Bollettino
Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

# Sulle coniche osculatrici ed ellissi di ipercurvatura ad una data curva piana.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **15** (1960), n.4, p. 499–509.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_4_499_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

# Sulle coniche osculatrici ed ellissi di ipercurvatura ad una data curva piana

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina) (*)

**Sunto.** - *Si assegnano nuovi risultati sulle coniche osculatrici ed ellissi di ipercurvatura ad una data curva piana priva di flessi.*

**Summary.** - *New results concerning osculating conic-sections and ellipses of hypercurvature to a not inflexional plane curve are obtained.*

A seguito di una memoria di T. LEVI CIVITA e G. FUBINI sulle curve analoghe al cerchio osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini (1929-30), A. COLUCCI, passando da quattro a cinque punti infinitamente vicini, si è occupato con ampiezza delle coniche osculatrici ad una data curva piana priva di flessi (1932), studiando punti e rette notevoli, luoghi e inviluppi, legati alla stessa conica osculatrice.

Egli dichiara nell'introduzione che il suo argomento trovasi incidentalmente trattato anche nelle classiche *Lezioni di Geometria intrinseca* di E. CESÀRO (1896). Ma già nel 1894 G. PIRONDINI lo aveva studiato in un periodico portoghese, con lo stesso metodo, con lo studio delle stesse configurazioni geometriche legate alla conica osculatrice. Tuttavia non mancano argomenti trattati solo dall'uno o dall'altro Autore.

Recentemente A. TERRACINI (1959) ha studiato, fra l'altro, le ellissi aventi con una data curva piana priva di flessi un contatto di terzo ordine ed eccentricità minima. E le chiama ellissi di ipercurvatura. Dicendo pure centro e raggio di ipercurvatura il centro dell'ellisse e la distanza di questo dal punto di contatto con la curva data.

In questa nota riprendo dapprima le ellissi di ipercurvatura per studiarle con la stessa rappresentazione di PIRONDINI–COLUCCI, diversa da quella di A. TERRACINI. Stabilisco nuovi risultati per esse e nello stesso tempo per le coniche osculatrici.

Considero poi in particolare le ellissi di ipercurvatura ad una conica e aggiungo altri risultati a quelli assegnati da A. TERRACINI.

Nel corso della trattazione i lavori di G. PIRONDINI, A. COLUCCI, A. TERRACINI, vengono brevemente citati con [P], [C], [T].

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 16 dicembre 1960.

**1.** Sia $(\gamma)$ una curva piana priva di punti di flesso. Ad un suo punto $P$, individuato dall'arco $s$ contato a partire da una origine arbitraria su $(\gamma)$, associamo una coppia di assi $x$ e $y$ secondo la tangente e la normale alla curva in $P$.

Prendiamo per direzione positiva dell'asse $x$ quella della curva secondo la quale il raggio di curvatura cresce, e per direzione positiva dell'asse $y$ quella che va da $P$ al centro di curvatura.

Denotiamo con $s$ e $R$ l'arco e il raggio di curvatura.

La curva sia definita parametricamente dalle

$$x = x(s), \qquad y = y(s).$$

E supponiamo $x(s)$, $y(s)$, $R(s) > 0$, continue e derivabili.

Denotando con apici le derivate rispetto a $s$ si ha

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

E successivamente

$$x'x'' + y'y'' = 0, \qquad x'y'' - y'x'' = \frac{1}{R},$$

da cui

$$Rx'' = -y', \qquad Ry'' = x'.$$

Inoltre

$$x'x''' + y'y''' = -\frac{1}{R^2}$$

$$x'y''' - y'x''' = -\frac{R'}{R^2}$$

$$x''^2 + y''^2 = \frac{1}{R^2}$$

$$x''y''' - y''x''' = \frac{1}{R^3}.$$

Seguendo [$P$ — $C$], al punto $P$ di $(\gamma)$ possiamo associare, oltre al cerchio osculatore $(L)$ di centro $L$, la conica osculatrice $(M)$ di centro $M$ (se a centro), cioé la conica avente in $P$ con la curva $(\gamma)$ un contatto di quarto ordine.

