Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Crupi

Sulle soluzioni del sistema linearizzato di Euler-Minkowski.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.1, p. 48–58.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_1_48_0>

Sulle soluzioni del sistema linearizzato di Euler-Minkowski.

Nota di GIOVANNI CRUPI (a Messina) (*)

Sunto. - *Si dà un metodo per la ricerca delle soluzioni del sistema linearizzato di* EULER-MINKOWSKI *in cui le funzioni incognite e le loro derivate si pensano, a priori, funzioni delle quattro variabili indipendenti* x, y, z, t. *In particolare, si trova una risolvente del sistema.*

Particolari fenomeni magneto-idrodinamici, i quali nascono quando si considera un fluido, incomprimibile ed elettricamente conduttore, mobile in un campo magnetico esterno, omogeneo di induzione $\boldsymbol{B}_0$, sono stati studiati sulla base del seguente sistema di EULER-MINKOWSKI [1]

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{B}} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} & \cdot \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} \\ \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} & \\ \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{1}{c}\boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} - \operatorname{grad} p\right) & \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 & \\ \boldsymbol{E} = \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} & \lambda = \dfrac{\varepsilon\mu - 1}{c} \\ \boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu} + \dfrac{\lambda}{\varepsilon\mu}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D} & \\ \boldsymbol{I} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right), & \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{E}$ indica l'intensità del campo elettrico, $\boldsymbol{D}$ lo spostamento elettrico, $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente di conduzione, $\boldsymbol{H}$ l'intensità del campo magnetico, $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\boldsymbol{v}$ la velocità della generica particella, $\boldsymbol{F}$ la forza di natura non elettromagnetica, p la pressione, c la velocità della luce nel vuoto, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, σ la conducibilità elettrica e ρ la densità costante del fluido.

(*) Pervenuta alla segreteria dell'U. M. I. il 10 febbraio 1961.

(1) G. CARINI, *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 21, 1956, 436-441.

Nel precedente sistema non figura la densità di carica $\rho^{(e)}$ perchè il fluido è stato supposto elettricamente neutro.

Ponendo $\lambda = 0$ nel precedente sistema, si ritrovano le equazioni di ALFVÉN.

Nella presente ricerca supporremo che il campo elettrico sia solo quello indotto, mentre il campo magnetico sia costituito da due contributi: uno dato dal campo esterno impresso e l'altro dal campo indotto.

In particolare, l'induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ è suscettibile di essere concepita della forma:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{b}$ indica il contributo del campo indotto.

Sceglieremo $\boldsymbol{B}_0$ coincidente in direzione e verso con l'asse Oz del sistema cartesiano.

Nei successivi sviluppi porremo a base il seguente sistema lineare

$$\text{(I)} \quad \dot{\boldsymbol{B}} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \qquad\qquad \text{(III)} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

$$\text{(II)} \quad \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \qquad\qquad \text{(IV)} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$$

$$\text{(V)} \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{c} \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B}_0 - \operatorname{grad} p\right)$$

$$\text{(VI)} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

$$\text{(VII)} \quad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon\mu} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0$$

$$\text{(VIII)} \quad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

$$\text{(IX)} \quad \boldsymbol{I} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0\right)$$

ottenuto dal sistema (A), trascurando la derivata convettiva rispetto a quella locale, i prodotti di $\beta = \frac{v}{c}$ per le grandezze indotte ed i prodotti delle grandezze indotte rispetto ai termini lineari.

Le approssimazioni utilizzate per passare dal sistema (A) al sistema formato dalle (I-IX) sono state già considerate in una

([2]) H. ALFVÉN, *On the Existence...* « Arkiv für matematik, astronomi, fysik », Bd. 29 N. 2. 1942; Cosmical electrodynamics, cap. IV, Oxford University Press, 1950.

precedente Nota lincea di Totaro [3], in cui l'Autore, trascurando anche la corrente di spostamento $\dot{\boldsymbol{D}}$ e la forza non elettromagnetica $\boldsymbol{F}$, studia un problema di riflessione e rifrazione delle onde piane magneto-idrodinamiche.

