Anna Cenacchi

Sull'integrazione approssimata della equazione del moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica e ad una forza resistente di tipo idraulico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 249–257.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_249_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Sull' integrazione approssimata della equazione del moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica e ad una forza resistente di tipo idraulico.

Nota di ANNA CENACCHI (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si determinano per il parametro che compare nella equazione del moto di un punto materiale soggetto a forza elastica e a forza resistente di tipo idraulico, valori per cui la soluzione esatta di tale equazione quella approssimata (ottenuta col metodo di* KRYLOFF-BOGOLIUBOFF) *differiscono, in modulo, meno di una fissata quantità.*

1. In una nota precedente [1], applicando un metodo del GRAFFI [2], ho preso in esame l'equazione di VAN DER POL ed ho determinato i valori del ben noto parametro ε per cui la differenza tra la soluzione esatta di tale equazione e quella approssimata ottenuta col metodo di KRYLOFF e BOGOLIUBOFF [3] (che, per brevità, diremo K. B.) rimane, in modulo, inferiore ad un numero prefissato.

In questa nota intendo svolgere analoghe considerazioni per l'equazione del moto di un punto materiale soggetto a forza elastica e a forza resistente di tipo idraulico, equazione che, con una opportuna scelta dell'unità di tempo, si può scrivere:

$$\ddot{x} + \varepsilon \,|\, \dot{x} \,|\, \dot{x} + x = 0. \tag{1}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 4 luglio 1961.

[1] A. CENACCHI. *Sulla integrazione approssimata della equazione di* VAN DER POL. Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Vol. 95 (1960-61) pp. 314-335.

[2] D. GRAFFI, *Considerazioni sui metodi approssimati della meccanica non lineare,* «Annali di Matematica pura ed applicata», (1960), (IV) Vol. XLIX pp. 327-358.

D. GRAFFI, *Sull'integrazione approssimata delle equazioni della meccanica non-lineare,* «Symposium, Centre International Provisoire de Calcul», 1960, pp. 447-457.

[3] Cfr. p. e. A. PIGNEDOLI, *Lezioni di analisi matematica,* Vol. III Cedam, Padova 1957, Cap. VI § 8.

Lo studio di questo problema può presentare un certo interesse, perchè la (1), a differenza della equazione di VAN DER POL, rappresenta un sistema dissipativo, quindi il punto materiale compie solo oscillazioni smorzate.

Applicando alla (1) il metodo K. B. dobbiamo porre:

$$x = a \operatorname{sen} \psi \qquad (2) \qquad\qquad \dot{x} = a \cos \psi \qquad (3)$$

con a e ψ funzioni di t.

Con calcoli noti si ottiene che la (2) è soluzione della (1) qualora a e ψ siano le funzioni ottenute integrando il sistema:

$$\dot{a} = - a\varepsilon \cos^2 \psi \,| a \cos \psi | \tag{4}$$

$$\dot{\psi} - 1 = \varepsilon \operatorname{sen} \psi \cos \psi \,| a \cos \psi | \tag{5}$$

a cui si devono aggiungere i valori iniziali $a_0 \neq 0$ e ψ_0, facilmente calcolabili mediante le (2) e (3) dai valori iniziali di x e $\dot{x}$. Anzi, poichè si può scegliere ψ_0 in modo che sia $a_0 > 0$ [4], è facile provare che, per ogni $t > 0$, è $a > 0$: infatti. se in un certo istante t_0 fosse $a(t_0) = 0$, le (4) e (5) sarebbero soddisfatte, per ogni valore di t, da $a(t) = 0$, $\psi(t) = \psi(t_0) + t - t_0$; in altre parole la soluzione della (1) si ridurrebbe alla soluzione banale $x = 0$ che va esclusa, perchè a_0 e quindi almeno $x(0)$ o $\dot{x}(0)$ sono diversi da zero. Di conseguenza, dalla (4), si ha $\dot{a}(t) < 0$, cioè $a(t)$ è sempre decrescente.