Tale conica osculatrice risulta di equazione

$$9x^2 + (2R'^2 - 3RR'' + 9)y^2 - 6R'xy - 18Ry = 0,$$

ed è ellisse o iperbole secondochè

$$R'^2 - 3RR'' + 9 \gtrless 0.$$

Sia dapprima

$$R'^2 - 3RR'' + 9 = 0.$$

Si ha la parabola osculatrice

$$9x^2 + R'^2y^2 - 6R'xy - 18Ry = 0,$$

$$3x - R'y + \frac{9RR'}{R'^2 + 9} = 0,$$

direttrice

$$R'x + 3y + \frac{3}{2}R = 0,$$

fuoco $F$ di coordinate

$$-\frac{3RR'}{2(R'^2 + 9)}, \qquad \frac{9R}{2(R'^2 + 9)},$$

parametro

$$\frac{27R}{(R'^2 + 9)^{3/2}}.$$

Sia ora

$$R'^2 - 3RR'' + 9 \neq 0.$$

Si ha la conica a centro di equazione soprasegnata, di cui riportiamo le coordinate del centro

$$\frac{3RR'}{R'^2 - 3RR'' + 9}, \qquad \frac{9R}{R'^2 - 3RR'' + 9},$$

e l'area (nel caso di ellisse)

$$\frac{27\pi R^2}{(R'^2 - 3RR'' + 9)^{3/2}}.$$

**2.** Ferme restando le notazioni del paragrafo precedente, con lo stesso procedimento seguito da PIRONDINI e COLUCCI per stabilire la conica osculatrice a $(\gamma)$ in $P$, si può stabilire l'ellisse di ipercurvatura $(N)$ nello stesso punto $P$ di $(\gamma)$.

Questa ellisse risulta di equazione

$$9x^2 + (2R'^2 + 9)y^2 - 6R'xy - 18Ry = 0.$$

Il suo centro $N$ ha le coordinate

$$\frac{3RR'}{R'^2 + 9}, \qquad \frac{9R}{R'^2 + 9},$$

e la sua area è data da

$$\frac{27\pi R^2}{(R'^2 + 9)^{3/2}}.$$

Ciò premesso presentiamo i seguenti risultati:

Confrontando le coordinate di $N$ e $F$ si trova subito [$T$] che dal centro della ellisse di ipercurvatura si passa al fuoco della parabola osculatrice con una simmetria rispetto alla normale in $P$ a $(\gamma)$ e una successiva omotetia di centro $P$ e rapporto $\frac{1}{2}$.

Associando all'area di $(N)$ il parametro della parabola osculatrice si deduce che in ogni punto della curva data $(\gamma)$ l'ellisse di ipercurvatura è equivalente all'ellisse avente per semiassi il raggio del cerchio osculatore e il parametro della parabola osculatrice.

Nei punti di $(\gamma)$ in cui $R' = 0$, la $(N)$ si riduce al cerchio osculatore. Così nella *catenaria*

$$R = a + \frac{s^2}{a}$$

l'ellisse di ipercurvatura nel vertice si riduce al cerchio osculatore, che viene ad avere un contatto di terzo ordine con la curva osculata.

Mentre l'ellisse osculatrice ha un contatto di quinto ordine, per cui il vertice risulta punto sestatico.

Nei punti di $(\gamma)$ in cui $R'' = 0$ l'ellisse di ipercurvatura e quella osculatrice coincidono. Così nella spirale logaritmica

$$R = ks$$

tali ellissi coincidono per ogni punto della curva.

Le curve per le quali il segmento di normale compreso fra il punto $P$ e l'ulteriore intersezione con la relativa ellisse di ipercurvatura è costante ed uguale a $l$, sono le *cicloidali* di equazione

$$R = \frac{9}{4}\frac{(s+c)^2}{l} + \frac{1}{2}l \qquad (c \text{ costante}).$$

L'ulteriore punto $Q$ comune alla ellisse di ipercurvatura e al cerchio osculatore in $P$ ha le coordinate

$$\frac{6RR'}{R'^2+9}, \qquad \frac{18R}{R'^2+9};$$

da cui segue che il centro $N$ dell'ellisse di ipercurvatura è punto medio del segmento $PQ$. Cioè il triangolo $PLN$ è rettangolo in $N$[$T$].

