Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Sui sistemi di $\infty^h S_k$ che appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 238–248.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_238_0>

Sui sistemi di ∞^h S_k che appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti.

Nota di Guido Vaona (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si veda il n. 1.*

1. Introduzione.

Vari A. A. hanno studiato sistemi di infiniti S_k appartenenti ad un numero elevato di complessi lineari indipendenti.

Si tratta di sistemi di S_k le cui varietà rappresentative sulla grassmanniana appartengono a spazi di dimensione bassa.

Così ad es. A. Comessatti ha stabilito, fra l'altro, che i sistemi algebrici di ∞^1 rette di S_r appartenenti ad $\binom{r}{2}$ complessi lineari linearmente indipendenti, esclusi i coni, sono le rigate razionali normali di S_r (1). B. Segre ha dimostrato che le tangenti ad una curva algebrica irriducibile di S_r appartengono al più ad $\binom{r-1}{2}$ complessi lineari indipendenti e, per $r > 3$, tale massimo è raggiunto soltanto dalle curve razionali normali (2). Infine D. Gallarati si è occupato dei sistemi di ∞^1 S_k (in particolare osculatori ad una curva), determinando quei sistemi che appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti; inoltre ha stabilito qual'è il massimo numero di complessi lineari indipendenti a cui possono appartenere gli ∞^k S_k tangenti ad una V_k (3).

Riprendendo tali ricerche, mi occupo in questa Nota della determinazione delle totalità ∞^h di S_k giacenti in un S_r che appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti. trattando dapprima il caso di ∞^h rette.

Pur pervenendo a delle varietà algebriche, come era facile prevedere, non viene qui fatta alcuna ipotesi di algebricità sui sistemi di S_k come invece è quasi sempre fatto dagli A. A. sopra menzionati. Si presentano profondamente diversi i due casi:

a) sistemi di ∞^h S_k non tangenti a varietà;

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I il 25 giugno 1961.

(1) Si veda: A. Comessatti [1].

(2) Si veda: B. Segre [2].

(3) Si veda: D. Gallarati [4], [5], [6].

b) sistemi di ∞^h S_k tangenti ad una o più varietà.

Nella presente Nota verrà trattato il caso a); in altro lavoro tratterò il caso b).

Premesse alcune proposizioni riguardanti le proiezioni e sezioni di sistemi ∞^h di S_k (nn. 3, 4, 5), si dimostra (nn. 6, 8):

Un sistema Σ ∞^h $(h > 1)$ *di rette di un* S_r *non può appartenere a più di* $\binom{r}{2} - h + 1$ *complessi lineari di rette linearmente indipendenti e tale massimo è raggiunto soltanto dai sistemi* Σ *di rette che si ottengono riferendo proiettivamente i punti di una retta* g, *con gli* S_{h-1} *di una* $S_{h-1} - V_h$ *razionale normale di un* S_{r-2} *e proiettando da ciascun punto di* g *i punti dello* S_{h-1} *corrispondente e, per* $r = 5$, *dai sistemi* Σ *delle rette che congiungono punti corrispondenti di due piani sghembi omografici.*

Inoltre, estendendo tale risultato, si prova (nn. 7, 9):

Un sistema Σ ∞^h $(h > 1)$ *di* S_k *di un* S_r *non può appartenere a più di* $\binom{r+1}{k+1} - r + k - h$ *complessi lineari di* S_k *linearmente indipendenti e tale massimo è raggiunto soltanto dai sistemi* Σ *di* S_k *che si ottengono riferendo proiettivamente gli* S_{k-1} *di un fascio con gli* S_{h-1} *di una* $S_{h-1} - V_h$ *razionale normale di* S_{r-k-1} *e proiettando da ciascun* S_{k-1} *del fascio i punti dello* S_{h-1} *corrrispondente e, per* $h = 2$ *e* $r = k + 4$, *dai sistemi* Σ *degli* S_k *che proiettano da un* S_{k-2} *le* ∞^2 *rette congiungenti coppie di punti corrispondenti di due piani omografici.*

2. Generalità e notazioni.

È ben noto che le cordinate grassmanniane degli S_k di un S_r che indicheremo con il simbolo

$$(1) \qquad p_{i_0 i_1 \dots i_k} \qquad (i_0, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, r; \; i_0 < i_1 < \dots < i_k),$$

soddisfano a certe relazioni quadratiche che, nello spazio S_ρ $\left[\rho = \binom{r+1}{k+1} - 1\right]$ dove tali coordinate si interpretino come coordinate omogenee di punto, rappresentano una varietà V_t, di dimensione $t = (r-k)(k+1)$, detta varietà di GRASSMANN.

