Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Kàrteszi

Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.4, p. 522–528.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_4_522_0>

Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo.

Nota di Francesco Kàrteszi (a Budapest) (*)

Sunto. - *In questo articolo l'autore mostra un nuovo legame fra la geometria di un piano finito e la teoria dei grafi.*

Introduzione

Un certo insieme di *punti* (o vertici) e *spigoli* (od archi) forma un *grafo*. Ogni spigolo del grafo congiunge due punti distinti del grafo; questi punti sono gli *estremi* dello spigolo. Si può congiungere due punti distinti del grafo con un *unico* spigolo. Il numero dei punti di un grafo si chiama *ordine del grafo*.

Siano i vertici $P_1, P_2, \ldots, P_l$ e gli archi $P_1P_2, P_2P_3 \ldots, P_lP_1$ punti e spigoli appartenenti al grafo Γ, allora il circuito $P_1P_2 \ldots P_l$ si chiama l-circuito di Γ; l si chiama la *lunghezza* del circuito. Consideriamo tutti i circuiti di Γ e le lunghezze dei circuiti; sia l la minima lunghezza, allora il valore l verrà chiamato *classe*

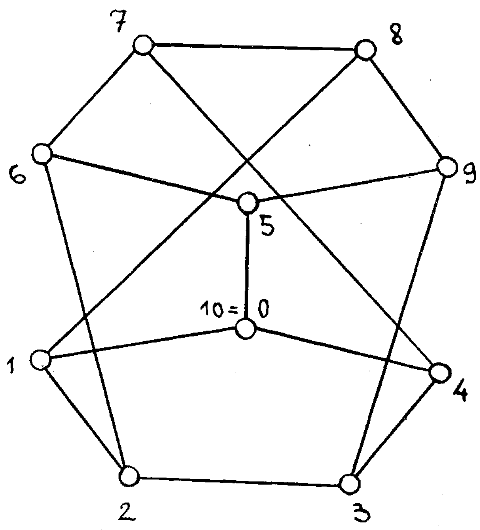


Fig. 1

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 20 dicembre 1960.

di Γ. Se un grafo Γ di ordine n contiene un n–circuito, allora questo circuito si chiama *circuito Hamiltoniano*, e si dice che Γ, è *un grafo di Hamilton.*

Se ogni punto è comun estremo esattamente di k spigoli, allora Γ verrà chiamato *un grafo regolare di grado* k.

Se tutti i punti di Γ si distribuiscono in r classi in tal modo che gli estremi di un spigolo arbitrario devono appartenere a due classi distinte (cioè è vietato congiungere due punti della medesima classe), allora Γ verra chiamato un r–*grafo.*

Il grafo di PETERSEN (fig. 1), è un grafo ben conosciuto.

Al Colloquio Ungherese di Grafo-Teoria nell'autunno 1959 l'autore — partendo da una nuova definizione del grafo di PETERSEN — proponeva un problema di minimo-combinatorio.

Come si può dimostrare facilmente: *il grafo di Petersen è l'unico grafo regolare di terzo grado di quinta classe che ha d'ordine minimo.*

Siano dati i numeri naturali k ed l (k, $l \geqq 3$) come grado e classe di un grafo regolare, e sia $F(k, l) = n$ *il minimo ordine* del grafo che realizza le dette condizioni. Tal grafo minimo verrà denotato con $\Gamma(n; k, l)$; in tal modo $\Gamma(10; 3, 5)$ denota il grafo di PETERSEN.

PROBLEMA. – *Se* k *ed* l *sono numeri dati, si vuol determinare il numero minimo* n *e si vuol costruire una struttura* Γ(n; k, l).

Al Colloquio ricordato, V. T. TUTTE aveva risolto subito il problema nel caso se $k = 3$, $l = 6$ poi H. SACHS ha trovato la soluzione nel caso se $k = 3$. $l = 7$.

L'autore ha trovato i risultati e le costruzioni relative:

caso:	I	II	III	IV	V	VI
$k =$	3	3	3	3	3	3
$l =$	3	4	5	6	7	8
$n =$	4	6	10	14	24	30

Le figure 2-4 rappresentano i casi IV-VI.