Inoltre il raggio di ipercurvatura $PN$ di ($N$) in $P$ è dato da

$$\frac{1}{2}PQ = \frac{3R}{(R'^2+9)^{1/2}}.$$

Le curve con raggio di ipercurvatura costante ed uguale a $l$ sono di equazione

$$R = l \cos h \frac{3(s+c)}{l} \qquad (c \text{ costante})$$

[Cfr. T per altra rappresentazione parametrica].

Tali curve hanno pure costante il semidiametro passante per $P$ della conica osculatrice, che è una iperbole. I centri $M$ ed $N$ della iperbole osculatrice e della ellisse di ipercurvatura, chiaramente allineati con $P$, stanno da parte opposta rispetto ad esso secondo la relazione

$$PN = 2PM.$$

È stato provato da Gravé che l'area dell'ellisse osculatrice ad una curva data non può restare costante al variare del punto di osculazione, escluso il caso evidente che la curva sia una ellisse.

Mentre qui troviamo che le curve le cui ellissi di ipercurvatura hanno area costante al variare del punto di osculazione sono iperboli equilatere.

Infatti, posto

$$\frac{27R^2}{(R'^2 + 9)^{3/2}} = \frac{1}{c^{3/2}},$$

si ha l'equazione differenziale

$$R'^2 - 9cR^{4/3} + 9 = 0$$

che integrata porta all'equazione intrinseca dell'iperbole equilatera.

3. Con riferimento ad una coppia di assi ortogonali fissi $X$ e $Y$ il luogo dei centri $M$ delle coniche osculatrici alla curva $(\gamma)$ è dato dalle

$$X = x + \frac{3R(R'x' - 3y')}{R'^2 - 3RR'' + 9}$$

$$Y = y + \frac{3R(R'y' + 3x')}{R'^2 - 3RR'' + 9}.$$

Colucci ha provato che tale luogo coincide con la curva inviluppo del diametro $PM$ della conica osculatrice coniugato alla direzione della tangente in $P$ a $(\gamma)$.

E detto $ds_0$ il differenziale dell'arco di curva luogo, e posto

$$\omega = \frac{3R}{R'^2 - 3RR'' + 9},$$

ha stabilito la formula notevole

$$\left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2 = (R'^2 + 9)\left(\omega' + \frac{R'}{3R}\omega\right)^2.$$

Qui completiamo la ricerca assegnando l'altra notevole formula sul raggio di curvatura $R_0$ nei punti della curva luogo:

$$R_0 = \frac{\omega}{3}(R'^2 + 9)^{3/2}\left(\omega' + \frac{R'}{3R}\omega\right).$$

Scriviamo le equazioni del luogo nella forma

$$X = x + \omega\,(R'x' - 3y')$$

$$Y = y + \omega(R'y' + 3x')$$

e applichiamo la formula

$$R_0 = \frac{\left(\dfrac{ds_0}{ds}\right)^3}{\dfrac{dX}{ds}\dfrac{d^2Y}{ds^2} - \dfrac{dY}{ds}\dfrac{d^2X}{ds^2}}.$$

Eseguendo per il denominatore della precedente calcoli ordinari, esprimendo le espressioni $x'^2 + y'^2$, $x'x'' + y'y''$, $x'y'' - y'x''$, $x'x''' + y'y'''$, $x'y''' - y'x'''$, $x''^2 + y''^2$, $x''y''' - y''x'''$ come nell'introduzione, applicando le sostituzioni

$$R'' = \frac{R'^2 + 9}{3R} - \frac{1}{\omega},$$

$$R''' = \frac{\omega'}{\omega^2} - \frac{R'}{R}\frac{1}{\omega} - \frac{R'R''}{3R} = \frac{\omega'}{\omega^2} - \frac{2R'}{3R\omega} - \frac{R'(R'^2 + 9)}{9R^2},$$

si ottiene

$$\frac{dX}{ds}\frac{d^2Y}{ds^2} - \frac{dY}{ds}\frac{d^2X}{ds^2} = \frac{3}{\omega}\left(\omega' + \frac{R'}{3R}\omega\right)^2.$$

Da cui, risalendo, si perviene alla già segnata formula per $R_0$.