Complesso lineare di S_k è la totalità degli S_k di S_r le cui coordinate soddisfano ad un'equazione lineare. Nel seguito indicheremo brevemente con

$$(2) \qquad a_{i_0 i_1 \dots i_k} p_{i_0 i_1 \dots i_k} = 0$$

un'equazione lineare nelle coordinate grassmanniane, denotando con le a delle costanti ed intendendo di estendere la somma a tutte le combinazioni $(i_0, i_1, \dots, i_k)$ con $i_0 < i_1 < \dots < i_k$.

3. Sulle proiezioni dei sistemi di rette appartenenti a complessi lineari.

Consideriamo un sistema $\Sigma\ \infty^h$ di rette di S_r appartenenti ad $N \geq r$ complessi lineari indipendenti di equazioni

$$a^{(l)}_{i_0 i_1} p_{i_0 i_1} = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, N). \tag{3}$$

La V_h della V_t di GRASSMANN rappresentativa di Σ appartiene dunque allo $S_{\rho-N}$ di equazioni (3).

Supponiamo di proiettare il sistema Σ da un punto su un S_{r-1}. Se il centro di proiezione è il punto fondamentale $A_0(1, 0, \dots, 0)$ e lo S_{r-1} su cui proiettiamo è quello di equazione $x_0 = 0$, le rette proiezioni hanno coordinate $p_{i_1 i_2}(i_1, i_2 = 1, 2, \dots, r;\ i_1 < i_2)$ proporzionali alle omonime coordinate delle rette oggettive, onde tali $p_{i_1 i_2}$ soddisferanno a tutte e sole le equazioni lineari ottenute eliminando le $p_{0 i_1}$ $(i_1 = 1, 2, \dots, r)$ fra le (3).

L'operazione precedente nello spazio S_ρ equivale alla proiezione dello $S_{\rho-N}$ di equazioni (3) dallo spazio S_{r-1} di equazioni $p_{i_1 i_2} = 0$ sullo spazio $S_{\rho'}$ $\left[\rho' = \binom{r}{2} - 1\right]$ di equazioni $p_{0 i_1} = 0$. È allora chiaro che se $S_{\rho-N}$ è sghembo con l'S_{r-1}, lo spazio proiezione è un $S_{\rho-N}$, mentre se $S_{\rho-N}$ ed S_{r-1} hanno un S_m in comune, lo spazio proiezione è un $S_{\rho-N-m-1}$. Il numero delle equazioni lineari indipendenti a cui soddisfano le coordinate delle rette proiezioni è perciò $N_1 = N - r$ nel primo caso ed $N_1 = N - r + m + 1$ nel secondo.

Siccome lo spazio S_{r-1} di equazioni $p_{i_1 i_2} = 0$ rappresenta le rette di S_r passanti per A_0, si conclude:

Se un sistema $\Sigma\ \infty^h$ di rette di un S_r appartiene ad $N \geq r$ complessi lineari indipendenti e se esistono $m + 1$ rette (e non più) passanti per un punto A_0 ed appartenenti agli N complessi, il sistema di rette Σ' ottenuto proiettando Σ da A_0 su un S_{r-1} (esterno ad A_0) appartiene esattamente ad

$$N_1 = N - r + m + 1$$

complessi lineari indipendenti di S_{r-1}. [4].

[4] Questa proposizione e le due dei seguenti precisano e compendiano alcuni Lemmi contenuti nei lavori di D. GALLARATI.

4. Sulle proiezioni dei sistemi di S_k appartenenti a complessi lineari.

La proposizione precedente si può estendere al caso di un sistema Σ ∞^h di S_k appartenente ad $N \geq \binom{r}{k}$ complessi lineari indipendenti. Siano

$$a^{(l)}_{i_0 i_1 \dots i_k} p_{i_0 i_1 \dots i_k} = 0 \qquad (l = 1,\ 2, \dots,\ N) \tag{5}$$

le equazioni degli N complessi lineari e supponiamo di proiettare Σ da $A_0(1,\ 0, \dots,\ 0)$ sullo S_{r-1} di equazione $x_0 = 0$.