L'autore finalmente ha trovato un risultato di carattere più generale: *Se* $k = 1 + p^{\alpha}$ ed $l = 6$ *(dove* p^{α} *è una potenza di un numero primo), allora* $n = 2(1 + p^{\alpha} + p^{2\alpha})$; ed il grafo $\Gamma(n; k, l)$ *relativo si può realizzare con un 2–grafo di Hamilton.*

La costruzione di $\Gamma(n; k, 6)$ segue dalla matrice di incidenza del piano proiettivo sopra un campo di GALOIS d'ordine p^α.

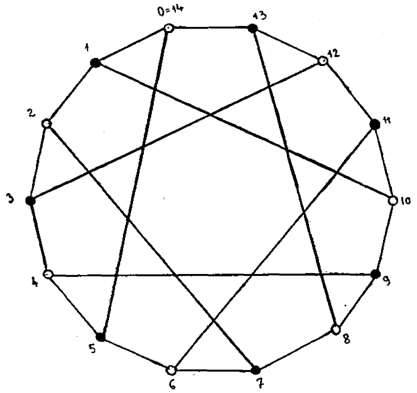
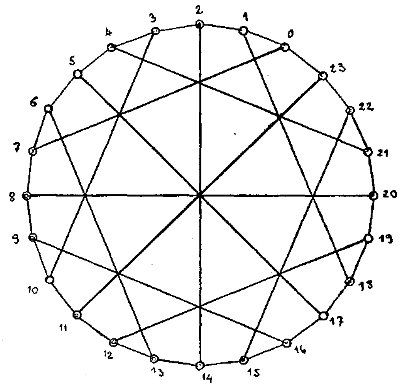


Fig. 2



Fi . 3

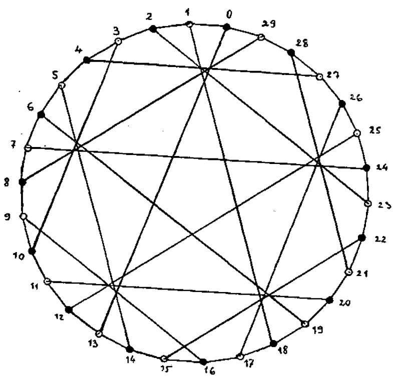


Fig. 4

La costruzione di un $\Gamma(n; k, l)$ nel caso in cui siano $l = 6$ e $k = 1 + p^\alpha$ (ove p è un numero primo).

1. Incominciamo con un

LEMMA. - *Se* p *è primo ed* α *è un numero naturale e* $(k, l) = (1 + p^\alpha, 6)$, *allora* $n \geqq 2(1 + p^\alpha + p^{2\alpha})$.

La fig. 5. rappresenta una parte del $\Gamma(n; 5, 6)$. Consideriamo lo spigolo arbitrario del $\Gamma(n; 1 + p^\alpha, 6)$, il quale verrà denotato con $(1, 2)$ — ove gli estremi dello spigolo sono denotati coi 1 e 2 —. Da ogni estremo escono nuovi spigoli di numero p^α. Da ogni nuovo estremo così ricevuto escono nuovi spigoli con estremi nuovissimi. Quest'ultimi estremi si dividono in due classi (la classe dei punti bianchi e la classe dai punti neri della fig. 5). È chiaro che in ogni classe ci sono gli estremi di numero $p^{2\alpha}$. Prima di uscire da questi ultimi punti non si può ritornare ad un estremo precedente, perchè il grafo Γ non contiene l-circuito se $l < 6$. Dunque il numero dei punti di questa parte del grafo è $2(1+p^{\alpha}+p^{2\alpha})$, ne segue l'asserto del lemma.