L'eliminazione, poi, di $s$ tra le espressioni di $s_0$ e $R_0$ porta all'equazione

$$R_0 = R_0(s_0)$$

della curva luogo.

Così per la spirale logaritmica $R = Ks$ si ha

$$R' = K, \qquad R'' = 0, \qquad \omega = \frac{3Ks}{K^2 + 9}, \qquad \omega' = \frac{3K}{K^2 + 9},$$

$$s_0 = \frac{4Ks}{(K^2 + 9)^{1/2}}, \qquad R_0 = \frac{4K^2 s}{(K^2 + 9)^{1/2}}, \qquad R_0 = Ks_0.$$

E si trova che il luogo dei centri delle ellissi osculatrici ad una spirale logaritmica è una nuova spirale logaritmica uguale alla prima e avente lo stesso polo [Cfr. $P$ per altra trattazione].

**4.** Il luogo dei centri $N$ delle ellissi di ipercurvatura è definito dalle

$$X = x + \frac{3R(R'x' - 3y')}{R'^2 + 9}$$

$$Y = y + \frac{3R(R'y' + 3x')}{R'^2 + 9},$$

e anche per questa curva luogo si possono calcolare l'arco $s_i$ e il raggio di curvatura $R_i$ in funzione dell'arco $s$ della curva data.

Ci limitiamo ad assegnare la sola prima formula

$$\left(\frac{ds_i}{ds}\right)^2 = \left[R'\left(\omega' + \frac{R'}{3R}\omega\right) + \omega R''\right]^2 + 9\left(\omega' + \frac{R'}{3R}\omega\right)^2,$$

che si ottiene con procedimenti ordinari e qualche artificio di calcolo.

**5.** Nel caso in cui la curva data $(\gamma)$ è una conica, la curva luogo dei suoi centri di ipercurvatura è stata trovata da A. Terracini.

Qui aggiungiamo qualche altro risultato.

L'ellisse data $(\gamma)$ sia riferita ai suoi assi e sia di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La relativa ellisse di ipercurvatura nel suo punto $P(x_0, y_0)$ risulta di equazione

$$\frac{1}{a^2}\left(\lambda + \mu\frac{x_0^2}{a^2}\right)x^2 + \frac{1}{b^2}\left(\lambda + \mu\frac{y_0^2}{b^2}\right)y^2 + 2\mu\frac{x_0 y_0}{a^2 b^2}xy -$$

$$- 2\mu\frac{x_0}{a^2}x - 2\mu\frac{y_0}{b^2}y + \mu - \lambda = 0$$

con

$$\lambda = a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2, \qquad \mu = 2x_0^2 + 2y_0^2 - a^2 - b^2.$$

Ha per centro il punto $N$ di coordinate

$$\left(2 - \frac{a^2 + b^2}{x_0^2 + y_0^2}\right) x_0, \qquad \left(2 - \frac{a^2 + b^2}{x_0^2 + y_0^2}\right) y_0 ;$$

i semiassi

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}\right)^{3/4} \left[(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}(a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2)^{1/2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{a^2 - b^2}{ab} x_0 y_0 \right]^{1/2},$$

l'area

$$\pi ab \left(\frac{a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}\right)^{3/2}.$$

Al noto raggio di curvatura

$$R = \frac{(a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2)^{3/2}}{ab}$$

si può associare quello di ipercurvatura

$$PN = \frac{a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}};$$

e l'area dell'ellisse di ipercurvatura risulta data dalle espressioni

$$\pi \frac{a^2 b^2 R}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}}$$

$$\pi ab \frac{PN^{3/2}}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/4}}.$$

**6.** Se la curva data $(\gamma)$ è la parabola $y^2 = 2px$, l'ellisse di ipercurvatura nel suo punto $P(x_0, y_0)$ ha l'equazione

$$p^2x^2 + (p^2 + 2y_0^2)y^2 - 2py_0xy - p(2p^2 + y_0^2)x - y_0^3y + p^2x_0^2 = 0.$$

Ha per centro il punto di coordinate

$$3x_0 + p, \qquad y_0;$$

i semiassi

$$\frac{(p^2 + y_0^2)^{3/4}}{p}[(p^2 + y_0^2)^{1/2} \pm y_0]^{1/2}$$

l'area

$$\pi\frac{(p^2 + y_0^2)^{3/2}}{p}.$$

Al noto raggio di curvatura

$$R + \frac{(p^2 + y^2_0)^{3/2}}{p^2}$$

si può associare quello di ipercurvatura

$$PN = p + 2x_0 = \frac{p^2 + y_0^2}{p};$$

e per l'area dell'ellisse di ipercurvatura valgono le altre due espressioni

$$\pi pR, \qquad \pi(p \cdot PN^3)^{1/2},$$

la prima delle quali vale più in generale (n. 2).

