Bollettino Unione Matematica Italiana

Davide Carlo Demaria

Sull'aggiunto di un sistema lineare tracciato sopra una varietà algebrica non singolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.4, p. 485–498.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_4_485_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

Sull'aggiunto di un sistema lineare tracciato sopra una varietà algebrica non singolare.

di DAVIDE CARLO DEMARIA (a Torino) (*)

Summary. - *The impure canonic system* $|K|$ *and a non-singular hypersurface* D *are considered on a non-singular algebraic variety* V_d *having dimension* $d > 1$. SEVERI *remarked that the deficiency of the linear system of the hypersurface* D *cut out by its adjoint (complete) system* $|K + D|$ *is equal to* h *which is the number of linearly independent* $(d-1)$*-ple differentials of the first kind on* V_d *non vanishing on* D. *It seemed useful to give a simple proof of this property. Additionally, a condition which is necessary and sufficient for the regularity of the system* $|K + D|$ *is presented. The* $(d-1)$*-dimensional irregularity of* D *appears in it. This irregularity is shown to be sometimes lower or higher than the irregularity* q_{d-1} *of the variety* V_d. *This implies that the superabundance of the system* $|K + D|$ *may be not only positive or null but also negative. Finally, in order that the complete linear system* $|C|$ *belonging to* V_d *cuts out on the non-singular hypersurface* B *of the variety* V_d *a complete and regular system two sufficient conditions are given.*

INTRODUZIONE E SUNTO

Sopra una varietà algebrica non singolare V_d di dimensione $d > 1$, si considerino il sistema canonico impuro $|K|$ ed un'ipersuperficie non singolare D.

SEVERI ha osservato che la deficienza del sistema lineare segato su D dal suo sistema aggiunto (completo) $|K + D|$ uguaglia il numero l delle forme differenziali di prima specie indipendenti del grado $d-1$ (attaccate a V_d) e *non identicamente nulle* su D [1].

Ci è sembrato non inutile presentare (nel n. 1) una semplice dimostrazione di questa proprietà.

Segnaliamo poi (nel. 2) una condizione caratteristica perchè il sistema $|K + D|$ sia regolare; in essa interviene tra l'altro l'irregolarità $(d-1)$-dimensionale dell'ipersuperficie D.

Mostriamo poi con effettivi esempi (n. 3) che la suddetta irre-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 16 dicembre 1960.

[1] Cfr. ad es. SEVERI, Rendiconti Acc. Naz. Lincei, vol. XXVII (1959) pag. 12.

golarità può talvolta essere inferiore o superiore alla penultima irregolarità di V_d (anzi può superare un qualsiasi numero positivo prefissato [2]); ciò implica che per $d > 2$ la sovrabbondanza del sistema $|K + D|$ è suscettibile di acquistare valori non solo positivi o nulli, ma anche negativi.

Infine (n. 4) assegniamo due condizioni sufficienti perchè un sistema lineare completo $|C|$ tracciato su V_d tagli sopra un'ipersuperficie non singolare B della varietà un sistema completo e regolare.

1. – Sia data una varietà algebrica ***non singolare*** d-dimensionale V_d, immersa in uno spazio proiettivo S_r (complesso), e si consideri su di essa un'ipersuperficie effettiva non singolare D. Indichiamo con $g_d(V_d)$ e $g_{d-1}(V_d)$ i numeri delle forme differenziali di prima specie linearmente indipendenti, attaccate a V_d, aventi i gradi rispettivamente d e $d-1$; con $g_{d-1}(D)$ il numero delle forme differenziali indipendenti del grado $d-1$ della ipersuperficie D, e con l il numero delle forme differenziali di prima specie indipendenti su V_d, che hanno il grado $d-1$ e sono identicamente nulle sopra D [3].

Kodaira [4] ha dimostrato che la dimensione effettiva del sistema $|K + D|$ (aggiunto al sistema individuato sopra V_d dall'ipersuperficie D), è data dalla seguente relazione:

$$\text{(1.1)} \qquad \dim |K + D| = g_d(V_d) - g_{d-1}(V_{d-1}) + g_{d-1}(D) + l - 1.$$

Per la definizione trascendente del genere geometrico $P_g(W_d)$ di una varietà W_d abbiamo:

$$g_d(V_d) = P_g(V_d), \qquad g_{d-1}(D) = P_g(D);$$

quindi la (1.1) si può scrivere nella seguente forma:

$$\text{(1.2)} \qquad \dim |K + D| = P_g(V_d) + P_g(D) - g_{d-1}(V_d) + l - 1.$$

Utilizziamo ora la (1.2) per esprimere la sovrabbondanza del sistema $|K + D|$.

