Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Sul teorema fondamentale della nomografia.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 258–263.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_258_0>

Sul teorema fondamentale della nomografia.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si dimostra che ogni tritessuto non esagonale di rette ammette al più undici deformazioni proiettive e si indica una via per dimostrare il « teorema fondamentale della nomografia*

1. Introduzione.

Nel 1912 H. F. GRONWALL enunciava, senza dimostrarlo, il seguente teorema: « Se un'equazione in tre variabili ammette una rappresentazione nomografica a punti allineati, escluso il caso in cui le tre scale costituiscano una cubica, questa rappresentazione è unica a meno di omografie » (1). Questo teorema, che viene chiamato *teorema fondamentale della nomografia,* per quanto mi consta, non fu mai dimostrato.

Più tardi, nello studio dei tritessuti di curve piane e delle trasformazioni puntuali fra piani, vari A. A. si sono imbattuti nella stessa questione dimostrando il teorema solo in casi particolari; così W. BLASCHKE, G. BOL, O. BORŮWKA, J. DUBOURDIEU (2). A tutti questi A. A. la questione si presenta nel suo aspetto duale: « Ogni tritessuto di rette, escluso il caso in cui le tre schiere costituiscano un inviluppo di terza classe, non si può trasformare in un tritessuto di rette con trasformazioni non omografiche ».

Nella teoria della deformazione proiettiva dei tritessuti l'ipotesi precedente si enuncia: « Gli unici tritessuti di rette proiettivamente deformabili sono quelli a configurazione esagonale ossia quelli costituiti dalle rette di un inviluppo di terza classe » (3).

Il contributo di maggior rilievo alla nostra questione è forse quello dovuto a G. BOL che dimostra il teorema: « Ogni tritessuto non esagonale di rette ammette al più diciassette deformazioni proiettive » (4).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 10 luglio 1961.

(1) H. F. GRONWALL, [1].

(2) W. BLASCHKE, [2], [3]; G. BOL, [4], [5]; O. BORŮWKA [6]; J. DUBOURDIEU, [7].

(3) Si veda: G. VAONA, [8].

(4) Si veda: G. BOL, [4].

Nella presente Nota miglioro il risultato di G. Bol dimostrando che: *Ogni tritessuto non esagonale di rette ammette al più undici deformazioni proiettive.* Indico inoltre una via per risolvere la questione in forma definitiva. Farò sovente riferimento alla mia memoria [8] alla quale rimando per le notazioni, per molti sviluppi analitici e per alcune nozioni di cui qui faccio uso.

2. Posizione analitica del problema.

Un tritessuto analitico di rette di un piano proiettivo si può sempre rappresentare localmente, a meno di omografie, con il sistema di equazioni differenziali

$$
\begin{aligned}
x_{uu} &= -bx_u + px \\
x_{uv} &= a\,x_u + bx_v + cx \\
x_{vv} &= -ax_v + qx,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dove $p = 2b^2 + b_u$, $c = -ab - a_u - b_v$, $q = 2a^2 + a_v$ e dove le funzioni a e b soddisfano alle condizioni

$$
\begin{aligned}
a_{uu} + 2b_{uv} + 3ba_u + 6bb_v &= 0 \\
b_{vv} + 2a_{uv} + 3ab_v + 6aa_u &= 0;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

e mediante l'equazione differenziale

$$dudv(dv - \lambda du) = 0 \qquad (\lambda \neq 0), \tag{3}$$

dove

$$3\lambda(b - \lambda a) + \lambda_u + \lambda\lambda_v = 0 \text{ (5)}. \tag{4}$$

Affinchè il tritessuto non sia esagonale cioè non sia costituito dalle rette di un inviluppo di terza classe deve essere

$$\Delta = (\log\,\lambda)_{uv} \neq 0. \tag{5}$$

(5) Si veda: G. Vaona, [8], pp. 46, 47.

Infine affinchè il tritessuto sia proiettivamente deformabile è necessario e sufficiente che il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} &X_{uu} + 2\lambda X_{uv} - 3\lambda X(X_u + 2\lambda X_v) - 6\lambda\lambda_v X^2 + EX_u + FX_v + GX = 0 \\ (6)\qquad & \\ &\lambda X_{vv} + 2X_{uv} - 3X(\lambda X_v + 2X_u) - 3\lambda_v X^2 + LX_u + MX_v + NX = 0, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} &E = 2\lambda_v + 3b, \quad F = 2\lambda_u + 6\lambda b, \quad G = F_v + 3\lambda a_u \\ (7)\qquad & \\ &L = 6a, \qquad\qquad M = 2\lambda_v + 3\lambda a, \quad N = L_u + \lambda_{vv} + 3\lambda_v a + 3b_v, \end{aligned}$$

ammetta almeno una soluzione $X \neq 0$ (6).