Ora, detti $K(a)$ e $P(a)$ i termini indipendenti da ψ nello sviluppo in serie di FOURIER, rispetto a questa variabile, dei secondi membri di (4) e (5), e osservato che $K(a) = - \frac{4}{3\pi} a^2$, $P(a) = 0$, il metodo di approssimazione K. B. consiste nel sostituire alle (4) e (5) il sistema seguente:

$$\dot{\bar{a}} = - \varepsilon \frac{4}{3\pi} \bar{a}^2 \qquad (6) \qquad\qquad \dot{\bar{\psi}} = 1. \qquad (7)$$

[4] Cfr. D. GRAFFI, *Considerazioni sui metodi ecc.*, cit. p. 335.

Più precisamente si assume come soluzione approssimata della (1) la (2) in cui a e ψ vengono sostituite dalle funzioni $\overline{a}$ e $\overline{\psi}$ ottenute integrando il sistema (6) e (7) con a_0 e ψ_0 come valori iniziali. Si ha cioè:

$$(8) \qquad \overline{a} = \frac{3\pi a_0}{4\varepsilon t a_0 + 3\pi} \qquad\qquad (9) \qquad \overline{\psi} = t + \psi_0 .$$

In questa nota, come ho già accennato, mi propongo di ricavare per quali valori di ε l'errore assoluto (ed anche l'errore relativo, per quel che riguarda l'ampiezza) commesso sostituendo $\overline{a}$ e $\overline{\psi}$ ad a e ψ, in un dato intervallo di tempo. rimane inferiore ad un numero prefissato.

È bene osservare che, a differenza di quanto accade per l'equazione di VAN DER POL, ε non è un numero puro; lo si può però rendere tale, assumendo come incognita $y = \frac{x}{a_0}$ invece di x, o, ciò che è lo stesso, scegliendo l'unità di misura per x in modo che a_0 sia eguale ad 1. Perciò i valori di ε che verranno calcolati saranno relativi a questo caso; comunque, per maggiore generalità, verrà usato spesso il simbolo a_0 in luogo di 1.

2. Scriviamo le (4) e (5) nella forma seguente:

$$(10) \qquad \dot{a} = \varepsilon\left(F(a,\ \psi) - \frac{4}{3\pi}\, a^2\right)$$

$$(11) \qquad \dot{\psi} = 1 + \varepsilon G(a,\ \psi)$$

avendo posto:

$$(12) \qquad F(a,\ \psi) = a^2\left(\frac{4}{3\pi} - \cos^2\psi\, |\cos\psi|\right)$$

$$(13) \qquad G(a,\ \psi) = a \operatorname{sen}\psi \cos\psi\, |\cos\psi| .$$

Prefissato ora il numero η (positivo ed inferiore ad a_0), determiniamo anzitutto il valore di ε per cui, in un certo intervallo $(0, \bar{t})$, si abbia $|a - \bar{a}| < \eta$. Ovviamente esisterà un intervallo $(0, h)$ in cui questa relazione è verificata, e in esso, come dimostra il GRAFFI [5], si ha (se $0 \leq t \leq h$):

$$(14) \qquad |a - \bar{a}| = \left| \int_0^t \varepsilon F(a, \psi) \exp\left(-\varepsilon \int_0^y H_\theta dy \right) dy \right| \exp\left(\varepsilon \int_0^t H_\theta dt \right)$$

dove, se θ indica un numero compreso tra 0 e 1:

$$(15) \qquad H_\theta = \frac{\partial K}{\partial a}(\bar{a} + \theta(a - \bar{a})) = -\frac{8}{3\pi}(\bar{a} + \theta(a - \bar{a})) = \frac{8}{3\pi}((1-\theta)\bar{a} + \theta a).$$

Poichè a e $\bar{a}$ sono positive, si ha $H_\theta < 0$; di conseguenza $\exp\left(-\varepsilon \int_0^y H_\theta dy \right)$ è sempre crescente nell'intervallo $(0, h)$. Si può allora applicare all'integrale a secondo membro di (14) il secondo teorema della media, per cui, se ξ è un istante compreso tra 0 ed h, si ha:

$$(16) \qquad |a - \bar{a}| \leq \left| \varepsilon \int_\xi^t F(a, \psi) dt \right|.$$

