UMI

Recensioni.

* Gaetano Scorza, Opere Scelte, Vol. I, Edizioni Cremonese, Roma, 1960 (Alessandro Terracini)
* G. Fubini, Opere Scelte, Voll. I e II, Edizioni Cremonese, Roma, 1957-58 (Tullio Viola)
* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften B. I 2, H. 13, T. I, Hua Loo-Keng, Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Ed. Teubner, Leipzig, 1959 (Marco Cugiani)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.4, p. 529–539.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_4_529_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

RECENSIONI

GAETANO SCORZA: *Opere scelte*, a cura dell' Unione matematica italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, volume I. Edizioni Cremonese, Roma 1960, pp. 513, L. 5000.

È questo il primo dei tre volumi nei quali saranno pubblicate le *Opere scelte* di Gaetano Scorza, comprendenti Note e Memorie dell'illustre Geometra, in base a un progetto preparato per incarico dell' U.M.I. dai professori Lucio Lombardo Radice, Nicola Spampinato e Guido Zappa, i quali, insieme col prof. Giuseppe Scorza Dragoni, sono stati altresì incaricati di curare la pubblicazione.

La raccolta completa comprendeva complessivamente 82 Note e Memorie, fra i 114 numeri (compresi tra essi i volumi) che costituiscono la Bibliografia dello Scorza. I lavori vengono riprodotti in ordine cronologico: la loro successione mette spontaneamente in evidenza l'evolversi dell'interesse dell'Autore dagli uni verso gli altri campi della matematica. Le Note e Memorie incluse in questo volume I corrispondono agli anni 1899-1914, cioè ai primi quindici anni del periodo di circa un quarantennio al quale si estese l'attività dello Scorza (il quale — ricordiamolo —, nato nel 1876, morì il 6 agosto 1939).

I primi lavori contenuti in questo volume I appartengono decisamente all'indirizzo proiettivo. Si segnala tra essi la Memoria 4 (1), che riproduce la Tesi di laurea, nella quale la teoria delle figure polari delle curve piane algebriche viene ricostruita in modo semplice e completata, per essere poi applicata alle curve del quart'ordine. Per il caso delle cubiche, lo Scorza aveva già, nella Nota 3, illuminate geometricamente le ricerche di F. London sullo stesso tema. Le quartiche piane ricompaiono poi anche nella Nota 5, dove Scorza ha dimostrato che ogni quartica piana generale si può considerare come « covariante S » (2) di altre 36.

Connessi in qualche modo col precedente sono anche i lavori che rispondono ai numeri 6, 8, 13, 7, i primi tre dei quali si intitolano alle corrispondenze (p, p) esistenti sulle curve di genere p a moduli generali. Lo Scorza ha studiato queste corrispondenze cercando di generalizzare, in un modo diverso da quello che aveva adottato Castelnuovo, la teoria delle corrispondenze biunivoche sulle curve ellittiche, quale era stata considerata da Corrado Segre. Nel caso $p = 3$, considerando come modello una quartica

(1) Ci riferiamo alla numerazione adottata nell'elenco degli scritti di G. Scorza, quale figura alle pp. 13-18 del volume in esame. Gli scritti riprodotti nel volume stesso corrispondono ai numeri 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 38.

(2) Ricordiamo che si chiama covariante S di una c^4 il luogo di un punto la cui cubica polare sia equianarmonica.

piana generale, entravano in gioco le 36 quartiche di cui nel lavoro 5: nel lavoro 7 lo Scorza ha approfondito un punto di vista analogo nel caso di $p > 3$ qualunque, riferendosi al modello costituito da una curva canonica di genere p e ordine $2p-2$ in uno spazio S_p.

Del 1908 è la ricerca 14, nella quale lo Scorza ha determinato quali sono le varietà a tre dimensioni, i cui S_3 tangenti sono a due a due incidenti, riuscendo così a risolvere per le V_3 il problema analogo a quello che per la superficie conduce alla superficie di Veronese secondo la caratterizzazione assegnatane da Del Pezzo. Il tipo più interessante di V_3 trovato da Scorza è quello delle V_3 razionali a curve sezioni ellittiche, quali erano state considerate da Enriques. Il lavoro 14 condusse poi lo Scorza, da un lato a proporsi ed effettuare la determinazione delle varietà a più di tre dimensioni a curve sezioni ellittiche (16), d'altro lato alla Memoria 19 nella quale — pur mancando in essa qualche cosa al raggiungimento completo dello scopo — egli ha effettuata per le varietà a quattro dimensioni la ricerca analoga a quello che costituiva l'oggetto della 14. Si trattava dunque di determinare le V_4 di S_r $(r \geq 9)$ i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due in un punto: lo Scorza, dopo aver dimostrato che lo S_8 contenente due S_4 tangenti di una tale V_4 contiene anche quelli ad essa tangenti nei singoli punti di tutta una varietà, classifica quelle V_4 in tre specie, secondochè la varietà menzionata è a tre dimensioni, oppure una superficie, oppure una linea. Egli ha risolto completamente il problema per le V_4 di prima e di terza specie, ma non ha potuto condurre a fondo la ricerca per quelle di seconda specie.