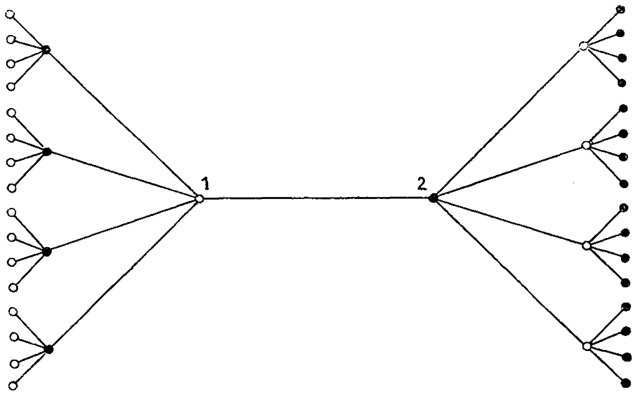


Fig. 5

2. Un siffatto grafo — che non contiene circuito — verrà denotato con $H(p^{\alpha})$, o per la brevità con H. Gli estremi di H sono i punti bianchi ed i punti neri, ambedue le classi contengono $p^{2\alpha}$ estremi distinti. In ogni altro punto di H s'incontrano $1+p^{\alpha}$ spigoli distinti.

Ora il problema è di dimostrare che si può congiungere convenientemente certe coppie di punti di colori distinti per modo che dal grafo $H(p^{\alpha})$ sia derivato il grafo $\Gamma(n;\ 1+p^{\alpha},\ 6)$.

Prima di tutto, per esprimere la struttura di un 2-grafo arbitrario, costruiamo una matrice nel modo seguente. Siano i punti di due classi del 2-grafo; punti bianchi e punti neri.

Le righe e le colonne della matrice corrispondono biunivocamente ai punti bianchi ed ai punti neri. Gli elementi della matrice $a_{jh}=1$ od $a_{jh}=0$ secondochè lo spigolo P_jQ_h esiste o no (dove P_j denota un punto bianco e Q_h denota un punto nero). Questa matrice si chiama *matrice di 2-grafo.* [1]

Ora consideriamo una matrice d'incidenza di un piano proiettivo sopra un campo di Galois d'ordine p^{α}. Questa matrice d'incidenza si può produrre come una matrice circolante [2, 3]. Indichiamola con $S(p^\alpha)$, o per la brevità con S. Per $p=3$, $\alpha=1$ è la matrice circolante d'incidenza:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} = S.$$

Nel caso generico è ben noto che la matrice $S(p^\alpha)$ ha le proprietà: *a*) il numero delle righe o lo stesso delle colonne è $1+p^\alpha+p^{2\alpha}$; *b*) gli elementi che sono eguali ad 1 in ogni riga ed in ogni colonna sono in numero di $1+p^\alpha$; *c*) non contiene nessun minore del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che si può considerare la $S(p^\alpha)$ come matrice di un 2-grafo d'ordine $2(1+p^\alpha+p^{2\alpha})$ che è regolare di grado $1+p^\alpha$ e non contiene l-circuito se $l<6$. (Essendo il grafo in parola 2-grafo, conseguentemente, se contiene un l-circuito, il numero l dev'essere pari).

Quindi è chiaro che aggiungendo al grafo $H(p^\alpha)$ soltanto nuovi spigoli si può produrre il grafo $\Gamma(n;\ 1+p^\alpha,\ 6)$.

3. Per costruire un $\Gamma(n;\ k,\ l)$ se $k=1+p^\alpha$ ed $l=6$ cioè se $n=2(1+p^\alpha+p^{2\alpha})$ consideriamo un ennagono regolare Σ, denotando i suoi vertici coi numeri $1, 1', 2, 2', \ldots, n, n'$ e siano i punti

1, 2, ..., n bianchi ed i punti $1'$, $2'$, ..., n' neri. (Se $p^\alpha = 3$ ved. la fig. 6).

Facciamo ora una corrispondenza biunivoca fra Σ ed $\boldsymbol{S}(p^\alpha)$.