3. Conseguenze differenziali delle (6).

Derivando due volte le (6) ed eliminando le derivate terze e quarte di X si perviene alla nuova equazione del 2° ordine

$$(8)\qquad RX_{uv} + \alpha XX_u + \delta XX_v + \varepsilon X_u + \theta X_v + \rho X^3 + \sigma X^2 + \tau X = 0,$$

dove

$$\begin{aligned} &R = -8\lambda\Delta, \quad \alpha = 24\lambda\Delta, \quad \delta = 24\lambda^2\Delta, \quad \rho = -9\lambda^2\Delta \\ &\varepsilon = \left(-24\lambda a - 4\frac{\lambda_u}{\lambda} + 2\lambda_v\right)\Delta + 4\Delta_u + 2\lambda\Delta_v \\ &\theta = (-24\lambda^2 a - 2\lambda_u + 12\lambda\lambda_v)\Delta + 2\lambda\Delta_u + 4\lambda^2\Delta_v \\ (9)\quad &\sigma = (27\lambda^2 a + 15\lambda\lambda_v)\Delta \\ &\tau = 4\lambda\Delta^2 + (-27\lambda^2 a^2 - 24\lambda a_u - 24\lambda^2 a_v - 30\lambda\lambda_v a + 9\lambda\lambda_{vv} + 10\lambda_v^2 - \\ &\quad - 3\frac{\lambda_u\lambda_v}{\lambda} + 3\frac{\lambda_u^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda_{uu}}{\lambda}\Big)\Delta + 3\left(\lambda_v - \frac{\lambda_u}{\lambda}\right)\Delta_u + (7\lambda\lambda_v - \lambda_v)\Delta_v + \Delta_{uu} + \\ &\quad + \lambda\Delta_{uv} + \lambda^2\Delta_{vv}. \end{aligned}$$

(6) Si veda: G. Vaona, [8], pp. 51, 52.

Essendo il tritessuto non esagonale per ipotesi e quindi $R \neq 0$, dalle (6) e dalle (8) si ha il sistema

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= -3\lambda X X_u + A_1 X_u + A_2 X_v + \frac{9}{4}\lambda^2 X^3 + A_3 X^2 + A_4 X \\
(10)\quad X_{uv} &= 3X(X_u + \lambda X_v) + B_1 X_u + B_2 X_v - \frac{9}{8}\lambda X^3 + B_3 X^2 + B_4 X \\
X_{vv} &= -3XX_v + C_1 X_u + C_2 X_v + \frac{9}{4} X^3 + C_3 X^2 + C_4 X,
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \frac{2\lambda\varepsilon}{R} - E, \quad A_2 = \frac{2\lambda\theta}{R} - F, \quad A_3 = \frac{2\lambda\sigma}{R} + 6\lambda\lambda_v, \quad A_4 = \frac{2\lambda\tau}{R} - G \\
(11)\quad &B_1 = -\frac{\varepsilon}{R}, \qquad B_2 = -\frac{\theta}{R}, \qquad B_3 = -\frac{\sigma}{R}, \qquad B_4 = -\frac{\tau}{R} \\
&C_1 = \frac{2\varepsilon}{\lambda R} - \frac{L}{\lambda}, \quad C_2 = \frac{2\theta}{\lambda R} - \frac{M}{\lambda}, \quad C_3 = \frac{2\sigma}{\lambda R} + 3\frac{\lambda_v}{\lambda}, \quad C_4 = \frac{2\tau}{\lambda R} - \frac{N}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Le condizioni di integrabilità del sistema (10) conducono alle due nuove equazioni differenziali del 1° ordine

$$
(12)\quad \begin{aligned}
&X_u^2 + 2\lambda X_u X_v + (P_1 X^2 + P_2 X + P_3) X_u + \\
&+ (P_4 X^2 + P_5 X + P_6) X_v + P_7 X^3 + P_8 X^2 + P_9 X = 0
\end{aligned}
$$

$$
(13)\quad \begin{aligned}
&2X_u X_v + \lambda X_v^2 + (Q_1 X^2 + Q_2 X + Q_3) X_u + \\
&+ (Q_4 X^2 + Q_5 X + Q_6) X_v + Q_7 X^3 + Q_8 X^2 + Q_9 X = 0,
\end{aligned}
$$

dove, in particolare,

$$
P_1 = \frac{15}{8}\lambda, \; P_2 = \lambda B_1 + B_2 + \frac{2}{3} B_3 + \lambda_v, \; P_4 = \frac{15}{4}\lambda^2,
$$

$$
P_5 = 3\lambda B_2 + 2A_2 - \lambda A_1 - \frac{2}{3} A_3 + \lambda_u
$$

$$Q_1 = \frac{15}{4}, \quad Q_2 = 3B_1 + 2\lambda C_1 - C_2 - \frac{2}{3} C_3, \quad Q_4 = \frac{15}{8} \lambda,$$