In un ordine di idee ravvicinabile a quello delle Memorie 14, 19 troviamo poi anche il breve lavoro 17, nel quale, movendo da una formulazione equivalente relativa ai sistemi lineari esistenti su una superficie algebrica, lo Scorza risolve il problema di determinare le superficie di S_r $(r \geq 6)$ dotate della proprietà che lo S_5 ad esse tangente in due loro punti generici risulta tangente lungo tutta una linea E (3).

Con le due voluminose Memorie 21, 24, la seconda delle quali costituisce la continuazione della prima (sono complessivamente oltre 120 pagine di stampa), lo Scorza ha portato esaurientemente a compimento la determinazione delle superficie a sezioni di genere 3, che Castelnuovo aveva iniziata nel 1890. Nella prima di esse, lasciato a parte il caso ovvio delle F^4, e suddivise le superficie in esame in due specie, la prima delle quali si identifica con le superficie che già erano state enumerate da Castelnuovo, stabilisce che ogni superficie di seconda specie ha al più l'ordine 8, e appartiene al massimo ad uno S_5, e, dimostrato che nello spazio ordinario una superficie normale di seconda specie è necessariamente del sesto ordine, attraverso una ricerca minuziosa e coronata da successo in quanto lo conduce a superficie nuove, determina effettivamente le F^6 di seconda specie normali nello spazio ordinario. Di queste superficie viene poi studiata la riduzione ad un cono cubico per mezzo di una trasformazione cremoniana nella Memoria 24, la quale contiene altresì i risultati relativi alle superficie di seconda specie iperspaziali.

Piuttosto particolari nella loro portata, ma notevoli anche perchè sembrano aprire la via alla posizione di un problema di una certa generalità, sono le Note 22 e 23. Nella prima, prendendo le mosse dal noto teorema secondo il quale una V_3^4 dello S_6, che sia segata da ogni S_5 secondo una superficie di Veronese è necessariamente un cono, Scorza lo estende al

(3) Per una piccolissima riserva sull'enunciato dato dallo Scorza, cfr. A. Terracini: *Su due problemi, concernenti la determinazione di alcune classi di superficie, considerati da G. Scorza e da F. Palatini*, Atti della Soc. dei Naturalisti e Matematici di Modena, (5), vol. 6, 1921.

caso in cui la superficie sezione iperpiana generica di una V_3 è una F^{n^2} rappresentabile su un piano mediante la totalità delle curve di ordine n. Più riposto è il risultato contenuto nella Nota 23, dove si considera una varietà iperspaziale che sia segata da ogni iperpiano generico secondo una varietà di Segre, prodotto di n spazi $[p_1]$, $[p_2]$, ..., $[p_n]$, e si dimostra che essa è necessariamente un cono, con la sola eccezione del caso $n = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, che conduce anche alla quadrica generale di S_4. A questo proposito sia permesso al recensore ricordare che questi due risultati dello Scorza e alcuni altri analoghi (4) lo hanno portato molti anni fa a porre il problema delle « varietà a sezioni collineari », che ha dato luogo a una Nota di Guido Fubini e a due lavori di Gino Fano (5).

Opportunamente la Commissione che ha curata la raccolta ha inclusa anche la pubblicazione 28. Essa riproduce un opuscolo « Brevi cenni di fotogrammetria teorica », che non ebbe grande diffusione, inteso a esporre alcune questioni di fotogrammetria destinate al corso libero di Geometria descrittiva tenuto dallo Scorza a Palermo nell'anno accademico 1911-1912, e segnatamente ad apportare qualche complemento al cosidetto teorema fondamentale del Finsterwalder, stabilendo (senza uscire dai mezzi dimostrativi adatti ad un corso propedeutico) che la forma di una figura dello spazio di cui siano note quattro prospettive può determinarsi, nel campo complesso, in 40 maniere diverse.

Verso gli ultimi anni del quindicennio corrispondente al presente volume, l'attenzione delio Scorza cominciò a essere attirata verso questioni che segnarono una svolta importante nella sua attività. Troviamo qui il lavoro 34, concernente il teorema di esistenza delle funzioni abeliane, nel quale le condizioni perchè una matrice $p \times (2p)$ possa considerarsi come la tabella di un sistema di periodi indipendenti per una funzione abeliana di p variabili vengono espresse nella forma che per $p = 2$ avevano già assegnato Bagnera e De Franchis. E troviamo anche la Nota 38 sulle funzioni iperellittiche singolari di due variabili, dove Scorza ha introdotto per la prima volta una rappresentazione geometrica — che egli poi generalizzerà in avvenire —, la quale in questa Nota si dimostra atta a fornire una nuova dimostrazione perspicua di una proprietà altrimenti riposta. I lavori 32, 33, 35 (l'ultimo dei quali assegna le condizioni affinchè una forma Hermitiana sia definita) sono in qualche modo connessi col 34, o nella sua redazione definitiva, o in una precedente, poi abbandonata dall'Autore perchè meno semplice. E il lavoro 29, del 1911, intitolato a una classe di varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo ∞^2 di trasformazioni birazionali in sé, segna il primo apparire delle varietà abeliane nella produzione di Scorza.