(2) Ciò è in contrasto con una proprietà enunciata da Severi, e da lui assunta esplicitamente come un *postulato*. Cfr. [3], pag. 85.

(3) Severi indica gli stessi numeri con altri simboli e precisamente:
$$i_d = g_d(V_d),\ i_{d-1} = g_{d-1}(V_d),\ j_{d-1} = g_{d-1}(D),\ \sigma = l.$$
Cfr. ad es. [5], vol. III, pag. 293.

(4) Vedi Kodaira, [1], pag. 99, ove la relazione è dimostrata addirittura per le varietà Kähleriane.

Ricordiamo innanzitutto che la sovrabbondanza di un sistema lineare completo $|A|$ (supposto virtualmente privo di punti base come tutti i sistemi lineari qui considerati) viene così definita:

$$(1.3) \qquad s|A| = \dim|A| - \delta|A| + (-1)^d j|A|;$$

ove $\delta|A|$ e $j|A|$ rappresentano rispettivamente la dimensione virtuale e l'indice di specialità del sistema $|A|$.

Nel nostro caso i caratteri suindicati sono dati dalla (1.2) e dalle relazioni:

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} \delta|K+D| &= P_a(V_d) + P_a(D) - 1; \\ j|K+D| &= 0. \end{aligned} \qquad (^5)$$

Si ha pertanto:

$$(1.5) \qquad s|K+D| = \dim|K+D| - P_a(V_d) - P_a(D) + 1,$$

e, tenuto conto della (1.3), si ottiene:

$$(1.6) \qquad s|K+D| = P_g(V_d) + P_g(D) - g_{d-1}(V_d) + l - 1 - P_a(V_d) - P_a(D) + 1.$$

Introdotte le ultime irregolarità di V_d e D:

$$q_d(V_d) = P_g(V_d) - P_a(V_d),$$
$$q_{d-1}(D) = P_g(D) - P_a(D),$$

si perviene alla relazione:

$$(1.7) \qquad s|K+D| = q_d(V_d) + q_{d-1}(D) - g_{d-1}(V_d) + l.$$

Ciò posto, determiniamo un'altra espressione della sovrabbondanza $s|K+D|$. Indichiamo con il simbolo $|C|\cdot B$ il sistema lineare segato sopra un'ipersuperficie non singolare B di V_d da un sistema lineare completo $|C|$ (effettivo o virtuale) tracciato su V_d, denotiamo con $s|C|\cdot B$ e $\operatorname{def}|C|\cdot B$ [6] rispettivamente la sovrabbon-

[5] Cfr. ad es. [2], pag. 420.

[6] Ricordiamo che, indicato con $||C|\cdot B|$ il sistema completo individuato su B da una varietà del sistema $|C|\cdot B$, si ha:

$$\operatorname{def}|C|\cdot B = \dim||C|\cdot B| - \dim|C|\cdot B.$$

Notiamo che il sistema completo $||C|\cdot B|$ può essere definito anche nei casi in cui il sistema $|C|$ sia virtuale o contenga l'ipersuperficie B come parte fissa. (Cfr. ad es. [2], pag. 408; in questi due casi eccezionali occorre porre $\dim|C|\cdot B = -1$). La sovrabbondanza di un sistema lineare (D) eventualmente incompleto è, per definizione, la sovrabbondanza del sistema completo $|D|$ individuato da un'ipersuperficie totale del sistema (D).

danza e la deficienza del sistema $|C| \cdot B$. Posto $A \equiv C - B$, sussiste la relazione: (7)

$$(1.8)\quad (-1)^{d+1} \operatorname{def} |K - A| \cdot B = s|A| - s|C| + s|C| \cdot B - \operatorname{def} |C| \cdot B.$$

Supponiamo poi che sia $B \equiv D$, $C \equiv K + D$, e di conseguenza $A \equiv C - B \equiv K$; otteniamo allora:

$$(1.9)\qquad (-1)^{d+1} \operatorname{def} |K - K| \cdot D = s|K| - s|K + D| + \\ + s|K + D| \cdot D - \operatorname{def} |K + D| \cdot D.$$