Gli S_k proiezione hanno coordinate $p_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} (i_1,\ i_2, \dots,\ i_{k+1} = 1,\ 2, \dots,\ r;\ i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1})$ proporzionali alle omonime coordinate degli S_k oggettivi, onde tali $p_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}}$ soddisferanno a tutte e sole le equazioni ottenute eliminando dalle (5) le $p_{0 i_1 i_2 \dots i_k}$.

Questa operazione, in S_ρ, equivale alla proiezione dello $S_{\rho-N}$ di equazioni (5) dallo spazio $S_{\rho-\sigma}\left[\sigma = \binom{r}{k+1}\right]$ di equazioni

$$p_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} = 0 \qquad (i_1,\ i_2, \dots,\ i_{k+1} = 1,\ 2, \dots,\ r) \tag{6}$$

nello spazio $S_{\rho-\sigma'}\left[\sigma' = \binom{r}{k}\right]$ di equazioni

$$p_{0 i_1 i_2 \dots i_k} = 0 \qquad (i_1,\ i_2, \dots,\ i_k = 1,\ 2, \dots,\ r). \tag{7}$$

Allora se $S_{\rho-N}$ è sghembo con $S_{\rho-\sigma}$ lo spazio proiezione è ancora un $S_{\rho-N}$; mentre se $S_{\rho-N}$ ed $S_{\rho-\sigma}$ hanno un S_m in comune lo spazio proiezione è un $S_{\rho-N-m-1}$. Il numero delle equazioni lineari indipendenti ottenute con la eliminazione descritta dalla (5) è rispettivamente $N_1 = N - \binom{r}{k}$ ed $N_1 = N - \binom{r}{k} + m + 1$.

Siccome lo spazio $S_{\rho-\sigma}$ è quello che contiene la varietà rappresentativa degli S_k passanti per A_0, si conclude:

Se un sistema Σ ∞^h *di* S_k *di un* S_r *appartiene ad* $N \geq \binom{r}{k}$ *complessi lineari indipendenti e se esistono* $m+1$ *punti (e non più) linearmente indipendenti appartenenti allo spazio ambiente della varietà rappresentativa degli* S_k *passanti per un punto* A_0, *le cui coordinate soddisfano alle equazioni degli* N *complessi, il sistema* Σ' *ottenuto proiettando* Σ *da* A_0 *su un* S_{r-1} *(esterno ad* A_0*) appartiene esatta-*

mente ad

$$N_1 = N - \binom{r}{k} + m + 1 \tag{8}$$

complessi lineari di S_k *di* S_{r-1} *linearmente indipendenti.*

5. Sulle sezioni dei sistemi di S_k appartenenti a complessi lineari.

Consideriamo infine un sistema $\Sigma\ \infty^h$ di S_k di un S_r appartenente agli $N \geq \binom{r}{k+1}$ complessi lineari indipendenti di equazioni

$$a^{(l)}_{i_0 i_1 \ldots i_k} p_{i_0 i_1 \ldots i_k} = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ ..,\ N) \tag{9}$$

Segando gli S_k di Σ con l'S_{r-1} di equazione $x_0 = 0$, si ottiene un sistema Σ' di S_{k-1} le cui coordinate grassmanniane $p_{0 i_1 \ldots i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, r;\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ sono proporzionali alle omonime coordinate dei corrispondenti S_k di Σ. Ciò appare chiaramente se k dei punti che individuano gli S_k di Σ si scelgono nell'S_{r-1} segante.

Le equazioni lineari a cui soddisfano gli S_{k-1} di Σ' si ottengono dalle (9) eliminando le $\binom{r}{k+1}$ coordinate $p_{j_1 j_2 \ldots j_{k+1}}$ $(j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} = 1, 2, \ldots, r)$.