Applicando un teorema che permette di maggiorare il secondo membro di (16) [6], si può scrivere per ogni istante $0 \leq t \leq h$ (R ed M, come vedremo, sono quantità dipendenti dall'intervallo di variabilità di a in $(0, \bar{t})$ ma indipendenti da ε, ψ, t):

$$(17) \qquad |a - \bar{a}| \leq R\varepsilon^2 t + M\varepsilon.$$

Ciò posto, come dimostra il GRAFFI [7], è possibile rendere

[5] *Sull'integrazione approssimata ecc.*, cit. pp. 451-452.
[6] Cfr D. GRAFFI, *Considerazioni sui metodi ecc.*, cit pp. 331-333.
[7] *Sull'integrazione approssimata ecc.*, cit p. 456.

$|a - \bar{a}| < \eta$ in tutto l'intervallo $(0, \bar{t})$, non appena ε sia minore del numero ε_1 soddisfacente la relazione:

$$(18) \qquad R\varepsilon_1^2 \bar{t} + M\varepsilon_1 = \eta.$$

Si conclude pertanto, poichè quanto si è detto vale evidentemente per ogni $\bar{t} > 0$, che, in un generico intervallo $(0, \bar{t})$, l'ampiezza delle oscillazioni differisce, in modulo, dal valore approssimato (8) per una quantità minore di η, purchè ε sia inferiore ad ε_1.

3. Determiniamo ora le espressioni di M e di R per un generico intervallo E di variabilità della a. Allo scopo seguiamo il secondo dei due metodi indicati dal GRAFFI, per cui, se m, n, l_1, l_2 sono valori maggioranti rispettivamente $\left|\frac{\partial F}{\partial a}\right|$, $\left|\frac{\partial F}{\partial \psi}\right|$, $|K(a) + F(a, \psi)|$, $|G(a, \psi)|$ per a variabile in E, si ha:

$$(19) \qquad \frac{M}{2\pi} \geq |F(a, \psi)| \qquad\qquad (20) \qquad R = \pi(ml_1 + nl_2).$$

Indicato con a_m il massimo di a in E, si può scrivere:

$$(21) \qquad |F(a, \psi)| = a^2 \left| \left|\frac{4}{3\pi} - \cos^2\psi\right| \cos\psi \right| \leq a^2 \left(\frac{3\pi - 4}{3\pi}\right) < \frac{2}{3} a_m^2 .$$

Analogamente si ottiene:

$$(22) \qquad l_1 = a_m^2, \quad l_2 = \frac{a_m}{2}, \qquad m = \frac{4}{3} a_m, \qquad n = \frac{3}{2} a_m^2$$

per cui:

$$(23) \qquad M = \frac{4\pi}{3} a_m^2 \qquad\qquad (24) \qquad R = \frac{25}{12} \pi a_m^3 .$$

Determiniamo quindi il valore di ε_1 per un generico intervallo $(0, \bar{t})$ in cui $\bar{a}$ passa dal valore $a_0 = 1$ al valore μ; si ha intanto:

$$\varepsilon \bar{t} = -\frac{3}{4}\pi \int_1^\mu \frac{d\bar{a}}{\bar{a}^2} = \frac{3}{4}\pi\left(\frac{1}{\mu} - 1\right). \tag{25}$$

Quindi, tenendo conto che il massimo valore che a raggiunge in $(0, \bar{t})$ è 1, in quanto, come si è visto, a è decrescente, dalla (18) si ha subito:

$$\varepsilon_1 = \frac{\eta}{\pi\left[\frac{25}{16}\pi\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \frac{4}{3}\right]}. \tag{26}$$