7. Sia infine l'iperbole equilatera $xy = K$ la curva data $(\gamma)$. L'ellisse di ipercurvatura in un suo punto $P(x_0, y_0)$ ha l'equazione

$$K^2x^2 + x_0^4y^2 - 4K^2x_0x - 4Kx_0^3y + 6K^2x_0^2 = 0.$$

È di centro $\left(2x_0, \dfrac{2K}{x_0}\right)$; semiassi $x_0\sqrt{2}$, $\dfrac{K}{x_0}\sqrt{2}$; area costante $2\pi K$.

Il centro di ipercurvatura relativo al punto $P$ è simmetrico del centro dell'iperbole rispetto a $P$.

I suoi quattro fuochi sono di coordinate

$$\frac{1}{x_0}[2x_0^2 + \sqrt{2(x_0^4 - K^2)}], \qquad \frac{2K}{x_0};$$

$$2x_0, \qquad \frac{1}{x_0}[2K + \sqrt{2(K^2 - x_0^4)}];$$

$$\frac{1}{x_0}[2x_0^2 - \sqrt{2(x_0^4 - K^2)}], \qquad \frac{2K}{x_0};$$

$$2x_0, \qquad \frac{1}{x_0}[2K - \sqrt{2(K^2 - x_0^4)}].$$

Da cui: se $x_0^2 > K$ i fuochi reali sono il primo e il terzo e stanno su una parallela all'asse $x$; se $x_0^2 < K$ sono reali il secondo il quarto e stanno su parallela all'asse $y$.

In ogni caso gli assi delle ellissi di ipercurvatura sono paralleli agli asintoti dell'iperbole equilatera data.

Per $x_0^2 \geq K$ la curva luogo dei fuochi è di equazione

$$2(xy - 4K)^2 + y^4 = 16K^2 .$$

È una quartica compresa nel primo e terzo quadrante, simmetrica rispetto all'origine, con un tacnodo nel punto all'infinito dell'asse $x$ che risulta tangente doppia.

Nel primo quadrante è compresa tra le sue tangenti $y = 0$, $y = 2\sqrt{K}$ nel punto $(2\sqrt{K}, 2\sqrt{K})$, $y = \sqrt{2}x$ nel punto $(\sqrt[4]{2K^2}, \sqrt[4]{8K^2})$; nel terzo quadrante tra le sue tangenti $y = 0$, $y = -2\sqrt{K}$ nel punto $(-2\sqrt{K}, -2\sqrt{K})$, $y = \sqrt{2}x$ nel punto $(-\sqrt[4]{2K^2}, -\sqrt[4]{8K^2})$.

Per $x_0^2 \leq K$ la curva luogo dei fuochi è di equazione

$$2(xy - 4K)^2 + x^4 = 16K^2,$$

deducibile dalla precedente con lo scambio di $x$ e $y$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] E. CESÀRO, *Lezioni di Geometria intrinseca*, 1896.

[2] A. COLUCCI, *Sulle coniche osculatrici ad una data curva*, « Annali del R. Istituto Sup. Navale », I, 251-278 (1932).

[3] T. LEVI CIVITA-G. FUBINI, *Sulle curve analoghe al cerchio osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini*, « Annali di Matematica », (4), VII, 193-211 (1929-30).

[4] G. PIRONDINI, *Sur la conique osculatrice des lignes planes*, « Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, XI, 9-41 (1894).

[5] A. TERRACINI, *Gli elementi curvilinei piani del terz'ordine e una generalizzazione del teorema di Meusnier*, « Bollettino Unione Matematica Italiana », (III), XIV, 66-77 (1959).