Nello spazio S_ρ della grassmanniana l'operazione precedente ci dà la proiezione dello spazio $S_{\rho-N}$ di equazioni (9) dallo spazio $S_{\rho-\sigma}\left[\sigma = \binom{r}{k}\right]$ di equazioni

$$p_{0 i_1 i_2 \ldots i_k} = 0 \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, r) \tag{10}$$

sullo spazio $S_{\rho-\sigma'}\left[\sigma' = \binom{r}{k+1}\right]$ di equazioni

$$p_{j_1 j_2 \ldots j_{k+1}} = 0 \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_{k+1} = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Avendo riguardo al fatto che lo spazio $S_{\rho-\sigma}$ è quello che contiene la grassmanniana degli S_{k-1} dell'S_{r-1} di equazione $x_0 = 0$, segue:

Se un sistema Σ ∞^h *di* S_k *di un* S_r *appartiene ad* $N \geq \binom{r}{k+1}$ *complessi lineari indipendenti e se esistono* $m+1$ *punti (e non più) linearmente indipendenti appartenenti allo spazio ambiente della grassmanniana degli* S_{k-1} *di un* S_{r-1}, *le cui coordinate soddisfano alle equazioni degli* N *complessi, segando* Σ *con tale* S_{r-1} *si ottiene un sistema* Σ' *di* S_{k-1} *appartenente esattamente ad*

$$N_1 = N - \binom{r}{k+1} + m + 1 \tag{12}$$

complessi lineari di S_{k-1} *di* S_{r-1} *linearmente indipendenti.*

6. Il numero massimo di complessi lineari indipendenti contenenti un sistema ∞^h di rette di un S_r.

In questo n. ed in tutti i successivi consideriamo sistemi ∞^h di S_k appartenenti ad uno spazio S_r che non siano contenuti in spazi subordinati di S_r nè passino tutti per un medesimo S_{k-1} (5) In tali ipotesi dimostriamo che:

Un sistema Σ ∞^h *di rette di un* S_r *non può appartenere a più di*

$$\theta(r, h) = \binom{r}{2} - h + 1 \tag{13}$$

complessi lineari di rette linearmente indipendenti.

Consideriamo dapprima un sistema ∞^1 di rette e ricordiamo che esso per $r = 3$ può appartenere al più a 3 complessi lineari indipendenti.

Indicando con N il numero di complessi lineari indipendenti a cui il sistema appartiene e proiettando successivamente la rigata luogo di tali rette da un suo punto su un S_{r-1}, $S_{r-2}, \dots, S_3$, in forza della proposizione del n. 3, si ha successivamente

$$N_1 \geq N - r + 1, \qquad N_2 \geq N_1 - (r-1) + 1, \dots, \; N_{r-3} \geq N_{r-4} - 3$$

ed ancora $3 \geq N_{r-3}$. Sommando membro a membro segue $N \leq \binom{r}{2}$ (6).

(5) Nel secondo caso qui escluso gli S_k sarebbero rappresentati da varietà giacenti in spazi lineari della grassmanniana e quindi si tratta di un caso banale.

(6) Questa relazione era già stata trovata, ma con l'ipotesi della algebricità, da A. Comessatti [1] e ritrovata poi da D. Gallarati [4].

Sia ora un sistema ∞^h di rette e supponiamo per assurdo che esse appartengono ad $N > \theta(r, h)$ complessi lineari indipendenti. Considerando altri $h-1$ complessi lineari arbitrari, le ∞^1 rette comuni a questi ed al sistema Σ apparterrebbero ad $N+h-1$ complessi, che per l'arbitrarietà della scelta precedente, possono senz'altro ritenersi linearmente indipendenti. Ma se $N > \theta(r, h)$, $N+h-1 > \binom{r}{2}$, il che è assurdo.

7. Il numero massimo di complessi lineari indipendenti contenenti un sistema ∞^h di S_k di S_r.

Supponendo al solito che un dato sistema Σ ∞^h di S_k appartenga ad un S_r e non ad uno spazio subordinato e che inoltre gli S_k di Σ non passino per uno stesso S_{k-1} si ha:

Un sistema Σ ∞^h di S_k di S_r non puó appartenere a più di

$$\theta(r, k, h) = \binom{r+1}{k+1} - r + k - h \tag{14}$$

complessi lineari di S_k linearmente indipendenti.

Supponiamo per assurdo che gli S_k di un sistema Σ ∞^h appartengano ad $N > \theta(r, k, h)$ complessi lineari indipendenti e seghiamo gli S_k di Σ con un *generico* S_{r-k+1}. Si otterrà un sistema Σ' ∞^h di rette che, in forza della proposizione del n. 5, apparterrà ad

$$N - \left[\binom{2}{k+1} + \binom{r-1}{k} + \ldots + \binom{r-k+2}{3}\right]$$

complessi lineari linearmente indipendenti. Ciò è assurdo poichè tale numero e uguale ad $N - \binom{r+1}{k+1} + \binom{r-k+2}{2}$ ed è maggiore del numero $\theta(r-k+1, h)$ dato dalla (13).