Come primo esempio, applichiamo la (26) ponendo $\eta = \frac{1}{100}$, $\mu = \frac{1}{2}$; eseguendo i calcoli ([8]) si ottiene che, nell'intervallo di tempo in cui l'ampiezza si riduce sensibilmente alla metà del suo valore iniziale, l'errore assoluto che si commette, sostituendo all'ampiezza effettiva il suo valore approssimato, rimane inferiore ad $\frac{1}{100}$ purchè ε sia minore di 5.10^{-4}; se poi si vuole che anche l'errore relativo rimanga inferiore ad $\frac{1}{100}$, occorre che ε sia minore di $2,5.10^{-4}$. Se si assume invece $\mu = \frac{1}{100}$, cioè si considera l'intervallo di tempo in cui l'ampiezza si riduce sensibilmente ad $\frac{1}{100}$ di quella iniziale, si trova che l'errore assoluto rimane inferiore ad $\frac{1}{100}$ se ε è minore di $6,5.10^{-6}$, mentre l'errore relativo sarà inferiore ad $\frac{1}{100}$ se ε è minore di $6,5.10^{-8}$.

4. Vedremo ora che è possibile sostituire alla (26) una formula che permette di calcolare un valore più alto per ε_1: a tale formula

([8]) Si noti che nell'eseguire i calcoli si è approssimata per difetto l'espressione di ε_1, in quanto la (18) e quindi anche la (26) valgono anche se al posto dell'uguale si pone il segno minore.

si giunge osservando che R ed M vanno diminuendo al diminuire di a. È bene però tenere presente che essa è opportuna solo nel caso in cui si voglia calcolare l'errore relativo.

A questo scopo riprendiamo la (14), e, indicato con t un istante generico dell'intervallo $(0, \bar{t})$ in cui $\bar{a}$ passa dal valore a_0 al valore μ, consideriamo una successione di istanti $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots < t_r$, con $t_{r-1} < t \leq t_r$ e tali che, per $k = 0, 1, \ldots, r$, sia $\bar{a}(t_k) = \frac{1}{k+1}$. Si può allora scrivere, applicando all'integrale della (14) la proprietà additiva e ai singoli integrali ottenuti il secondo teorema della media:

$$
(27) \qquad |a - \bar{a}| = \left| \sum_{k=1}^{r-1} \exp\left(-\varepsilon \int_0^{t_k} H_\theta dy\right) \int_{\xi_k}^{t_k} \varepsilon F(a, \psi) dy + \right.
$$

$$
\left. + \exp\left(-\varepsilon \int_0^t H_\theta dy\right) \int_{\xi_r}^{t} \varepsilon F(a, \psi) dy \right| \exp\left(\varepsilon \int_0^t H_\theta dy\right) \leq
$$

$$
\leq \sum_{k=1}^{r-1} \left| \int_{\xi_k}^{t_k} \varepsilon F(a, \psi) dy \right| + \left| \int_{\xi_r}^{t} \varepsilon F(a, \psi) dy \right|
$$

dove si è indicato con ξ_k un punto dell'intervallo (t_{k-1}, t_k) per $k = 1, 2, \ldots r-1$, e con ξ_r un punto dell'intervallo (t_{r-1}, t). Se ora si applica a ciascuno degli integrali all'ultimo membro di (27) la formula di maggiorazione precedentemente usata, si può scrivere:

$$
(28) \qquad |a - \bar{a}| \leq \sum_{k=1}^{r} [R_k \varepsilon^2 (t_k - t_{k-1}) + M_k \varepsilon]
$$

essendo R_k ed M_k i valori di R ed M relativi a quelli che a assume nell'intervallo (t_{k-1}, t_k) per $k = 1, 2, \ldots r$. La (28) vale evidentemente per ogni t; è possibile allora, analogamente a quanto si è fatto al § 2, rendere l'errore relativo inferiore ad una quantità prefissata δ, in tutto l'intervallo $(0, \bar{t})$, e perchè ciò accada, se con n si indica il minimo intero per cui $\frac{1}{n+1} < \mu$, basterà assumere ε minore del numero ε_1 tale che:

$$(29) \qquad \sum_{k=1}^{n} [R_k \varepsilon_1^2 (t_k - t_{k-1}) + M_k \varepsilon_1] = \delta \mu .$$