Il volume in esame contiene anche tre lavori (9, 10, 11) coi quali, nei suoi anni giovanili, tra il 1901 e il 1903, lo Scorza collaborò al *Giornale degli Economisti,* presentando osservazioni critiche, particolarmente nei riguardi di Walras e di Pareto, relative alle condizioni di equilibrio di un mercato, e al massimo di ofelimità dato dalla libera concorrenza. Questi lavori testimoniano come Scorza sapesse affrontare questioni ben lontane da quelle che hanno poi costituito i suoi campi preferiti di indagine; nè questo stupisce chi conoscesse l'ampiezza della sua cultura e il suo spirito poliedrico.

(4) Cfr. A. TERRACINI: *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà,* Nota I, Atti Acc. Sc. di Torino, vol. XLIX, 1914; v. il n. 6, e le citazioni contenute nella nota (20).

(5) GUIDO FUBINI: *Sulle varietà a sezioni collineari,* Rend. Acc. Lincei, (6), vol. I, 1925, pp. 469-473; GINO FANO: *Sulle superficie dello spazio S_3 a sezioni piane collineari,* ibid., pp. 473-477, *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni piane collineari,* Memorie Acc. dei Lincei, (6), vol. II, pp. 115-129.

Al volume è premessa, come efficacissima Introduzione, la bella commemorazione dello Scorza che il Berzolari lesse all'Istituto Lombardo. Le doti che il Berzolari mette in rilievo nel complesso della produzione dello Scorza: importanza dei risultati, spesso conseguiti come frutto di geniali vedute unificatrici alle quali fa riscontro l'esauriente finitezza dei particolari, succinta eleganza dei procedimenti così sintetici come algoritmici, presentati con tanta cristallina limpidezza di forma da costituire una vera opera d'arte, emergono già ampiamente nei lavori del primo periodo di attività, riprodotti in questo volume, lavori che nel lettore anziano suscitano una folla di ricordi, e che ci auguriamo circolino ampiamente anche tra le mani dei lettori più giovani, i quali vi troveranno un modello di eleganza geometrica e di compiutezza dell'esposizione.

ALESSANDRO TERRACINI

G. FUBINI: *Opere Scelte*, Voll. I e II (Ediz. Cremonese, Roma 1957-58).

I due volumi in esame raccolgono note e memorie del primo periodo di produzione (1897-1911) del brillante, geniale analista e geometra italiano. La saggia deliberazione del Comitato cui l'Unione Matematica Italiana aveva affidato il compito della scelta e della nuova edizione delle opere del FUBINI, di escludere i lavori di geometria projettiva differenziale perchè assorbiti in qualche modo dai due celebri trattati pubblicati in collaborazione col ČECH, ha consentito di raccogliere i lavori d'analisi e quelli sui gruppi discontinui e sulle metriche hermitiane, con notevole ampiezza. La deliberazione doveva imporsi, con evidente necessità, per il carattere unitario e potentemente sintetico dell'opera del FUBINI, carattere che doveva rendere molto difficile l'esclusione di qualche lavoro, senza sacrificare tutto un intero gruppo di lavori ad esso concettualmente ed intimamente collegati. Se qualche sacrificio in tal senso è stato innegabilmente compiuto, ci sembra doveroso riconoscere che la scelta è stata fatta con grande oculatezza e con rara competenza: sacrificio inevitabile del resto, dati i limiti di spazio, imposti dall'Ufficio di presidenza dell' U.M.I., che, a pubblicazione avvenuta del terzo ed ultimo volume, risulteranno pur largamente superati. Un altro motivo di gratitudine al Comitato, particolarmente al prof. A. TERRACINI coordinatore e revisore, offrono alcune correzioni ed aggiunte originali (che qui appaiono per la prima volta in apposite note) fortunatamente potute rilevare da una raccolta di estratti, già in possesso dell'Autore e gentilmente concessa in visione.

Il criterio seguito, di disporre i lavori semplicemente in ordine cronologico, rispetta senza dubbio, come il TERRACINI dichiara, l'evoluzione delle idee del FUBINI, senza compromettere di fatto il raggruppamento per materie, almeno in linea generale. Ci sia permesso di segnalare che due lievi errori, nel seguire il detto criterio, sono pur tuttavia sfuggiti (1).