Il sistema $|K - K|$ di V_d coincide con lo *zero* Z dell'equivalenza ipersuperficiale su V_d e subordina su D il sistema lineare $|Z| \cdot D$, costituito dallo zero dell'equivalenza ipersuperficiale su D. Poichè quest'ultimo sistema è ovviamente completo, risulta:

$$(1.10)\qquad \operatorname{def} |K - K| \cdot D = \operatorname{def} |Z| \cdot D = 0.$$

Inoltre è: (8)

$$(1.11)\qquad s|K| = q_d(V_d),$$

ed, indicato con $K(D)$ il sistema canonico di D, si ha:

$$(1.12)\qquad s|K + D| \cdot D = s|K(D)| = q_{d-1}(D).$$

Perciò dalla (1.9) — tenute presenti le (1.10), (1.11), (1.12) — ricaviamo: (9)

$$(1.13)\qquad s|K + D| = q_d(V_d) + q_{d-1}(D) - \operatorname{def} |K + D| \cdot D.$$

Finalmente dal confronto della (1.7) e della (1.13) otteniamo:

$$(1.14)\qquad \operatorname{def} |K + D| \cdot D = g_{d-1}(V_d) - l;$$

abbiamo cioè dimostrato che *la deficienza del sistema tagliato sopra un'ipersuperficie non singolare* D *dal suo sistema aggiunto* $|K + D|$

(7) Vedi MARCHIONNA, [2], pag. 410.
(8) Vedi [2], pag. 428.
(9) La (1.13) è già stata segnalata da MARCHIONNA in una nota dei Rendiconti Acc. Naz. Lincei, vol. XXIV (1958), pag. 673.

è uguale alla differenza tra il numero delle forme indipendenti di prima specie di grado d — 1 *attaccate a* V_d *ed il numero di quelle tra esse* (indipendenti) *che si annullano identicamente su* D.

2. - Dalle considerazioni svolte nel n. precedente si deducono immediatamente alcune note ed importanti proposizioni, dalle quali ricaviamo poi una condizione caratteristica per la regolarità dell'aggiunto ad un'ipersuperficie D di V_d.

Se $|D|$ è un sistema *ampio* [10] si ha $l = 0$ [11], ed inoltre $\dim|K+D| = P_a(V_d) + P_a(D) - 1$ [12]. Pertanto la relazione (1.5) diventa:

$$s\,|K+D| = 0, \tag{2.1}$$

in altre parole: *l'aggiunto* $|K + D|$ *ad un sistema ampio è regolare* [13]. Inoltre le (1.14), (1.13) si riducono rispettivamente alle relazioni:

$$\operatorname{def}|K+D|\cdot D = g_{d-1}(D); \tag{2.2}$$

$$q_d(V_d) + q_{d-1}(D) = g_{d-1}(V_d). \tag{2.3}$$

Consideriamo ora una generica sezione iperpiana E della varietà V_d. Poichè il sistema $|E|$ è ampio ricaviamo dalla (2.3):

$$q_d(V_d) + q_{d-1}(E) = g_{d-1}(V_d). \tag{2.4}$$

D'altra parte la penultima irregolarità $q_{d-1}(V_d)$ della varietà V_d coincide *per definizione* con l'ultima irregolarità $q_{d-1}(E)$ di una sua generica sezione iperpiana E; di conseguenza dalla (2.4) si ottiene la nota relazione di SEVERI: [14]

$$g_{d-1}(V_d) = q_d(V_d) + q_{d-1}(V_d). \tag{2.5}$$

Dal confronto delle (2.3), (2.5) si ricava infine:

$$q_{d-1}(D) = q_{d-1}(V_d); \tag{2.6}$$

(10) Un sistema lineare $|D|$ tracciato su V_d, privo di componenti fisse, è detto *ampio*, se esiste una varietà V'_d (non singolare) in corrispondenza birazionale regolare con V_d, tale che le sue sezioni iperpiane corrispondano ad ipersuperficie del sistema $|D|$.

(11) Vedi KODAIRA, [1], pag. 102.

(12) Vedi KODAIRA, [1], pag. 107.

(13) Questo è l'enunciato in termini classici del teorema di KODAIRA sull'aggiunto ad un sistema ampio richiamato in (12).

(14) Cfr. SEVERI, [5], vol. III, pag. 278; pag. 431.

vale a dire: *l'ultima irregolarità di un'ipersuperficie* (non singolare) *appartenente ad un sistema ampio tracciato su V_d è uguale alla penultima irregolarità di V_d* [15].