8. I sistemi Σ ∞^h di rette di un S_r appartenenti a $\theta(r, h)$ complessi lineari indipendenti.

Dimostriamo che:

Gli unici sistemi Σ ∞^h $(h > 1)$ di rette di un S_r appartenenti a $\theta(r, h)$ complessi lineari indipendenti sono quelli che si ottengono riferendo proiettivamente i punti di una retta g con gli S_{h-1} di una S_{h-1}—V_h razionale normale di S_{r-2} e proiettando da ciascun punto di g i punti dello S_{h-1} corrispondente e, per $r=5$ e $h=2$ congiungendo *coppie di punti corrispondenti di due piani omografici (sghembi fra loro).*

Ricordiamo anzitutto che per $h=1$ è noto il risultato: « Le rigate di S_r (non coni) contenute in $\theta(r, 1) = \binom{r}{2}$ complessi lineari indipendenti sono le rigate razionali normali di S_r » (7). Sulla V_t di GRASSMANN le rigate razionali normali sono rappresentate da curve razionali normali $\mathcal{C}^{r-1}$ di S_{r-1} e viceversa. Ciò è di immediata verifica analitica.

Se un sistema Σ ∞^h di rette sta in $\theta(r, h)$ complessi lineari indipendenti, la V_h di V_t che rappresenta Σ sta in uno spazio di dimensione $\rho - \theta(r, h) = r + h - 2$. Intersecando la V_h con un generico $S_{\rho-h+1}$ si ottiene una curva appartenente ad un S_{r-1} e quindi immagine di una rigata appartenente a $\theta(r, 1)$ complessi lineari indipendenti e cioè di una rigata razionale normale. La curva ottenuta è pertanto una $\mathcal{C}^{r-1}$ razionale normale e la V_h è una varietà algebrica d'ordine $r-1$ appartenente ad un S_{r+h-2}. Ora è noto (8) che tale V_h è una $S_{h-1} - V_h$ razionale normale di S_{r+h-2} oppure, se $h=2$, $r=5$, la superficie di VERONESE o infine, se $h=3$, $r=5$, è una V_3^4 di S_5 proiettante da un punto una superficie di VERONESE.

Escludendo per ora i due casi particolari, ciascuno degli ∞^1 S_{h-1} costituenti la V_h rappresenta in S_r una iperstella di rette passanti per un punto e giacenti in un S_h (9). *I centri di dette iperstelle descrivono una retta* g.

Supposto infatti che le varietà minime della V_h siano degli ordini, $m', m'', \dots, m^{(h-1)}$ è ben noto (10) che essa può generarsi considerando h curve razionali normali degli ordini $m', m'' - m', \dots, r-1-m^{(h-1)}$, riferite proiettivamente e considerando gli ∞^1 S_{h-1} congiungenti le h-ple di punti corrispondenti. Ciascuna di tali curve rappresenta in S_r una rigata razionale normale appartente rispettivamente a spazi di dimensioni $m'+1$, $m''-m'+1, \dots, r-m^{(h-1)}$. I centri delle iperstelle di cui sopra devono ovviamente appartenere ad uno spazio comune a tutti i precedenti.

(7) Si veda: A. COMESSATTI [1] e D. GALLARATI [4]. Questa proposizione, come osserva D. GALLARATI, vale senza l'ipotesi dell'algebricità della rigata.

(8) Si veda ad es. E. BERTINI [8], p. 402.

(9) Per $h=3$ un S_2 di V_t può anche rappresentare un piano rigato, tratteremo in seguito questo caso.

(10) Si veda: A. BELLATALLA [7], p. 820.

Ma tali spazi hanno in comune al più un S_1 poichè nel caso opposto lo spazio che li congiunge avrebbe dimensione $< r$.