Nella commemorazione del FUBINI, tenuta da B. SEGRE all'Accademia dei Lincei il 13-11-1954 e qui integralmente riportata, è rilevata la grande varietà, oltre che degli argomenti trattati, anche di struttura e di stile, la forza d'intuizione, la maestria nell'uso degli algoritmi più elevati, la capacità di « pervenire a risultati riposti attraverso a calcoli formidabili, inabbordabili ai più » ... « FUBINI, dice molto bene il SEGRE, amava gli affreschi grandiosi e rifuggiva da casi e questioni particolari, il cui studio di solito lasciava

(1) Il lavoro XX è da scambiarsi di posto col XXII (vol. II, pp. 21 e 39), il lavoro XLV col XLVI (vol. II, pp. 309 e 318).

deliberatamente ad altri. Ciò non toglie che nulla vi sia in Lui del matematico astratto ... ». Stile talvolta limpido e piano, tal'altra, quasi per un'impennata improvvisa, oscuro e conciso (2), trascuratezza dei particolari, amore esclusivo del concreto, queste veramente (se ci è permesso di sottolineare) ci sembrano essere delle caratteristiche spiccatissime della Sua matematica. Talchè, se è vero, come afferma il SEGRE, che « neppure oggi si può asserire che dalle Sue geniali vedute sulla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, sul principio di minimo e sulla geometria projettivo-differenziale sia già stato tratto tutto il frutto ch'esse sono in grado di dare », si può esser tentati a credere che un riconoscimento, del tutto pieno e completo, dei Suoi altissimi meriti, sia mancato un po' per qualche atteggiamento forse unilaterale della Sua pur così grande personalità. Noi pensiamo che l'opinione del SEGRE, or ora riportata, valga per tutti i Suoi lavori d'Analisi, e più precisamente per quelli dedicati ai Fondamenti (3), a proposito dei quali il Segre ama avvicinare i nomi di PEANO e di LEBESGUE al Suo. Certo il nome di PEANO, che Gli fu collega nella stessa città per tanti e tanti anni e che ebbe, e sembra sempre più avere di decennio in decennio, destino tanto più glorioso, ricorre spontaneo alla nostra mente e la fa riflettere sulla capacità di persuasione e sulla potenza divulgativa delle ricerche che, oltre ad essere geniali e profonde, sono anche chiare, semplici e risolutive, come appunto furono la maggior parte di quelle del celebre precursore della topologia e della logica contemporanee. Argomenti e direttive diverse (meno fortunate, si direbbe), ma forse non è questione che di tempo, forse non si tratta che d'attendere che il pendolo della Storia riporti l'interesse del pubblico matematico, più generalmente vicino alle ricerche concrete così care alle generazioni passate!

La raccolta si apre con la prima Nota lincea [4], pubblicata all'età di soli vent'anni, quando l'Autore era ancora allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa. In essa vien dimostrato un teorema, previsto dal BIANCHI, secondo cui le deformazioni infinitesime delle superfici flessibili ed inestendibili negli spazi a curvatura costante presentano proprietà analoghe a quelle nello spazio euclideo, espresse nella teoria delle cosiddette congruenze W (congruenze sulle cui falde focali si corrispondono le linee asintotiche, o i sistemi coniugati).

Segue la Tesi di laurea dell'Autore, memoria [6], studio approfondito e di ampie vedute delle proprietà differenziali metriche degli spazi a curvatura costante positiva, in connessione con una fondamentale memoria del BIANCHI del 1896. Contiene concetti del tutto nuovi, fra i quali: quello di rappresentare le rette con un nuovo tipo di coordinate (6 costanti chiamate « parametri di scorrimento » e legate da un'equazione omogenea quadratica, che possono considerarsi un caso particolare delle coordinate di CAYLEY-PLÜCKER); il concetto di « torsione di CLIFFORD », quello di « densità di CLIFFORD » d'un sistema di raggi; una nuova espressione per le formule del

(2) « Knapp und wenig durchsichtig » ebbe a giudicarlo l'ENGEL nella recensione della nota [16] (Jahrbuch der Fortschr. der Mathemat. *34*, 1903. pp. 722-23), concludendo di non essere affatto sicuro delle dimostrazioni di tutti i teoremi ivi contenuti.

(3) Un esempio valga per tutti: quello della memoria [19] ingiustamente dimenticata, nella quale sono proposti metodi nuovi e destinati, alcuni decenni più tardi, ad affermarsi nella teoria delle equazioni differenziali. Abbiam detto « ingiustamente dimenticata »: infatti, per quante ricerche bibliografiche ci siam dati la cura di fare, non ne abbiam trovato traccia in alcun trattato sull'argomento nè su argomenti affini. Nella memoria [19], in particolare, viene per la prima volta esteso alle equazioni alle derivate parziali (lineari del second'ordine e del tipo iperbolico) il metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ relativo alle equazioni differenziali ordinarie.