Osserviamo infine, che in virtù delle relazioni (1.7), (2.5), la sovrabbondanza del sistema aggiunto ad una qualsiasi ipersuperficie *non singolare D* ammette anche l'espressione più semplice: [16]

$$s\,|K+D| = q_{d-1}(D) - q_{d-1}(V_d) + l. \quad (2.7)$$ [17]

Di qui segue che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* $|K+D|$ *sia regolare è che la differenza fra le irregolarità* $(d-1)$*-dimensionali della varietà* V_d *e dell'ipersuperficie* D *uguagli il numero delle forme differenziali di prima specie indipendenti, del grado* $d-1$, *attaccate a* V_d *ed identicamente nulle su* D.

3. - Ora vogliamo mettere in luce che esistono delle V_d le quali contengono qualche ipersuperficie D la cui irregolarità $(d-1)$-dimensionale è minore, o anche maggiore, dell'analoga irregolarità di V_d (anzi può superare un numero positivo scelto a piacere); inoltre si può verificare che la sovrabbondanza $s\,|K+D|$ può risultare tanto negativa, quanto positiva.

Ci limiteremo ad esaminare il problema sopra opportune varietà tridimensionali, sebbene non sia difficile estendere le cose che diremo a varietà di dimensione superiore.

A tale scopo consideriamo una curva razionale C (non singolare) appartenente ad uno spazio proiettivo S_r ed una superficie rigata F d'irregolarità $q>0$ — pure non singolare — appartenente ad un altro spazio proiettivo S_ρ.

Sulla ben nota varietà di SEGRE, prodotto degli spazi S_r ed S_ρ, consideriamo la V_3 immagine della varietà delle coppie di punti della curva C e della superficie F; diremo che V_3 è *il prodotto proiettivo* di C ed F, e scriveremo $V_3 = C \times F$.

Avendo scelto entrambi i fattori del prodotto proiettivo *non singolari*, anche la V_3 risulta non singolare (la verifica di questa proprietà, che è da ritenersi nota, è abbastanza semplice e — per

[15] Questa proprietà rientra in un teorema più generale stabilito da MARCHIONNA in [2], pag. 428.

[16] La (2.7) è già stata segnalata senza dimostrazione, da MARCHIONNA. Cfr. [2], pag. 421 (nota (27) a pié di pagina).

[17] Si osservi che per $d=2$ si ha:

$$q_{d-1}(D) = q_{d-1}(V_d) = 0;\ s\,|K+D| = l.$$

comodità del lettore — l'abbiamo esposta nell'ultimo paragrafo del lavoro).

Tenuto conto di alcuni risultati di SEVERI, si può affermare che le due irregolarità di V_3 sono date da:

$$q_3(V_3) = -q, \qquad q_2(V_3) = q\,; \tag{3.1}$$ (18)

sicchè risulta:

$$g_2(V_3) = q_3(V_3) + q_2(V_3) = 0\,. \tag{3.2}$$

Ne segue che il numero l delle forme differenziali quadratiche di V_3 che si annullano sopra una sua superficie D non singolare è ovviamente uguale a zero; epperò la (2.7) nel caso in esame diventa:

$$s\,|K + D| = q_2(D) - q_2(V_3) = q_2(D) - q\,. \tag{3.3}$$

Consideriamo ora quelle particolari superficie D di V_3 che si ottengono come prodotto proiettivo della curva razionale C sopramenzionata e di una curva Γ (pure non singolare) appartenente alla rigata F. Detto π il genere di Γ, si ha:

$$q_2(D) = \pi\,, \tag{3.4}$$ (19)

$$s\,|K + D| = \pi - q\,. \tag{3.5}$$

Orbene se Γ coincide con una generatrice della rigata F si ha $\pi = 0$; di conseguenza la superficie D ha *irregolarità nulla* (quindi *minore dell'irregolarità superficiale* q *di* V_3), *e la sovrabbondanza del sistema aggiunto* $|K + D|$ *risulta negativa.*

(18) Cfr. SEVERI, [3], pag. 81. Quivi si mostra che la varietà V_3 prodotto di una curva C di genere p e di una superficie F di genere geometrico p_g e di genere aritmetico p_a, ha le irregolarità tridimensionale e superficiale rispettivamente uguali a:

$$q_3(V_3) = p(p_g - p_a) + p_a - p,$$
$$q_2(V_3) = (p_g - p_a) + p.$$

Nel caso da noi esaminato si ha $p_g = p = 0$, $p_a = -q$, e ciò giustifica le (3.1)

(19) Infatti l'irregolarità della superficie D prodotto di una curva C di genere p e di una curva Γ di genere π è uguale a $p + \pi$ (Cfr. SEVERI, [5], vol. II, pag. 378). Nel nostro caso la C ha genere $p=0$, quindi $q_2(D)=\pi$.