Nel presente lavoro si dà un metodo per la ricerca delle soluzioni del sistema (I-IX) in cui le funzioni incognite e le loro derivate si pensano, a priori, funzioni delle quattro variabili indipendenti x, y, z e t.

In particolare si dimostra che il problema è riconducibile alla integrazione della seguente equazione alle derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti

$$\text{(a)} \qquad \Delta\left(m\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\varepsilon'\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-a\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial t^2}=0$$

dove

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad m=\frac{c^2}{\mu\sigma},\quad \varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\sigma},\quad V^2=\frac{B_0^2}{\rho\mu},\quad a=\frac{\varepsilon\mu-\lambda c}{c^2}V^2.$$

All'equazione (a) soddisfano tutte le grandezze vettoriali $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{v}$.

Nel caso che si trascuri la forza non elettromagnetica $\boldsymbol{F}$ anche la pressione p soddisfa alla stessa equazione.

Infine, sarà messo in evidenza che – qualora si ricerchino onde piane propagantisi nella generica direzione $\boldsymbol{u}$, formante un angolo ϑ con $\boldsymbol{B}_0$ – l'equazione (a) conduce sostanzialmente agli stessi risultati a cui conduce l'equazione [4]

$$\text{(b)} \qquad m\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t}+V^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\varepsilon'\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3}-\left(1+a\cos^2\vartheta\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0,$$

trovata in un'altro lavoro, in cui mi ero proposto di vedere se col sistema (A), non linearizzato a priori, fossero compatibili propagazioni per onde piane.

(3) C. Totaro, *Sulla riflessione e rifrazione in magneto-idrodinamica*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) **24**, 1958, 310-316.

(4) G. Crupi, *Su una nuova equazione delle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione ed una sua applicazione*, Boll. U. M. I., (3) **13**, 1958, 173-178.

Nella deduzione della (b) tenni conto della circostanza che le funzioni associate alle onde piane dipendono da x, y, z per il tramite del prodotto scalare $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}$, con $\boldsymbol{r} = P - O$.

Nel presente lavoro viene abbandonata tale posizione restrittiva.

1. Eliminando $\boldsymbol{E}$ dalla (IX), per il tramite della (VII), si ha

$$\boldsymbol{I} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\boldsymbol{D} + \frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0\right) \tag{2}$$

dove $\lambda_1 = \dfrac{\varepsilon\mu - \lambda c}{\mu}$. Precisiamo che $\varepsilon\mu - \lambda c = 1$, però preferiamo conservare l'espressione $\varepsilon\mu - \lambda c$ per non perdere di vista il contributo caratteristico del sistema di EULER-MINKOWSKI che consiste solo nei termini in λ.

Eliminando $\boldsymbol{I}$ dal secondo membro della (V), utilizzando la (II) e tenendo conto anche della (VIII), si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} + \frac{1}{\rho\mu}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\right) \wedge \boldsymbol{B}_0 - \frac{1}{\rho c}\dot{\boldsymbol{D}} \wedge \boldsymbol{B}_0 - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p,$$

e questa, supponendo che $\boldsymbol{F}$ derivi da un potenziale $-U(x, y, z)$ e applicando l'identità

$$\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\right) \wedge \boldsymbol{B}_0 = B_0\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} - \operatorname{grad}\left(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}\right),$$

è suscettibile della forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho\mu}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} - \frac{1}{\rho c}\dot{\boldsymbol{D}} \wedge \boldsymbol{B}_0 - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\left(p + \frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}}{\mu} + \rho U\right). \tag{3}$$

Eliminando $\boldsymbol{E}$ dalla (I), usando la (VII), e poi osservando che, in virtù della (VI), vale l'identità