BIANCHI che sostituiscono (negli spazi ellittici) quelle ben note del FRENET, espressione che rende quelle formule singolarmente analoghe a queste; una nuova proprietà caratteristica delle cosiddette superficie « isocicliche » del DEMARTRES, ecc. L'Autore dimostra, tra l'altro, che le immagini di CLIFFORD di una superficie, ottenute conducendo da un punto qualunque le parallele destrorse e sinistrorse alle sue normali e segando col piano polare, si corrispondono in modo equivalente; e inversamente ogni tale corrispondenza equivalente di un piano ellittico in sè determina una congruenza normale. Inoltre superfici applicabili determinano, sulle loro immagini di CLIFFORD, una corrispondenza equivalente. Pochi anni più tardi (nota [27]) l'Autore riprende l'argomento, e sfrutta questi risultati per lo studio del problema dell'applicabilità nello spazio ellittico.

Nella nota [7], facendo uso, nello spazio a curvatura costante positiva, di coordinate di WEIERSTRASS, è risolto il problema di determinare quelle superfici per le quali esiste un piano le cui linee di equidistanza formano un sistema isotermo. Come applicazione viene trovata una nuova proprietà delle cosiddette « congruenze euclidee » dell'APPELL.

La nota [9] è dedicata ad un tipo di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti razionali che non rientra nella classe del FUCHS, ma che può considerarsi, sotto certi aspetti, come caso limite di equazioni di tale classe. Il metodo, col quale sono scoperte alcune interessanti proprietà, consiste nel far sovrapporre, l'uno all'altro, i punti singolari d'un'equazione fuchsiana.

Nella memoria [10] l'Autore studia le equazioni alle derivate parziali del tipo generale

$$a_0 \Delta_2{}^n u + a_1 \Delta_2{}^{(n-1)} u + \ldots + a_{n-1} \Delta_2 u + a_n u = 0,$$

ove le a_0, a_1, a_2, ..., a_n sono costanti reali arbitrarie, avendo riguardo al caso in cui tali costanti hanno segni alternati, ad eccezione di a_n che ha lo stesso segno di a_{n-1}. L'Autore affronta il problema dell'integrazione in campi del tutto arbitrari, generalizzando precedenti risultati del POINCARÉ (in una celebre memoria sull'equazione delle vibrazioni delle membrane) e del LAURICELLA (sull'analoga equazione delle piastre). I metodi ideati precorrono, sotto certi aspetti, quelli ampiamente e profondamente sviluppati dalla moderna Scuola Italiana (particolarmente da PICONE e FICHERA).

In [11] sono dimostrati alcuni teoremi che estendono agli spazi a curvatura costante positiva, alcune delle proprietà fondamentali delle funzioni armoniche nello spazio ordinario. L'Autore risolve il problema di DIRICHLET per la sfera e trova opportuni sviluppi in serie per le funzioni armoniche negli spazi curvi, sviluppi mediante i quali riesce a generalizzare alcuni teoremi già dimostrati dall'APPELL per lo spazio ordinario (tra i quali uno analogo al teor. di MITTAG-LEFFLER sulle funzioni olomorfe dotate, al finito, di sole singolarità isolate).

Con [12] hanno inizio le poderose ricerche sulla teoria dei gruppi di trasformazioni degli spazi curvi, gruppi discotinui in [12], [21], [22], [28], [29], [30], [31], [32], [39], [43], [47], [54], gruppi continui in [13], [15], [16], [17], [23], [33], [57], [61], Riassumiamo brevemente, anzitutto, i risultati per i gruppi continui. L'Autore dà vari metodi generali per trovare, a mezzo di quadrature, tutti gli spazi che ammettono un gruppo di movimenti ([13]), o un gruppo conservante le geodetiche ([15]), e ciò per un numero qualunque di dimensioni, fatta soltanto eccezione per qualche specialissimo caso particolare. In [16] studia i gruppi di trasformazioni conformi, dandone le proprietà caratteristiche e alcune condizioni sufficienti affinchè uno spazio che ammette un certo gruppo prefissato come gruppo conforme, sia conformemente rappresentabile in un altro spazio che ammetta quello stesso gruppo di movimenti. In [17], riallacciandosi a ricerche di STÄCKEL, LIOUVILLE e PAINLEVÉ, pubblicate fra il 1890 e il 1897, l'Autore studia i problemi dinamici le cui forze ammettono un potenziale e i cui fasci di traiettorie sono permutati tra loro da un gruppo di LIE. In [23] cerca di determinare tutti i problemi dinamici per cui esiste un gruppo traformante in sè le traiettorie. La questione viene risolta per i problemi in due variabili, applicando un teorema del PAINLEVÉ dimostrato dal VITERBI ed alcuni risultati del KOENIGS. In [33] studia le metriche possedenti un gruppo che trasforma le ipersfere in ipersfere e trova intimi rapporti fra tale questione e la teoria dei gruppi conformi. La [57] è un ampio riassunto delle ricerche precedenti. In [61] l'Autore risolve il problema di stabilire, in uno spazio nel quale siano state prefissate due diverse geometrie (individuate dalle corrispondenti metriche, cioè dai corrispondenti elementi lineari), una corrispondenza di contatto (nel senso del LIE) tale che alle ipersfere della prima geometria corrispondono quelle della seconda.