Se invece si sceglie Γ linearmente equivalente ad un multiplo sE di una generica sezione iperpiana E della rigata F, accade che il suo genere π cresce indefinitamente con s, e quindi può acquistare valori superiori a q.

Infatti indicati con n l'ordine di F e con π_1 il genere di E si ha: ([20])

$$\pi = s\pi_1 + \frac{s(s-1)}{2}n - s + 1\,; \tag{3.6}$$

ed è ovvio che per $s > 1$ si ha $\pi > \pi_1$ (quindi $\pi > q$). Corrispondentemente *l'irregolarità* $q_2(D)$ *della superficie* $D = C \times \Gamma$ ***risulta superiore all'irregolarità superficiale di*** V_3 *e la sovrabbondanza* $s\,|K + D|$ *è maggiore di zero.*

E si noti che l'intero s può essere scelto in modo tale che $q_2(D)$ ed $s\,|K + D|$ superino due interi positivi prefissati qualsiansi ([21]).

4. – Siano: $|C|$ il sistema lineare completo individuato su V_d da un'ipersuperficie C arbitraria (virtuale od effettiva), B un'ipersuperficie non singolare di V_d, $|A|$ il sistema $|C - B|$.

Determineremo fra poco *due condizioni sufficienti affinchè il*

([20]) Cfr. ad es. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna (1949), pag. 109.

([21]) In una celebre memoria del 1906 (Cfr. Annales École Normale Superieure, 3ª s., XXVIII) CASTELNUOVO ed ENRIQUES hanno dimostrato che l'irregolarità superficiale di una V_3 uguaglia l'irregolarità di una superficie che possa variare in un sistema *lineare* almeno ∞^2 tracciato su V_3, tale che due superficie variabili del sistema abbiano in comune (fuori delle linee base) una curva variabile ***irriducibile***.

Orbene, com'era da attendersi, i due tipi di superficie $D = C \times \Gamma$ dianzi considerati non soddisfano alle condizioni di CASTELNUOVO ed ENRIQUES.

Infatti per le superficie D del primo tipo la curva Γ è una generatrice della rigata F, e varia quindi in un fascio irrazionale di genere q, di guisa che in corrispondenza pure la superficie D di V_3 varia in un fascio ***irrazionale***.

Per le superficie D del secondo tipo accade che quando Γ descrive su F il sistema lineare $|sE|$, la $|D|$ descrive su V_3 un sistema lineare; tuttavia due superficie D variabili in detto sistema hanno in comune una curva ***spezzata*** che ha delle componenti variabili (queste sono date dalle curve $C \times P_i$, ove P_i sono i punti di F comuni a due curve variabili Γ_1, Γ_2 del sistema $|sE|$).

sistema $|C| \cdot B$ (tagliato sull'ipersuperficie B dal sistema $|C|$) *sia completo e regolare;* cioè risulti:

$$\operatorname{def} |C| \cdot B = 0 \quad , \quad s|C| \cdot B = 0 .$$

A tale scopo applicheremo la relazione (1.8) ed i due seguenti teoremi di KODAIRA:

a) *Se* $|\mathrm{D}|$ *è un sistema ampio, il sistema* $|\mathrm{K}+\mathrm{D}|$ *è regolare* (si ricordi la relazione (2.1)).

b) *Se il sistema* $|\mathrm{S}|$ *è sufficientemente ampio rispetto al sistema completo* $|T|$ (22), *allora quest'ultimo taglia sopra un'ipersuperficie non singolare di* $|\mathrm{S}|$ *un sistema completo* (23).

Ciò posto, dimostriamo il

TEOREMA 1. – *Se i sistemi* $|\mathrm{B}-\mathrm{C}|$ *e* $|\mathrm{C}-\mathrm{K}|$ *sono ampi, allora il sistema* $|\mathrm{C}| \cdot \mathrm{B}$ *risulta completo e regolare.*

Il fatto che sia:

$$\operatorname{def} |C| \cdot B = 0, \tag{4.1}$$

è una conseguenza immediata dell'ipotesi che $|B-C|$ sia un sistema ampio (si ricordi per questo il teorema b). La stessa ipotesi assicura che $s|K+(B-C)|=0$ (in virtù del teorema a).