Le curve direttrici minime della V_h rappresentativa di Σ rappresentano in S_r altrettante rigate razionali normali aventi una retta g direttrice comune e le generatrici riferite proiettivamente. Indicando con $\mathcal{C}^{m'}$, $\mathcal{C}^{m''-m'}, \ldots,$ $\mathcal{C}^{r-1-m^{(h-1)}}$ le direttrici minime diverse da g di tali rigate, si ha che esse risultano riferite proiettivamente a g e quindi anche tra loro. Lo spazio contenente tali curve è uno S_{r-2} e la varietà luogo degli S_{h-1} che congiungono le h-ple di punti corrispondenti una $S_{h-1} - V_h$ di S_{r-2}. É evidente che le rette di Σ sono quelle proiettanti da ciascun punto di g lo S_{h-1} corrispondente della $S_{h-1} - V_h$.

Se $k = 3$ gli S_2 costituenti la $S_2 - V_3$ di V_t possono rappresentare dei piani rigati. Consideriamo le tre rigate razionali normali $R^{m'+1}$, $R^{m''-m'+1}$, $R^{r-m''}$ che sono rappresentate dalle direttrici minime di V_3; esse avranno le generatrici riferite proiettivamente in modo che terne di generatrici corrispondenti siano complanari. Le tre rigate hanno quindi a due a due una direttrice comune. Tali direttrici sono necessariamente tre rette poichè, nel caso opposto, ragionando come sopra si avrebbe che Σ appartiene ad uno spazio di dimensione $< r$. Ne viene che Σ è costituito dalle rette appartenenti ai piani congiungenti terne di punti corrispondenti di tre punteggiate a due a due proiettive. Il caso si presenta solo per $r \leq 5$ e si verifica facilmente che tali sistemi Σ appartengono ad un numero di complessi lineari indipendenti minore di $\theta(r, 3)$.

Nel caso $h = 2$, $r = 5$ la V_2 di V_t può essere la superficie di VERONESE. Ciascuna conica delle superficie rappresenta una schiera rigata ([11]). La V_3 di S_5 immagine di Σ contiene pertanto ∞^2 quadriche e quindi è segata da un S_4 secondo una superficie che contiene ∞^2 coniche. Tale superficie è la proiezione della superficie di VERONESE e quindi algebrica di ordine 4 oppure 3. Le rette di Σ costituiscono quindi una V_3^4 o una V_3^3. Il primo caso è da scartare poichè la proiezione da un suo punto in un S_4 darebbe luogo ad una V_3^3 le cui rette appartengono a $\theta(4, 2)$ complessi lineari indipendenti, mentre in S_4 una tale V_3 è di ordine due.

La V_3^3 di S_5 che possiede ∞^2 quadriche è la varietà di SEGRE prodotto topologico di una retta e di un piano. Essa può anche generarsi congiungendo punti corrispondenti di due piani sghembi

([11]) Una conica della grassmanniana può rappresentare anche le tangenti ad una conica. Ma tale caso è da scartare in quanto la V_3 luogo delle rette Σ conterrebbe ∞^2 piani immagine delle coniche della superficie di VERONESE e quindi sarebbe un S_3.

omografici. Le rette di Σ sono quelle congiungenti queste coppie di punti.

Infine nel caso $h=3$, $r=5$ la V_3 di V_t può essere un cono proiettante una superficie di VERONESE. Ma le generatrici di tale cono rappresenterebbero ∞^2 fasci contenenti tutti la retta rappresentata dal vertice. A ciascun fascio apparterrebbe anche una retta della $V_3{}^3$ di S_5 rappresentata della superficie di VERONESE. Le ∞^2 rette di tale $V_3{}^3$ si appoggerebbero tutte ad una medesima retta e ciò è assurdo dovendo in tale caso appartenere ad un S_4 appoggiandosi ad un piano e ad una retta.

Rimane ancora da verificare che nei casi non esclusi Σ appartiene veramente a $\theta(r, h)$ complessi lineari indipendenti. Se Σ è costituito dalle ∞^2 rette di S_5 congiungenti coppie di punti corrispondenti di due piani omografici, assumendo tali piani coincidenti con i piani $x_0=x_1=x_2=0$ e $x_3=x_4=x_5=0$, può farsi in modo che le rette di Σ siano quelle congiungenti i punti $(1, u, v, 0, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 1, u, v)$. Si verifica agevolmente che Σ appartiene a $\theta(5, 2)=9$ complessi lineari indipendenti.