Le ricerche sui gruppi discontinui sono di grande importanza e di vasta portata, perchè coinvolgenti le più complesse e difficili questioni sulle funzioni automorfe e sulle forme quadratiche ed hermitiane. In [12] viene dimostrata l'esistenza di funzioni armoniche in uno spazio a curvatura costante (a due o a tre dimensioni), che sono invarianti rispetto ad un gruppo discontinuo prefissato di movimenti (avente un poligono o un poliedro generatore) e che possiedono singolarità prefissate a piacere. La [21] è una ricerca poderosa in cui viene applicata la teoria delle trasformazioni lineari d'una variabile complessa allo studio delle forme quadratiche ad un numero qualunque n di variabili, forme che, per mezzo d'una trasformazione lineare reale, si possono ricondurre ad uno dei due tipi:

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots z^2_{n-1} \pm z_n^2,$$

e dei sistemi di tali forme. Un'analoga ricerca è svolta anche per le forme hermitiane, le cui metriche vengono poi ampiamente studiate in [28]. Ancora in [21] è indicata una classe di gruppi propriamente discontinui di movimenti in spazi a curvatura non costante, il cui elemento lineare è somma di forme differenziali quadratiche a curvatura costante. Fra tali gruppi ve ne sono di definibili aritmeticamente, di cui si possono dare le trasformazioni generatrici e il corrispondente campo fondamentale: di questi vengono delineate la teoria generale e le applicazioni aritmetiche, teoria che, in [30], viene poi sviluppata con molti dettagli ed applicazioni. La [22] è dedicata alle applicazioni analitiche dei gruppi di proiettività trasformanti in sè una forma hermitiana. In essa si dà una nuova dimostrazione dell'esistenza delle funzioni iperfuchsiane invarianti per un dato gruppo, dimostrazione che permette di provare che tali funzioni variano con continuità al variare continuo del gruppo. Viene anche dimostrata, in un caso particolare, l'esistenza di funzioni, analoghe alle zeta-fuchsiane, per mezzo delle quali si approfondisce lo studio dei sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali con coefficienti algebrici.

Nella [31] vengono studiati i gruppi generali di proiettività, a prescindere dal fatto che lascino fissa, o meno, una forma quadratica o hermitiana. Nella [29] vengono studiate le funzioni automorfe uniformi (in un numero qualunque di variabili) che sono trasformate in sè da un gruppo proiettivo (od anche non proiettivo, purchè contenuto in un gruppo continuo finito) contenente trasformazioni infinitesime, oppure no. Proseguendo nella [32], si trovano condizioni per l'applicabilità dei gruppi projettivi generali allo studio di problemi aritmetici e alla costruzione di funzioni automorfe. La [39] è un ampio, completo riassunto di tutte le precedenti ricerche dell'Autore sui gruppi discontinui, con spiegazioni d'ogni genere che ne lumeggiano i progressi sulle ricerche del POINCARÉ, del KLEIN e di altri insigni matematici, e ne fanno emergere l'importanza in tutta la sua imponente evidenza (4). Nella [43] vengono dati dei criteri per riconoscere se un gruppo discontinuo di trasformazioni, è propriamente discontinuo o no. Per taluni di questi gruppi, impropriamente discontinui, sono indicati dei metodi per costruire classi di nuove funzioni speciali, funzioni che sono invarianti per il corrispondente gruppo. Nella [47] vengono studiate funzioni automorfe di una e di più variabili, risolvendo interessanti problemi per ampie classi di gruppi di movimenti, di gruppi misti, di gruppi ciclici di trasformazioni birazionali. Vengono generalizzate le serie tetafuchsiane di POINCARÉ, in opportune nuove serie per le quali vengono fornite delle condizioni di convergenza. La [54] contiene delle osservazioni sui cosiddetti « poliedri di POINCARÉ » nella teoria delle funzioni automorfe, e si delinea un metodo generale per riconoscere, dall'esame dei detti poliedri, se un dato gruppo kleiniano è o non è propriamente discontinuo.

La [20] contiene una breve oservazione sulle congruenze di rette, mediante la quale si ottiene una generalizzazione d'un noto teorema di MALUS-DUPIN, fondamentale nell'ottica geometrica. La [24] tratta del metodo di RIEMANN, esposto e rielaborato dal DARBOUX e convenientemente modificato e completato dal metodo delle approssimazioni successive del PICARD: il metodo viene applicato alle equazioni lineari alle derivate parziali, in cui l'insieme dei termini di ordine massimo si può considerare come risultato del prodotto simbolico di più trasformazioni infinitesime.

La [34] si collega a una ricerca del LEVI-CIVITA e dimostra che, se si suppone nota una funzione biarmonica u in un dominio piano D (con u e $\partial u/\partial n$ assumenti valori prefissati lungo la frontinera di D), allora è anche possibile costruire un'analoga funzione per ogni altro dominio conformemente rappresentabile su D. Il risultato viene poi generalizzato alle funzioni poliarmoniche.