D' altra parte, assegnato un qualunque sistema lineare $|X|$ di V_d, sussiste la relazione:

$$s|X| = (-1)^d s|K-X| ; \quad (24) \tag{4.2}$$

epperò:

$$s|A| = s|C-B| = (-1)^d s|K+(B-C)| = 0 . \tag{4.3}$$

Inoltre, poichè anche il sistema $|C-K| = |B-(K-A)|$ è supposto ampio, applicando successivamente i teoremi a) e b), si vede che:

$$s|C| = s|K+(C-K)| = 0 ; \tag{4.4}$$

$$\operatorname{def} |K-A| \cdot B = 0 . \tag{4.5}$$

(22) Il sistema $|S|$ è sufficientemente ampio rispetto al sistema $|T|$, se il sistema $|S-T|$ è ampio.

(23) Cfr. KODAIRA, [1], pag. 115.

(24) Vedi MARCHIONNA, [2], pag. 432.

Dalle relazioni (1.8), (4.1), (4.3), (4.4), (4.5) segue infine che:

$$s\,|C|\cdot B = 0. \tag{4.6}$$

c. d. d.

TEOREMA 2. - *Se i sistemi lineari* $|B|$ *e* $|C - B - K|$ *sono ampi il sistema* $|C|\cdot B$ *risulta completo e regolare.*

Nelle nostre ipotesi sono pure ampi tanto il sistema $|C - K|$ (perchè somma dei due sistemi ampi $|C|$ e $|C - B - K|$ ([25])), quanto il sistema $|C - B - K|\cdot B$ (perchè tagliato sopra B da un sistema ampio di V_d).

Osserviamo ora che sopra V_d il sistema $|A|$ è aggiunto al sistema ampio $|A - K| = |C - B - K|$; pertanto:

$$s\,|A| = 0. \tag{4.7}$$

Similmente, poichè sopra B le ipersuperficie del sistema $|K + B|\cdot B$ appartengono al sistema canonico $|K(B)|$, accade che il sistema $|C|\cdot B$ risulta aggiunto al sistema ampio $|C - B - K|\cdot B$ e, di conseguenza, esso è regolare; cioè

$$s\,|C|\cdot B = 0. \tag{4.8}$$

D'altra parte, poichè il sistema $|C - K|$ è ampio, otteniamo (con considerazioni identiche a quelle adoperate nella dimostrazione del teorema 1):

$$s\,|C| = 0 \quad , \quad \mathrm{def}\,|K - A|\cdot B = 0. \tag{4.9}$$

Orbene, essendo per le (4.7), (4.8). (4.9) nulli quattro termini della (1.8), si conclude che è nullo anche il termine restante; cioè:

$$\mathrm{def}\,|C|\cdot B = 0\,; \tag{1.10}$$

e ciò prova l'asserto.

5. - Siano V_d e $V_\delta{}'$ due varietà algebriche appartenenti rispettivamente a certi spazi proiettivi S_r, $S_\rho{}'$.

Sia:

$$M_{r+\rho} = S_r \times S_\rho{}'$$

([25]) Cfr. KODAIRA, [1], pag. 89.

la *varietà di* SEGRE luogo delle coppie di punti dei due spazi in esame, ed indichiamo con

$$W_{d+\delta} = V_d \times V_\delta'$$

il *prodotto proiettivo* di V_d e V_δ', cioè la sottovarietà di $M_{r+\rho}$ che rappresenta la totalità delle coppie di punti di V_d e V_δ'.

Vogliamo dimostrare che *se* V_d *e* V_δ' *sono non singolari, anche il loro prodotto proiettivo risulta non singolare, e viceversa* ([26]).

È già noto che se — e solo se — V_d e V_δ' sono irriducibili, anche il loro prodotto $V_d \times V_\delta'$ è irriducibile ([27]).

Basterà dunque verificare che, indicato con $P \times P'$ il punto della varietà di SEGRE che è immagine della coppia formata da un punto P di V_d e da un punto P' di V_δ', esso è certamente un punto semplice della varietà prodotto $V_d \times V_\delta'$ qualora i punti P e P' siano semplici, rispettivamente, per V_d e V_δ'; e viceversa.

Siano $x_0, x_1, \dots, x_r$ le coordinate omogenee (non tutte nulle) di un punto dell'intorno di P su V_d; possiamo sempre supporre che sia $x_0 = 1$.