Infine nel caso generale supponiamo che g abbia equazioni $x_2=x_3=\dots=x_r=0$ e che la $S_{h-1}-V_h$ appartenga all'S_{r-2} di equazioni $x_0=x_1=0$. Le ∞^h rette di Σ sono quelle che congiungono il punto $(1, \mu, 0, \dots, 0)$ con il punto

$$(0,\ 0,\ 1,\ \mu, \dots, \mu^{m'},\ \mu_1,\ \mu_1\mu, \dots, \mu_1\mu^{m''-m'}, \dots, \mu_{h-1},\ \mu_{h-1}\mu, \dots, \mu_{h-1}\mu^{r-1-m^{(h-1)}}).$$

Le uniche coordinate non nulle sono le $p_{02}, p_{03}, \dots, p_{0r}$ e le $p_{12}, p_{13}, \dots, p_{1r}$; ma delle seconde solo h sono indipendenti dalle prime; sicchè risulteranno in totale $\binom{r+1}{2}-(r-1)-h=\theta(r, h)$ equazioni indipendenti nelle $p_{i_0 i_1}$.

9. I sistemi Σ ∞^h di S_k di un S_r appartenenti a $\theta(r, k, h)$ complessi lineari indipendenti.

Si ha il teorema:

Gli unici sistemi Σ ∞^h $(h>1)$ ([12]) *di* S_k *di un* S_r *appartenenti a* $\theta(r, k, h)$ *complessi lineari indipendenti sono quelli che si ottengono riferendo proiettivamente gli* S_{k-1} *di un fascio con gli* S_{h-1} *di una* $S_{h-1}-V_h$ *di* S_{r-k-1} *e proiettando da ciascun* S_{k-1} *del fascio i punti dello* S_{h-1} *corrispondente, e, per* $h=2$ *e* $r=k+4$, *proiet-*

([12]) Per $h=1$ è noto il risultato: « Le sole V_{k+1} (non S_{k-1}-coni) luogo di ∞^1 S_k che appartengono a $\vartheta(r, k, 1)$ complessi lineari indipendenti sono le S_k-V_{k+1} razionali normali ». Si veda: D. GALLARATI [5].

tando da un S_{k-2} le ∞^2 rette congiungenti coppie di punti di due piani omografici.

Intersecando Σ con un generico S_{r-k+1} si ottiene un sistema $\Sigma' \infty^h$ di rette che, a norma della proposizione del n. 5, appartiene a $\theta(r-k+1, h)$ complessi lineari indipendenti. La V'_h rappresentativa di Σ' è prospettiva della V_h rappresentativa di Σ e quindi è una $S_{h-1}-V_h$ razionale normale di $S_{r-k+h-1}$, oppure se $h=2$ e $r=k+4$ la superficie di VERONESE. Ciò é evidente per quanto è stato detto al n. 5.

Gli S_{h-1} della V_h rappresentano delle iperstelle di S_k i cui centri, stanno in un fascio. Ciò si vede ragionando come al n. precedente, e tenendo presente che i centri delle iperstelle di S_k per sezione con un S_{r-k+1} generico devono dare luogo a una punteggiata. Ripetendo le stesse considerazioni del n. precedente si perviene alla generazione dei sistemi Σ di cui all'enunciato.

Nel caso della superficie di VERONESE si perviene al risultato tenendo presente che sezionando con un S_{r-k+1} deve presentarsi il caso di ∞^2 rette di cui al teorema precedente.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. COMESSATTI, *Osservazioni di geometria della retta in un S_r*, « Atti Ist. Veneto », LXXX, pp. 387-405 (1921).

[2] B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*, « Memorie Acc. Naz. Lincei », (6), II, fasc. XIX, pp. 577-592.

[3] A. ROSENBLATT, *Sur la variété de Grassmann qui représente les espaces linéaire à k dimensions contenus dans un espace linéaire à r dimensions*, « Mémoires Soc. rojale des Sci. de Liége », (3), XVI, pp. 1-36 (1930).

[4] D. GALLARATI, *Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), XIV, pp. 213-220 (1953).

[5] D. GALLARATI *Sulle varietà di S_r composte di ∞^1 S_k, i cui S_k, appartengono al massimo numero di complessi lineari*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), XIV, pp. 408-412 (1953).

[6] D. GALLARATI, *Sul massimo numero di complessi lineari di S_k di S_r linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli S_k tangenti di una V_k di S_r*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), XV, pp. 10-15(1953).

[7] A. BELLATALLA, *Sulle varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari*, « Atti Acc. Sci. Torino », XXXVI, pp. 803-833.

[8] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina (1923).