La [36] porta un contributo allo studio delle equazioni alle derivate parziali in due variabili indipendenti, del second'ordine e di tipo iperbolico, a quello d'un particolare tipo di equazioni del terz'ordine in più di due variabili indipendenti, dette di BIANCHI-NICOLETTI, e infine a quello delle equazioni le cui caratteristiche sono in parte reali, in parte immaginarie. Sono messi in luce alcuni nuovi problemi al contorno; in particolare si dimostra che, per alcune equazioni differenziali del tipo iperbolico in due variabili indipendenti, esistono varie classi di contorni chiusi, lungo cui è lecito fissare a priori i valori di un integrale. La [37] completa la [27], dimostrando che, per le coppie di superfici di BONNET (superfici applicabili con conservazione dei raggi di curvatura) vale una trasformazione involutoria analoga alla trasformazione di CHRISTOFFEL per le superfici isoterme.

Anche la [38] richiama al LEVI-CIVITA, al quale si deve la caratterizzazione della forma generale cui sono riducibili gli elementi lineari d'una varietà, affinchè su questa possano applicarsi geodeticamente altre varietà. La [38] risolve il problema di trovare tutte le varietà siffatte.

I lavori [15], [48], [49], [50], [52], [56], [64] trattano del cosiddetto « principio di minimo », di fondamentale importanza nel calcolo delle variazioni. È noto che B. LEVI aveva dimostrato la possibilità di costruire una successione di funzioni v_n, minimizzante l'integrale di DIRICHLET

$$\iint_{\Gamma}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dxdy,$$

sotto ipotesi di larga generalità per il contorno del campo Γ, tale successione tendendo uniformemente (in Γ, contorno incluso) a una funzione v

(4) Come fu esplicitamente riconosciuto da vari grandi matematici, per es. dal MEYER (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathemat., *36*, 1905 p. 222).

armonica (5). La [45] è una lettera a B. LEVI in cui si porta un contributo di semplificazione molto notevole (6). La [48] è dedicata al problema di DIRICHLET più generale, e studia in generale le successioni minimizzanti, preludendo (insieme al LEVI e ad altri illustri analisti) ai lavori così importanti, sull'argomento, del COURANT e della sua scuola. Gli altri lavori indicati trattano, con ampiezza e profondità e sotto molti aspetti, lo stesso problema.

La [53] contiene il famoso teorema sulla decomposizione d'un integrale multiplo di LEBESGUE, in integrali semplici successivi.

Nella [60] viene dimostrato, a larghi tratti, che per talune classi di equazioni totalmente ellittiche (a caratteristiche non reali) di ordine qualunque, la ricerca delle soluzioni fondamentali può conseguirsi col classico metodo delle approssimazioni successive.

Nella [63] è data una generalizzazione, al caso degl'integrali multipli, d'un teorema dell'OSGOOD relativo agli integrali semplici, teorema di notevole interesse nel calcolo delle variazioni.

La [66] si connette alle celebri ricerche di HILBERT e SCHMIDT sulle equazioni integrali. Viene delineata una nuova teoria delle equazioni integrali polari, senza seguire la via indiretta delle forme quadratiche con infinite variabili. Nella [65] tale teoria viene applicata a nuove classi di equazioni integrali.

Possano questi volumi incoraggiare i giovani a proseguire l'opera del Maestro, che non ebbe in vita, forse anche perchè immaturamente scomparso, allievi diretti.

TULLIO VIOLA

Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften B. I 2, H. 13 T. I, Hua Loo-Keng: *Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie.* Testo tedesco curato da Ph. e H. Salié. Ed. Teubner, Leipzig (1959).

È una esposizione estremamente limpida, che abbina felicemente la necessaria concisione, con l'abbondanza delle informazioni. Vi sono esposte le più notevoli questioni e i più rilevanti risultati che, nel campo della teoria dei numeri, si possono in qualche modo riportare al metodo delle somme trigonometriche. Il tutto è inquadrato in una felice prospettiva storica, che contribuisce a fare di questo gustoso opuscolo più che altro un vero manuale di aritmetica asintotica e analitica.

Dopo una breve e densa introduzione di carattere storico l'autore sviluppa la materia, dividendola in sette capitoli a cui passiamo a dare partitamente un breve sguardo.

A) È dedicato esplicitamente ai metodi elementari di ricerca in aritmetica asintotica. Vi è illustrato il concetto di densità di una successione secondo L. G. Schnirelmann e il metodo che ad esso si ricollega, nonchè il metodo del crivello di Viggo Brun con i successivi approfondimenti di A. Selberg.

(5) Le condizioni al contorno, per le v_n, sono intese al modo solito per il problema di DIRICHLET.

(6) Semplificazione che permise poi al LEVI di ritoccare il proprio ragionamento in modo da evitare l'uso dell'integrale di LEBESGUE.