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0\right) = B_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}, \tag{4}$$

si deduce l'equazione

$$\dot{\boldsymbol{B}} = -\frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{D} + \frac{\lambda c}{\varepsilon\mu}B_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}. \tag{5}$$

Eliminando $\boldsymbol{I}$ ed $\boldsymbol{H}$ dalla (II), per mezzo della (2) e della (VIII), si ottiene

$$(6) \qquad \dot{\boldsymbol{D}} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\boldsymbol{D} + \frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0\right) = \frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.$$

Poichè, in virtù della (IV), vale l'identità

$$\operatorname{rot}\left(\dot{\boldsymbol{D}} \wedge \boldsymbol{B}_0\right) = B_0 \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial z},$$

applicando l'operatore rot ad ambo i membri della (3) si ottiene l'equazione

$$(7) \qquad \operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{B_0}{\rho\mu}\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} - \frac{B_0}{\rho c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t \partial z},$$

in cui non appare più la pressione p.

A conclusione delle precedenti considerazioni. il problema matematico può essere schematizzato nel seguente modo: *a*) la ricerca delle grandezze $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ può essere condotta integrando il sistema formato dalle equazioni (5), (6) e (7); *b*) il calcolo di p, una volta determinati $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$, può essere eseguito mediante la (3); *c*) le grandezze $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{I}$, una volta conosciuti $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$, risultano note in virtù delle (VII), (VIII) e (IX).

Precisiamo, inoltre, che tra le soluzioni del sistema costituito dalle equazioni (5), (6) e (7) vanno considerate solo quelle che verificano anche le condizioni espresse dalle (III), (IV) e (VI).

2. Cominciamo a dimostrare che le grandezze $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$, definite dal sistema formato con le (5), (6) e (7). soddisfano tutte ad una stessa equazione.

Osserviamo che, tenendo conto della (1), il sistema dato dalle (5), (6) e (7) è suscettibile di essere scritto nella forma

$$(5') \qquad \dot{\boldsymbol{b}} = -\frac{c}{\varepsilon}\operatorname{rot}\boldsymbol{D} + \frac{\lambda c}{\varepsilon\mu} B_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}$$

$$(6') \qquad \dot{\boldsymbol{D}} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\boldsymbol{D} + \frac{\lambda_1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0\right) = \frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$$

$$(7') \qquad \operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{B_0}{\rho\mu}\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z} - \frac{B_0}{\rho c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t \partial z},$$

ed é su questo sistema che qui ci fondiamo.

Applicando l'operatore rot ad ambo i membri della (6') e tenendo conto della (III), della (1) e della (4), si deduce

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\operatorname{rot}\boldsymbol{D} + \frac{\sigma\lambda_1 B_0}{\varepsilon c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = -\frac{c}{\mu}\Delta\boldsymbol{b}.$$

Eliminando da quest'ultima rot $\boldsymbol{D}$ e rot $\dot{\boldsymbol{D}}$, in virtù della (5') e dell'equazione che si ottiene applicando ad ambo i membri della (5') l'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$, si deduce la seguente relazione tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{b}$

$$\frac{\lambda B_0}{\mu}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z\,\partial t} + \frac{\sigma B_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = -\frac{c}{\mu}\Delta\boldsymbol{b} + \frac{\varepsilon}{c}\ddot{\boldsymbol{b}} + \frac{\sigma}{c}\dot{\boldsymbol{b}}. \tag{8}$$

Un'altra relazione tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{b}$ può essere dedotta col seguente procedimento.