È noto che la condizione necessaria e sufficiente affinchè P sia semplice per V_d (cioè V_d passi per P con una falda lineare unica) è che l'intorno di P ammetta una rappresentazione parametrica regolare; il che significa che le coordinate non omogenee $x_1, x_2, \dots, x_r$ di un punto dell'intorno di P si possano esprimere con equazioni della forma:

$$x_i = f_i\ (t_1, t_2, \dots, t_d), \tag{5.1}$$

ove le f_i sono r funzioni olomorfe dei d parametri t, la cui matrice funzionale abbia rango d nell'intorno considerato.

In altre parole, posto:

$$a_{i\lambda} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\lambda}\right)_P \qquad (\text{con } i = 1, 2, \dots, r\,;\ \lambda = 1, 2, \dots, d),$$

([26]) Ripetiamo che tale proprietà è da ritenersi nota, sebbene non ci sia riuscito di rintracciarne una dimostrazione completa nella letteratura Cfr. ad es. GAETA, (Ann. Matematica, vol. XXXIII (1952), pag. 192), ove si enuncia la proprietà in esame senza dimostrazione. Si veda anche SEVERI, [4], pag. 194, ove si verifica geometricamente la possibilità di costruire un modello non singolare del prodotto di due curve irriducibili prive di punti multipli.

([27]) Vedi SEVERI, [4], pag. 194.

la matrice $A = \| a^{i\lambda} \|$, composta di r righe e d colonne, deve risultare di rango d [28].

Similmente, indicate con $y_0, y_1, \dots, y_\rho$ le coordinate di un punto dell'intorno di P' su V_δ', e posto $y_0 = 1$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè P' risulti semplice per V_δ', è che l'intorno suddetto abbia una rappresentazione del tipo:

$$y_j = g_j\,(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\delta), \qquad (j = 1, 2, \dots, \delta); \tag{5.2}$$

ove le g_j sono funzioni olomorfe di δ parametri τ, la cui matrice funzionale $B = \| b_{j\lambda} \|$, di ρ righe e δ colonne, ha rango δ.

Qui s'è posto:

$$b_{j\lambda} = \left(\frac{\partial y_j}{\partial \tau_\lambda}\right)_{P'}$$

Consideriamo la varietà di Segre degli spazi S_r ed S_ρ': essa è rappresentata dalle equazioni parametriche:

$$X_{ij} = x_i y_j, \tag{5.3}$$

con $i = 0, 1, \dots, r$; $j = 0, 1, \dots, \rho$.

L'intorno del punto $P \times P'$ sul prodotto proiettivo $W_{d+\delta}$ delle varietà V_d e V_δ', è dato dalle equazioni (5.3), ove per $i \neq 0, j \neq 0$, le x_i, y_j vanno sostituite con le espressioni (5.1), (5.2); ed inoltre occorre porre $x_0 = y_0 = 1$.

Orbene è chiaro che le X_{ij} sono funzioni olomorfe dei $d + \delta$ parametri σ_h,

$$\begin{gathered} \sigma_1 = t_1, \ \sigma_2 = t_2, \dots, \ \sigma_d = t_d, \\ \sigma_{d+1} = \tau_1, \ \sigma_{d+2} = \tau_2, \dots, \ \sigma_{d+\delta} = \tau_\delta, \end{gathered} \tag{5.4}$$

quando, e solo quando [29], le funzioni f e g date dalle (5.1), (5.2) risultano olomorfe.

Per completare la dimostrazione consideriamo la matrice funzionale $C = \| c_{ij\lambda} \|$ delle funzioni X_{ij} che rappresentano l'intorno di $P \times P'$ su $W_{d+\delta}$.

[28] Cfr. ad es. Severi, [5], vol. II, pag. 8, 9.

[29] Si noti che, poiché $x_0 = y_0 = 1$, se le funzioni X_{ij} sono funzioni olomorfe delle σ, le funzioni $f_i = X_{i0}$, $g_j = X_{0j}$ saranno funzioni olomorfe, rispettivamente, delle t e delle τ.

Si ha:

$$c_{ij\lambda} = \left(\frac{\partial X_{ij}}{\partial\sigma_\lambda}\right)_{P\times P'} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial\sigma_\lambda}\right)_P (y_j)_{P'} + \left(\frac{\partial y_j}{\partial\sigma_\lambda}\right)_{P'} (x_i)_P, \tag{5.5}$$

dove il primo dei due addendi è sempre nullo per $\lambda > d$, ed il secondo lo è per $\lambda \leq d$.