Come applicazioni di tali metodi, ormai classici, si espone il teorema di Hilbert-Waring nella dimostrazione di Linnik, sensibilmente migliorata e alleggerita dall'Autore, e il teorema di Schnirelmann-Goldbach, coi suoi successivi miglioramenti di natura elementare; accanto a questi sono ricordati altri risultati in questioni affini.

È tratteggiata poi la dimostrazione elementare di Selberg ed Erdös del teorema dei numeri primi, e i risultati di tipo elementare che si possono ottenere nella maggiorazione del resto nel problema del cerchio di Gauss (valutazione asintotica del numero dei punti del reticolo contenuti in un cerchio di raggio crescente) e nel problema dei divisori di Dirichlet (valutazione asintotica del numero dei punti (u, v) del reticolo appartenenti al settore iperbolico $uv \leq x$, $u \geq 1$, $v \geq 1$, per $x \to \infty$).

B) È un riassunto dei metodi fondamentali per la maggiorazione di somme trigonometriche.

Vi sono illustrati i metodi di H. Weyl e di J. G. Van der Corput, il teorema del valor medio di I. M. Vinogradov colle sue conseguenze più importanti in rapporto al problema di Waring e alla distribuzione dei numeri primi.

Dopo un breve richiamo alla teoria dei caratteri di un gruppo abeliano, vengono illustrati alcuni risultati riguardanti serie in cui figurano caratteri definiti su un corpo finito. Come principali conseguenze sono ricordati ad esempio il teorema di A. Weil sugli zeri della $\zeta_\Omega(s)$ e i risultati relativi alla limitazione delle somme di Kloosterman.

Sono poi ricordati i risultati dell'Autore per le somme complete e i metodi di limitazione relativi a quelle incomplete. Il capitolo si chiude illustrando i risultati, dovuti soprattutto a I. M Vinogradov, relativi alla limitazione di somme esponenziali estese sopra un insieme di numeri primi.

C) È dedicato alla distribuzione dei numeri primi e alla funzione ζ di Riemann. Vi è illustrato il metodo analitico di Rieman e sono ricordate le sue celebri ipotesi sul comportamento degli zeri della ζ. Le dimostrazioni che di alcune di esse furono date da J. Hadamard e H. von Mangoldt sono anche riferite. Nell'illustrare il problema della maggiorazione del resto l'Autore ha occasione di ricodare che il metodo della limitazione delle somme trigonometriche vi fu applicato per la prima volta da Littlewood nel 1922 e che, servendosi dello stesso metodo I. M. Vinogradov ha ottenuto di recente il più espressivo risultato finora noto in questo campo provando che:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\,x + O(xe^{-\alpha(\log x)^{3/5-\varepsilon}})$$

(dove $\pi(x)$ è il numero dei primi che non superano x, α è una costante opportuna, ε una costante positiva arbitraria, e la relazione vale per $x \to +\infty$)

L'Autore accenna pure alle questioni relative al segno del termine complementare.

Ampio sviluppo è dato al problema della valutazione della differenza fra numeri primi consecutivi e a quello della distribuzione dei numeri primi in una progressione aritmetica.

Il capitolo si conclude con un gruppetto di notizie su altri problemi affini.

D) È dedicato al problema di Waring, uno dei classici campi di applicazione del metodo della limitazione delle somme esponenziali.

Sono esposti quelli che due anni fa erano i risultati ultimi relativi alla limitazione di $G(k)$ e $g(k)$, alcuni superati nel frattempo (ad es. oggi sappiamo che si può affermare $g(5) \leq 40$, anzichè $g(5) \leq 54$).

Le varie generalizzazioni ben note del problema sono anche trattate.

E) È dedicato all'altro classico problema, quello di Goldbach. Anche qui i risultati più notevoli e le varie generalizzazioni del problema sono ampiamente ricordati. Un'ampia relazione è anche dedicata al problema misto, cosidetto di Waring-Goldbach che riguarda la possibilità di rappresentare un intero mediante somme di potenze simili di numeri primi. Notevolissimi specialmente in questo particole problema sono i contributi personali dell'Autore.

F) È dedicato al problema della equidistribuzione di mantisse. Il criterio fondamentale di Weyl è ampiamente illustrato. I successivi paragrafi sono dedicati ad aspetti particolari della questione, come quello della maggiorazione del resto, quello della distribuzione di una successione dipendente da una variabile che assume come valori gli elementi della successione dei numeri primi, ed altri problemi connessi.

G) Contiene una raccolta di vari problemi fra cui ricordiamo come più celebri i già ricordati problema del cerchio di Gauss, e problema dei divisori di Dirichlet.

Nel loro stadio più avanzato l'interesse di questi problemi si concentra tutto sulla maggiorazione del resto, nonchè sulle generalizzazioni.

Largo spazio è dedicato anche al problema della distribuzione dei numeri liberi da potenze k-esime.

Il volumetto è chiuso da una tavola riassuntiva dei più avanzati risultati relativi ai vari problemi ricordati lungo l'esposizione.

MARCO CUGIANI