$$Q_5 = \lambda B_1 + B_2 + \frac{2}{3} B_3 + \lambda_v .$$

Derivando la (12) rispetto ad u e la (13) rispetto a v ed eliminando X_u^2 e X_v^2 si hanno due nuove equazioni del 1° ordine del tipo

$$\begin{aligned} &S_1 X_u X_v + (S_2 X^3 + S_3 X^2 + S_4 X + S_5) X_u + (S_6 X^3 + S_7 X^2 + S_8 X + S_9) X_v + \\ &\qquad + S_{10} X^4 + S_{11} X^3 + S_{12} X^2 + S_{13} X = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &T_1 X_u X_v + (T_2 X^3 + \ldots + T_5) X_u + (T_6 X^3 + \ldots + T_9) X_v + \\ &\qquad + T_{10} X^4 + T_{11} X^3 + T_{12} X^2 + T_{13} X = 0 , \end{aligned} \tag{15}$$

dove le S e T sono funzioni di u e v non tutte nulle essendo ad es. $S_2 \neq 0$ e $T_2 \neq 0$; inoltre le due equazioni non coincidono. Derivando infine la (12) rispetto a v e la (14) rispetto ad u ed eliminando X_u^2 e X_v^2 si hanno le due equazioni

$$(U_1 X + U_2) X_u X_v + \varphi_3(X) X_u + \psi_3(X) X_v + \gamma_5(X) = 0 \tag{16}$$

$$(V_1 X + V_2) X_u X_v + \varphi_4(X) X_u + \psi_4(X) X_v + \bar{\chi}_5(X) = 0, \tag{17}$$

dove le φ, ψ e χ sono polinomi in X di grado uguale all'indice.

Considerando le ultime quattro equazioni del primo ordine nelle incognite $X_u X_v$, X_u, X_v, per la loro coesistenza deve annullarsi il determinante dei coefficienti e dei termini noti. Ciò conduce ad un'equazione in X non identica di grado 12, onde, scartando la radice $X = 0$, segue il teorema.

4. Osservazione.

Per risolvere definitivamente la questione basta far vedere che eliminando X_u, X_v fra le precedenti equazioni si ottengono delle equazioni in X incompatibili nell'ipotesi $\Delta \neq 0$.

Ma eseguendo l'eliminazione si ottengono delle condizioni contenenti λ, a, b. Mentre b si elimina mediante la (4), per l'eliminazione di a devono essere utilizzate le (2) e le loro conseguenze differenziali. Le (2), posto $a = -y$ si scrivono

$$(18)\qquad \begin{aligned} &y_{uu} + 2\lambda y_{uv} - 3\lambda y(y_u + 2\lambda y_v) - 6\lambda\lambda_v y^2 + \left(\lambda_v - \frac{\lambda_u}{\lambda}\right) y_u - 2\lambda\lambda_v y_v - \\ &\qquad - (2\lambda_v^2 + 2\lambda\lambda_{vv}) y + \varphi = 0 \\ &2y_{uv} + \lambda y_{vv} - 3y(2y_u + \lambda y_v) - 3\lambda_v y^2 + 2\lambda_v y_u - \Delta y + \psi = 0 \end{aligned}$$

dove

$$\varphi = -\frac{2}{3}\left[\lambda_v\lambda_{vv} - \Delta_u - \lambda\Delta_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} - \lambda_v\right)\Delta\right]$$

$$\psi = \frac{1}{3}(\lambda_{vvv} + \Delta_v).$$

Per ottenere le conseguenze differenziali delle (18) si possono utilizzare i calcoli già fatti in quanto le (18) si ottengono dalle (6) con la sostituzione $X = -y + a$.

BIBLIOGRAFIA

[1]. H. F. Gronwall, *Sur les équations entre trois variables rappresentables par des nomogrammes à points allignés*, « Journal de Liouville » (6), VIII (1912).

[2] W. Blaschke - G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlino (1938).

[3] W. Blaschke, *Topologia differenziale e Geometria dei tritessuti*, « Atti Acc. Peloritana », XLI (1939).

[4] G. Bol, *Geradenlinige Kurvengewebe*, « Abhdl. der Hamburghischen Univ. », VIII (1931).

[5] G. Bol, *Ueber Geradengewebe*, « Annali di Mat. pura ed applicata » (4), XVII (1938).

[6] O. Borůwka, *Sur les correspondences analytiques entre deux plans projectifs*, « Publ. Fac. Sciences de Masaryk », n. 72 (1926) e n. 85 (1927).

[7] J. Dubourdieu, *Sur les réseaux de courbes et de surfaces*, « Abhdl. der Hamburghischen Univ. », VII (1930).

[8] G. Vaona, *Sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di curve piane*, « Annali di Mat. pura ed applicata » (4), XLVI (1958).