Bollettino Unione Matematica Italiana

Umberto Gasapina

Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 301–318.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_301_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari.

Nota di UMBERTO GASAPINA (a Milano) (*)

Sunto. - *Si veda l'introduzione.*

INTRODUZIONE. ([1])

Nel presente lavoro dimostriamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la *sezione di una varietà* V_d' non singolare con un generico sottospazio S_{r-h} dello spazio ambiente S_r ([2]) sia *aritmeticamente normale* ([3]) è che sopra una generica varietà non singolare V_d, la quale sia complementare di V_d' ([4]), risultino nulli gli ultimi $h+1$ indici di irregolarità di un multiplo qualunque delle sezioni iperpiane.

Caratterizziamo inoltre i modelli proiettivi normali delle varietà W_d non singolari prive di forme differenziali di prima specie dei gradi $d-1$, $d-2$. ..., $d-h$, ed in particolare i modelli delle W_d che hanno nulle le ultime $h+1$ irregolarità q_d, q_{d-1}, ..., q_{d-h} ([5]).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 4 settembre 1961.

([1]) I numeri fra parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

([2]) Avvertiamo che tutte le varietà da noi considerate si intendono *algebriche* ed immerse in *spazi proiettivi complessi*.

([3]) Una varietà algebrica irriducibile si dice aritmeticamente normale se la totalità delle forme di ordine l di S_r taglia su di essa un sistema lineare completo per ogni valore di l.

([4]) Due varietà V_d e V_d' si dicono complementari l'una dell'altra se formano insieme l'intersezione completa di $r-d$ forme di S_r.

([5]) Questi teoremi sono in un certo senso « duali » di alcune proposizioni stabilite recentemente da MARCHIONNA nella memoria [6]. Invero le condizioni per la normalità aritmetica della sezione di una varietà V_d con un generico S_{r-h} assegnate dal MARCHIONNA vertono sui *primi* h indici d'irregolarità di un multiplo qualunque delle sezioni iperpiane della stessa V_d, mentre le nostre vertono sugli *ultimi* $h+1$ indici analoghi relativi

Mettiamo anche in luce che se la sezione di una V_d con un generico S_{r-d+2} è una superficie regolare ed aritmeticamente regolare allora V_d è totalmente regolare ed aritmeticamente regolare [6].

Per stabilire questi risultati ci siamo appoggiati ad alcune proprietà degli indici d'irregolarità di un sistema lineare determinate nella prima parte del lavoro. Si tratta di proprietà molto semplici; tuttavia esse sono apparse abbastanza utili e sembrano avere qualche interesse di per se stesse nell'ambito delle questioni riguardanti il teorema generale di RIEMANN-ROCH.

CAPITOLO I. - **Sugl'indici d'irregolarità di un sistema lineare d'ipersuperficie tracciato sopra una varietà algebrica.**

§ 1. - Sopra una varietà V_d non singolare di dimensione $d>1$ si considerino il sistema canonico impuro $|K|$, una sottovarietà B non singolare ad i dimensioni $(1 \leq i \leq d-1)$, un sistema lineare completo $|C|$ ed il sistema lineare $|C| \cdot B$ segato su B da $|C|$. Qui e nel seguito indicheremo con $||C| \cdot B|$ il sistema lineare completo individuato sopra B da una varietà del sistema $|C| \cdot B$ e con *def* $|C| \cdot B$ la deficienza del sistema lineare $|C| \cdot B$.

Ricordiamo che — considerato su V_d un divisore D e fissate $d-1$ ipersuperficie generiche, distinte, non singolari $X_1, X_2, \ldots, X_{d-1}$ estratte da altrettanti sistemi ampi di V_d tali che anche i vari sistemi $|X_\lambda + D - K|$ siano ampi — si definisce h^{mo} indice di irregolarità del sistema completo $|D|$, o più semplicemente del divisore D, l'intero non negativo (indipendente dalle X_λ)

$$\sigma^h(D) = \operatorname{def} |D + X_1 + X_2 + \ldots + X_h| \cdot (X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_h).$$

ad una generica varietà complementare di V_d; inoltre in [6] si ottiene una caratterizzazione *diretta* dei modelli proiettivi normali delle W_d prive di forme differenziali dei gradi 1, 2, ..., h, mentre noi caratterizziamo le varietà *complementari* dei modelli proiettivi normali di una W_d priva di forme differenziali dei gradi $d-1$, $d-2$, ..., $d-h$.

(6) Una V_d si dice aritmeticamente regolare se il sistema lineare segato su V_d dalla totalità delle forme di ordine l ha sovrabbondanza nulla per ogni $l>0$; V_d si dice invece totalmente regolare quando ha nulle tutte le irregolarità (il che equivale ad affermare che essa sia priva di forme differenziali di prima specie dei primi $d-1$ gradi).

Si dimostra che

$$\sigma^h(D) = \sigma^{d-h}(K - D)$$

(teorema di dualità di SERRE-HODGE (7)).

Indichiamo infine con

$$\sigma^h(D \cdot \overset{*}{B})$$

l'h^{mo} indice di irregolarità della sottovarietà $D \cap B$ calcolato sulla B.

Ciò posto, dimostriamo il seguente

TEOREMA 1. - *Si considerino su* V_d: *un arbitrario divisore* D *ed* $h-1$ *ipersuperficie generiche* $X_1, X_2, \dots, X_{h-1}$, *distinte, non singolari estratte da altrettanti sistemi ampi di* V_d, *tali che anche i vari sistemi* $|X_\lambda - D|$ *siano ampi.*

Posto $V_{d-h+1} = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{h-1}$, *sussiste la relazione*

$$\sigma^{d-h}(D) = \sigma^{d-h}(D \cdot \overset{*}{V}_{d-h+1})$$

$(d \geq 3,\ 2 \leq h \leq d-1)$.