Eliminando il termine rot $\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z}$ dalla (7') e dall'equazione che si ricava applicando l'operatore $\frac{\partial}{\partial z}$ ad ambo i membri della (6'), si deduce

$$\frac{\rho}{B_0}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\sigma}{\varepsilon c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial z} + \frac{\lambda_1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\wedge \boldsymbol{B}_0\right)$$

e applicando ad ambo i membri di quest'ultima l'operatore rot si ha

$$-\frac{\rho}{B_0}\Delta\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\sigma}{\varepsilon c}\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial z} + \frac{\sigma\lambda_1 B_0}{\varepsilon c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Eliminando, ora, il termine rot $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial z}$ dalla (9) e dall'equazione che si ottiene applicando l'operatore $\frac{\partial}{\partial z}$ ad ambo i membri della (5'), resta stabilita la nuova relazione tra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{b}$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{b}}{\partial z\,\partial t} = \frac{c^2\rho}{B_0\sigma}\Delta\dot{\boldsymbol{v}} + B_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Se, a questo punto, conveniamo di introdurre gli operatori lineari

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{\lambda B_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t} + \frac{\sigma B_0}{c}\frac{\partial}{\partial z}\\
\Omega_2 &= -\frac{c}{\mu}\Delta + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{c}\frac{\partial}{\partial t}\\
\Omega_3 &= \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\\
\Omega_4 &= \frac{c^2\rho}{B_0\sigma}\Delta\frac{\partial}{\partial t} + B_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

le equazioni (8) e (10) possono essere scritte nella forma simbolica più semplice

$$\Omega_1 \boldsymbol{v} = \Omega_2 \boldsymbol{b} \tag{8'}$$

$$\Omega_4 \boldsymbol{v} = \Omega_3 \boldsymbol{b}. \tag{10'}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni che si ottengono applicando l'operatore Ω_1 ad ambo i membri della (8') e l'operatore Ω_2 ad ambo i membri della (10'), si deduce

$$(\Omega_3 \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_4) \boldsymbol{v} = 0. \tag{12}$$

Analogamente, sottraendo membro a membro le due equazioni che si ottengono applicando l'operatore Ω_4 ad ambo i membri della (8') e l'operatore Ω_1 ad ambo i membri dalla (10'), si ricava

$$(\Omega_1 \Omega_3 - \Omega_4 \Omega_2) \boldsymbol{b} = 0,$$

e questa per la invertibilità degli operatori definiti con le (11), può essere scritta nel seguente modo

$$(\Omega_3 \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_4) \boldsymbol{b} = 0. \tag{13}$$

Introducendo, per ragioni di brevità, l'operatore

$$\Omega = \Omega_3 \Omega_1 - \Omega_2 \Omega_4 , \tag{14}$$

le (12) e (13) sono suscettibili della forma

$$\Omega \boldsymbol{v} = 0 \tag{12'}$$

$$\Omega \boldsymbol{b} = 0. \tag{13'}$$

Applicando l'operatore Ω, dato dalla (14), ad ambo i membri della (6'), tenendo conto della (12'), della (13') e della invertibilità dell'operatore Ω con $\frac{\partial}{\partial t}$ e rot, si ricava

$$\left(\Omega \boldsymbol{D}\right)^{\cdot} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \Omega \boldsymbol{D} = 0. \tag{15}$$

La (15) è soddisfatta, ovviamente, da tutte le soluzioni della equazione

$$\Omega \boldsymbol{D} = 0 \tag{16}$$

e, per un eventuale $\Omega \boldsymbol{D} \neq o$, dà

$$\Omega \boldsymbol{D} = \boldsymbol{g}(x, y, z)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}, \tag{17}$$

dove $\boldsymbol{g}(x, y, z)$ è, a priori, una funzione arbitraria del posto.

Ricordiamo che ε/σ ha le dimensioni di un tempo e dà l'ordine di grandezza della durata temporale in cui il secondo membro della (17) può essere considerato non nullo [5]. Poichè nei buoni conduttori tale intervallo di tempo è così breve che l'applicazione del metodo fenomenologico non avrebbe senso, possiamo presumere che le soluzioni significative della (15) sono solo quelle della (16).

