁĄB, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, « Monografie Mat. » XXXIX (Warszawa, 1960), II. 7 § 2.