Per calcolare i valori di M_k e di R_k, applichiamo le (23) e (24); osservando che in ogni intervallo (t_{k-1}, t_k), supposto l'errore relativo minore di δ, si può scrivere $| a - \overline{a} | < \delta \overline{a}$, cioè $a < \overline{a}(1 + \delta)$, si ha subito:

$$(30) \qquad M_k = \frac{4}{3}\pi \frac{(1+\delta)^2}{k^2} \qquad\qquad (31) \qquad R_k = \frac{25}{12}\pi \frac{(1+\delta)^3}{k^3} .$$

Inoltre:

$$(32) \qquad \varepsilon(t_k - t_{k-1}) = -\frac{3}{4}\pi \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} \frac{d\overline{a}}{\overline{a}^2} \leq \frac{3}{4}\pi k .$$

Sostituendo nella (29) si ottiene:

$$(33) \sum_{k=1}^{n} [R_k \varepsilon_1^2 (t_k - t_{k-1}) + M_k \varepsilon_1] < \varepsilon_1 (1+\delta)^2 \pi \left(\frac{25}{16}\pi(1+\delta) + \frac{4}{3}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} <$$

$$< \varepsilon_1 (1+\delta)^2 \frac{\pi^3}{6} \left[\frac{25}{16}\pi(1+\delta) + \frac{4}{3}\right] \quad (^9).$$

Si conclude perciò che, nell'intervallo di tempo in cui $\overline{a}$ passa dal valore $a_0 = 1$ al valore μ, l'errore relativo che si commette sostituendo $\overline{a}$ ad a rimane inferiore al numero δ se ε è minore

(9) ovviamente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} ;$$

cfr. M. PICONE, «*Appunti di analisi superiore*», RONDINELLA, Napoli, 1940, p. 99.

dell'ε_1 seguente:

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta\mu}{(1+\delta)^2 \frac{\pi^3}{6}\left[\frac{25}{16}\pi(1+\delta)+\frac{4}{3}\right]}. \tag{34}$$

Per confrontare con i risultati già ottenuti, poniamo $\delta = \frac{1}{100}$, $\mu = \frac{1}{100}$; si ottiene $\varepsilon_1 = 3.10^{-6}$, cioè un valore di ε_1 46 circa più grande di quello ottenuto in precedenza.

6. Passiamo ora allo studio della ψ.

Se $\bar{t}$ indica al solito il tempo che $\bar{a}$ impiega nel passare da a_0 a μ ed è in $(0, \bar{t})$ $|a - \bar{a}| < \eta$, vale per ogni $0 \leq t \leq \bar{t}$ la limitazione ([10]):

$$|\psi - \bar{\psi}| \leq \left|\varepsilon \int_0^t G(a, \psi)dt\right| \leq R'\varepsilon^2\bar{t} + M'\varepsilon \tag{35}$$

dove R' ed M' sono quantità dipendenti da a ma non da ε, ψ, t, che si possono calcolare come R ed M sostituendo la funzione $G(a, \psi)$ alla $F(a, \psi)$ e supponendo a variabile tra $\mu - \eta$ ed a_0. Procedendo in maniera analoga a quanto si è fatto per R ed M, si ottiene subito $M' = \pi a_0$, $R' = \frac{3}{2}\pi a_0^2$.

Posto $a_0 = 1$, si osservi che se ε è un valore del parametro per cui $|a - \bar{a}| < \eta$, esso sarà certamente inferiore all'espressione a secondo membro di (26); quindi, tenendo conto anche della (25), si avrà:

$$|\psi - \bar{\psi}| \leq \varepsilon\pi\left[\frac{9}{8}\pi\left(\frac{1}{\mu}-1\right)+1\right] < \frac{\eta\left[\frac{9}{8}\pi\left(\frac{1}{\mu}-1\right)+1\right]}{\frac{25}{16}\pi\left(\frac{1}{\mu}-1\right)+\frac{4}{3}} < \eta\,. \tag{36}$$

Poichè dunque è $|\psi - \bar{\psi}| < \eta$, la ψ è rappresentata con approssimazione più che sufficiente dalla $\bar{\psi}$.

([10]) Cfr. D. Graffi, *Considerazioni sui metodi ecc.*, cit., p. 337.