Resta così, dopo le (12'), (13') e (16), dimostrato che le tre grandezze $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{D}$, definite dal sistema (5'), (6'), (7') soddisfano alla stessa equazione: e questa, dando all'operatore Ω la struttura esplicita che ad esso compete, in virtù della (14) e delle (11), assume la forma

$$\Delta\left(m \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \varepsilon' \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) - a \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} = 0 \tag{18}$$

dove

$$m = \frac{c^2}{\mu \sigma}, \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \qquad V^2 = \frac{B_0^2}{\rho \mu}, \qquad a = \frac{\varepsilon \mu - \lambda c}{c^2} V^2 \tag{19}$$

e ψ indica uno qualunque dei vettori $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{D}$.

Completiamo questo numero, osservando che alla stessa equazione (18) soddisfano anche $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{I}$: ciò segue subito dal fatto che, in virtù delle (VII), (VIII) e (2) queste grandezze si esprimono linearmente in termini di $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{D}$.

(5) R. BECKER, *Teoria dell'Elettricità*, Vol. I, p. 128, SANSONI, 1949.

3. Considerazioni riguardanti la pressione. - Caratterizzata una soluzione del sistema (5'), (6') e (7'), soddisfacente anche alle equazioni (III), (IV) e (VI), per determinare la pressione p basta rifarsi all'equazione (3).

Infatti, proiettando la (3) sugli assi cartesiani del sistema inerziale di riferimento e tenendo conto che $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b}$, si ottiene il seguente sistema

$$
(20)\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \dot{u}_1 + \frac{B_0}{\mu}\frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{B_0}{c}\dot{D}_2 - \frac{B_0}{\mu}\frac{\partial b_3}{\partial x} - \rho \frac{\partial U}{\partial x} \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \dot{u}_2 + \frac{B_0}{\mu}\frac{\partial b_2}{\partial z} + \frac{B_0}{c}\dot{D}_1 - \frac{B_0}{\mu}\frac{\partial b_3}{\partial y} - \rho \frac{\partial U}{\partial y} \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho \dot{u}_3 - \rho \frac{\partial U}{\partial z},
\end{aligned} \right.
$$

che può essere riguardato come un sistema nella sola incognita p, dopo aver caratterizzato $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{D}$ dalle (5'), (6') e (7').

Come può essere facilmente verificato, le (20) sono compatibili per qualunque soluzione del sistema (5'), (6') e (7'), soddisfacente anche alle (III), (IV) e (VI).

Dimostriamo che anche $p + \rho U$ soddisfa all'equazione (18).

Infatti, applicando l'operatore Ω, introdotto con la (14), ad ambo i membri delle (20) e tenendo presenti la (12'), la (13') e la (16), si deduce

$$
\frac{\partial}{\partial x}\Omega(p + \rho U) = 0
$$

$$
\frac{\partial}{\partial y}\Omega(p + \rho U) = 0
$$

$$
\frac{\partial}{\partial z}\Omega(p + \rho U) = 0
$$

da cui segue

$$
(21)\qquad \Omega(p + \rho U) = f(t),
$$

dove $f\ (t)$ è a priori, una funzione arbitraria di t. Per la natura fisica del problema e l'arbitrarietà di $f\ (t)$, conveniamo di considerare le soluzioni che si hanno ponendo $f(t) = 0$. In tal caso la (21) si specializza nella

$$
(21')\qquad \Omega(p + \rho U) = 0
$$

e questa dimostra, dato il significato dell'operatore Ω, che $p + \rho U$ soddisfa alla (18).

Nel caso particolare che $U = \text{cost.}$ la (21') si particolarizza nella

$$\Omega p = 0. \tag{22}$$

Possiamo, dunque, concludere con il seguente Teorema: *in assenza di forze di natura non elettromagnetica, tutte le funzioni incognite del sistema (I-IX) soddisfano alla stessa equazione* (a).