Occorre provare che la matrice C ha rango $d + \delta$ se, e solo se, le matrici A e B hanno rispettivamente ranghi d e δ.

Osserviamo innanzitutto che essendo $y_0 = 1$, risulta:

$$c_{io\lambda} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial\sigma_\lambda}\right)_P \tag{5.6}$$

e precisamente:

$$\begin{aligned} c_{io\lambda} &= a_i \quad \text{per} \quad \lambda \leq d, \\ c_{io\lambda} &= 0 \quad \text{per} \quad \lambda > d. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Analogamente, essendo $x_0 = 1$, risulta:

$$c_{oj\lambda} = \left(\frac{\partial y_j}{\partial\sigma_\lambda}\right)_{P'}, \tag{5.8}$$

vale a dire:

$$\begin{aligned} c_{oj\lambda} &= 0, \quad \text{per} \quad \lambda \leq d, \\ c_{oj\lambda} &= b_{j,\lambda-d} \quad \text{per} \quad \lambda > d. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dentro la matrice C consideriamo la sottomatrice di $r + \rho$ righe e $d + \delta$ colonne:

$$\bar{C} = \left\| \begin{matrix} c_{io\lambda} \\ c_{oj\lambda} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B \end{matrix} \right\| .$$

Ora è chiaro che, se le matrici A e B hanno rango rispettivamente guale a d e δ, allora $\bar{C}$ ha rango $d + \delta$, e di conseguenza anche C ha rango $d + \delta$.

Viceversa, se ad es. la matrice A ha rango minore di d, tra le colonne di A sussisterà (almeno) una relazione del tipo:

$$\sum_1^d{}_\lambda h_\lambda a_{i\lambda} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{5.10}$$

ove le h sono d costanti non tutte nulle.

Mostriamo ora che, di conseguenza, anche le prime d colonne della matrice C sono linearmente dipendenti. Infatti in virtù della (5.5), esse soddisfano alla seguente relazione lineare:

$$\sum_{1}^{d}{}_{\lambda} h_\lambda c_{ij\lambda} = \sum_{1}^{d}{}_{\lambda} h_\lambda \left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\lambda}\right)_P (y_i)_{P'} = (y_i)_{P'} \sum_{1}^{d}{}_{\lambda} h_\lambda a_{i\lambda} = 0, \tag{5.11}$$

($i = 0, 1, \ldots, d$; $j = 0, 1, \ldots, \delta$; con i, j non entrambi nulli).

A completamento della trattazione, osserviamo che la proprietà dimostrata ha *carattere locale*; pertanto non è affatto necessario supporre che V_d e V_δ' siano algebriche, bastando supporre che esse siano analitiche, o addirittura soltanto differenziabili di classe 1.

Consideriamo infine n varietà algebriche $V_{d_1}, V_{d_2}, \ldots, V_{d_n}$, appartenenti rispettivamente a certi spazi proiettivi $S_{r_1}, S_{r_2}, \ldots, S_{r_n}$. Dentro la varietà di SEGRE:

$$M_t = S_{r_1} \times S_{r_2} \times \ldots \times S_{r_n},$$

che rappresenta le n-ple dei punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$, estratti rispettivamente dagli spazi $S_{r_1}, S_{r_2}, \ldots, S_{r_n}$, consideriamo la sottovarietà:

$$W_d = V_{d_1} \times V_{d_2} \times \ldots \times V_{d_n},$$

che rappresenta la totalità delle n-ple dei punti estratti rispettivamente dalle varietà $V_{d_1}, V_{d_2}, \ldots, V_{d_n}$.

La varietà W_d prende il nome di *prodotto proiettivo delle* n *varietà* V_{d_i}, e con la stessa tecnica dianzi adoperata si dimostra che essa *risulta non singolare se, e solo se, i singoli fattori V_{d_i} sono non singolari.*

BIBLIOGRAFIA

[1] K. KODAIRA, *Some results in the trascendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Mathem. », 59 (1954).

[2] E. MARCHIONNA, *Il teorema di Riemann-Roch sulle varietà algebriche e questioni collegate con la teoria delle irregolarità*, Appendice VI al vol. III del trattato [5] di F. SEVERI.

[3] F. SEVERI. *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Circ. Matem. Palermo », t. XXVIII (1909).

[4] F. SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, vol. I; Bologna, Zanichelli (1926).

[5] F. SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, Roma, Edizioni Cremonese; vol. II (1958), vol. III (1959). Il vol. I (1942) porta il titolo: *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.*