Il punto r od il punto r' corrisponde alla r-esima riga od alla r'-esima colonna; la linea rs' è esistente od inesistente secondochè $a_{rs} = 1$ od $a_{rs} = 0$ nella matrice $\boldsymbol{S}(p^\alpha)$. In tal modo da Σ deriva un modello disegnato per rappresentare il grafo $\Gamma(2(1 + p^\alpha + p^{2\alpha});\ 1 + p^\alpha, 6)$. Essendo $\boldsymbol{S}(p^\alpha)$ una matrice circolante conseguentemente

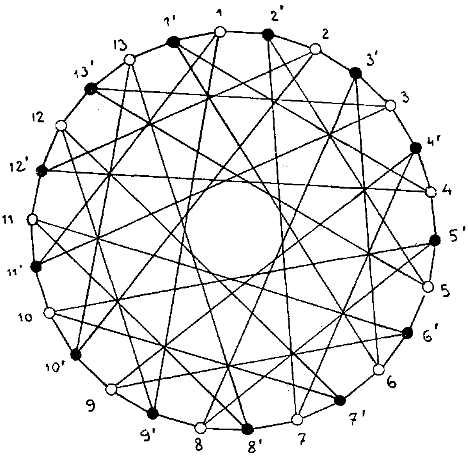


Fig. 6

questa figura è girevole attorno il centro di Σ; l'ampiezza della rotazione è eguale a $2\pi/n$. Dalla costruzione di questa figura è chiaro che il grafo ottenuto è un *Hamiltoniano*.

Osservazioni

I. Si presenta la questione seguente. Sia dato un convesso emmagono regolare il quale sia iscritto nel cerchio C. Designando i vertici coi numeri 1, 2, ..., m prendiamo qualche corda che congiunge due di questi vertici, nel modo che sia il grafo derivato dall'emmagono un grafo regolare di grado k. Consideriamo tutti i circuiti del grafo e sia l il numero minimo per cui il grafo ha l-circuiti. Se k ed l sono numeri dati, quale sarà il minimo valore di m?

Per esempio: se $(k, l) = (3, 5)$ allora min. $m = 12$.

II. - Consideriamo l'emmagono convesso regolare, Σ, che è circoscritto nel cerchio C, se $q(> 1)$ è dato un numero intero ed

$m = 1 + q + q^2$. Togliendo dai vertici di Σ certi punti in numero di $1 + q$ è possibile che tutte le distanze fra questi ultimi punti sono distinte. Quali sono i numeri coi quali si può soddisfare questa esigenza?

Sia $q \geq 5$ e adatto per soddisfare l'esigenza sopraddetta. Siano $P_{j1}, P_{j2}, \ldots, P_{j,q+1}$ i vertici in parola e sia Π il poligono convesso definito da questi vertici. Si può dimostrare facilmente che il centro di C è situato nell'interno di Π.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. KÖNIG, *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen,* Leipzig. 1936 (Akad. Verl. M. B. H.).

[2] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna,* vol. I; Bologna, 1948 (Zanichelli).

[3] MARSHALL HALL, Jr., *The theory of Groups,* New York, 1959 (The Macmillan Company).

J. SINGER, *A theorem in finite projective geometry and some Applications to number theory,* «Trans Amer. Math. Soc.», 43, 1938, p. 377-385.

[4] P. TURÀN, *Eine Extremalaufgabe aus der Graphen-Theorie,* «Matematikai és Fizikai Lapok, XLVIII, p. 436-452.

P. T., (and V. TURÀN, T. KÖVÀRI) *On a problem of K. Zarenkiewicz,* «Coll. Math.», 3, 1954, p. 50-57.

[5] I. REIMAN, Über ein Problem von K. ZARENKIEWICZ, «Acta Math.», Hung., T. IX. F. 3-4, p. 269-273.

[6] F. KÀRTESZI, *Egy reguláris gráfra vonatkozó minimum-probléma,* II. Magyar Matematikai Kongresszus «Elöadáskivonatok», vol. I. p. 28-29.

[7] I. REIMAN, *Eine Extremalaufgabe bezüglich Graphen,* II. Magy. Mat. Kongr. «Elöadáskivonatok», vol. I. p. 55-56.

[8] G. RINGEL, *Konfigurationen und Schliessungssätze,* «Wiss. Z. Univ. Halle», Math.-Nat. IX/4, S. 573-574.

— Gli articoli 4-8 studiano problemi analoghi al problema dell'A.