4. - Caso delle onde piane. - In un precedente lavoro ([4]) ho dimostrato che la ricerca delle soluzioni del sistema (A), non linearizzato a priori, suscettibili di essere interpretate come onde piane propagantisi in una generica direzione di versore $\boldsymbol{u}$, formante col campo impresso $\boldsymbol{B}_0$ un angolo $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$, è riconducibile all'integrazione della seguente equazione di terzo ordine

$$m \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \varepsilon' \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} - (1 + q) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{23}$$

dove

$$m = \frac{c^2}{\mu \sigma}, \qquad V^2 = \frac{B^2_0}{\rho \mu}, \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \qquad q = a \cos^2 \vartheta.$$

Per la deduzione della (23) ho tenuto conto, in taluni passaggi intermedi, che le grandezze associate all'onda piana dipendono da x, y, z per il tramite del prodotto scalare $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u}$, con $\boldsymbol{r} = P - O$. Questa ipotesi restrittiva è stata abbandonata nella presente Nota, in cui si dà un metodo generale per la ricerca delle soluzioni del sistema linearizzato (I-IX).

Mi sembra utile segnalare che, relativamente al problema delle onde piane, le equazioni (18) e (23) conducono alle stesse soluzioni.

Vogliamo illustrare ciò su un caso particolare.

Una $\boldsymbol{v}$ associata ad un'onda piana periodica rispetto a t, propagantesi nella generica direzione $\boldsymbol{u}$, sarà del tipo

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \, e^{i(k \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} - \omega t)} \tag{24}$$

dove ω è un parametro assegnato e k un parametro da determinarsi opportunamente.

Osserviamo che, assegnato ω, la (24) dà luogo a tante onde monocromatiche (con lo stesso periodo temporale) quanti sono i corrispondenti valori non nulli che si possono attribuire a k.

Se tentiamo di soddisfare alle (18) con la (24), si deduce, assegnato ω, la seguente equazione per k

$$k^2 \left(m\, \omega\, i\, k^2 - V^2 \cos^2 \vartheta\, k^2 - \varepsilon' i\, \omega^3 + \omega^2\right) + a\, k^2 \omega^2 \cos^2 \vartheta = 0 \tag{25}$$

la quale si spezza nelle

$$k^2 = 0 \tag{26}$$

$$\left(m\, \omega\, i - V^2 \cos^2 \vartheta\right) k^2 + \omega^2 \left(1 + a \cos^2 \vartheta\right) - \varepsilon' i\, \omega^3 = 0. \tag{27}$$

Analogamente, tentando di soddisfare alla (23) con la (24), si ricava che i valori di k sono quelli forniti dalle radici dell'equazione

$$\left(m\, \omega\, i - V^2 \cos^2 \vartheta\right) k^2 + \omega^2 \left(1 + a \cos^2 \vartheta\right) - \varepsilon' i\, \omega^3 = 0. \tag{28}$$

Poichè la (28) è identica alla (27), e questa fornisce le radici non nulle della (25), resta dimostrato che, ai fini della ricerca di onde piane, la (18) e la (23) conducono sostanzialmente agli stessi risultati.

Una soluzione completa del sistema di EULER-MINKOWSKI, suscettibile di essere interpretata come onda piana magneto-idrodinamica, periodica rispetto al tempo e propagantesi in una generica direzione $\boldsymbol{u}$, è stata caratterizzata in un altro mio lavoro [6].

Anche NARDINI si è interessato del problema delle onde piane del sistema di EULER-MINKOWSKI in una Nota del 1958: in questo lavoro l'Autore, tra l'altro, approfondisce il problema anche dal punto di vista energetico.

[6] G. CRUPI, *Una soluzione delle equazioni di Euler-Minkowski e sua interpretazione fisica*, Atti del Sem. Mat. e Fis. dell'Università di Modena, **9**, 1959, 1-12.

[7] R. NARDINI, *Su particolari onde idromagnetiche piane*, « Le matematiche », **13**, 1958, fasc. 1.