Per la dimostrazione indichiamo con X_h una generica ipersuperficie appartenente ad un sistema ampio di V_d, tale che anche il sistema $|X_h - D|$ sia ampio.

Tenendo conto del teorema di dualità si ha

$$(1_1) \qquad \sigma^{d-h}(D) = \sigma^h(K - D) =$$

$$= \mathrm{def}\ |K - D + X_1 + X_2 + \dots + X_{h-1} + X_h| \cdot (V_{d-h+1} \cap X_h).$$

Ricordiamo inoltre che il sistema canonico impuro di V_{d-h+1} è il sistema

$$|K(V_{d-h+1})| = ||K + X_1 + X_2 + \dots + X_{h-1}| \cdot V_{d-h+1}| \ (8)$$

ed osserviamo che i sistemi $||X_h| \cdot V_{d-h+1}|$ e $||X_h - D| \cdot V_{d-h+1}|$ sono ampi (9); ciò implica (sempre per il teorema di dualità, appli-

(7) HODGE, [3].

(8) Cfr. ad es. [7], pag. 403.

(9) Infatti sono ampi, per ipotesi, i sistemi $|X_h|$ e $|X_h - D|$ tracciati su V_d.

cato ora alla varietà V_{d-h+1} che ha dimensione $d-h+1$):

$$\sigma^{d-h}(D \cdot \overset{*}{V}_{d-h+1}) = \sigma^1((K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1}) \cdot \overset{*}{V}_{d-h+1}) =$$

$$\operatorname{def} \| K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot V_{d-h+1} | \cdot (V_{d-h+1} \cap X_h) =$$

$$\operatorname{def} | K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot (V_{d-h+1} \cap X_h) \text{ (10)}.$$

Dal confronto di quest'ultima con la (1_1) segue l'asserto.

§ 2. Teorema 2. - *Sia* Y *un'ipersuperficie non singolare tracciata sopra una* V_d *non singolare di dimensione* $\mathrm{d} > 2$. *Se per un certo* $\mathrm{h} < \mathrm{d} - 1$ *si ha*

$$\sigma^h(D) = \sigma^h((D + Y) \cdot \overset{*}{Y}) = 0,$$

allora risulta anche

$$\sigma^h(D + Y) = 0.$$

Su V_d fissiamo h ipersuperficie generiche, distinte, non singolari $X_1, X_2, \ldots, X_h$ estratte da altrettanti sistemi ampi di V_d, tali

(10) Poichè sono ampi i sistemi

$$| X_\lambda - D | \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, h)$$

sussiste la relazione

$$\operatorname{def} | K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot V_{d-h+1} = 0$$

(Marchionna, [5], pag. 423, proposizione a), cioè il sistema

$$| K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot V_{d-h+1}$$

(segato su V_{d-h+1} dal sistema $| K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h |$ tracciato su V_d) coincide con il sistema completo

$$\| K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot V_{d-h+1} |$$

individuato sopra V_{d-h+1} da una sua ipersuperficie; quindi si ha

$$\| K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot V_{d-h+1} | \cdot (V_{d-h+1} \cap X_h) =$$

$$| K - D + X_1 + X_2 + \ldots + X_{h-1} + X_h | \cdot (V_{d-h+1} \cap X_h).$$

che anche i vari sistemi $|X_\lambda + D - K|$ e $|X_\lambda + D + Y - K|$ siano ampi ([11]).

Posto $V_{d-h} = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_h$, si ha

$$\sigma^h(D) = \text{def } | D + X_1 + X_2 + \dots + X_h | \cdot V_{d-h},$$

$$\sigma^h(D + Y) = \text{def } | D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h | \cdot V_{d-h}.$$

Osserviamo inoltre che sono ampi i sistemi $||X_\lambda| \cdot Y|$ ed $|(X_\lambda + D + Y) \cdot Y - K(Y)| = ||X_\lambda + D - K| \cdot Y|$ ([12]); pertanto si può scrivere

$$\sigma^h((D + Y) \cdot \overset{*}{Y}) = \text{def } ||D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot Y| \cdot (V_{d-h} \cap Y) =$$

$$= \text{def } |D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot (V_{d-h} \cap Y) \ ([13])$$

([11]) Ciò si realizza, ad es., scegliendo i sistemi $|X_\lambda|$ coincidenti con dei multipli abbastanza alti di un sistema ampio $|E|$. Cfr. KODAIRA, [4], pp. 89, 90.

([12]) Poichè sono ampi, per ipotesi, i sistemi $|X_\lambda|$ e $|X_\lambda + D - K|$ tracciati su V_d, e perchè il sistema canonico impuro di Y è il sistema $||K + Y| \cdot Y|$.

([13]) Infatti i tre sistemi (tracciati su V_d)

$$|X| = |X_1 + X_2 + \dots + X_h|,$$

$$|D + X - K| = |D + X_1 + X_2 + \dots + X_h - K|,$$

$$|D + X + Y - K| = |D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h - K|$$

risultano ampi (perchè somme di sistemi ampi); sussiste perciò la relazione

$$\text{def } |D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot Y = 0$$

(MARCHIONNA, [5], pag. 421, n. 14). In altri termini risulta

$$|D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot Y| = |D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot Y$$

e ciò implica

$$||D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot Y| \cdot (V_{d-h} \cap Y) =$$

$$|D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot (V_{d-h} \cap Y).$$

Giova ora ricordare la seguente proprietà [14]:

« Sopra una varietà non singolare V si considerino un sistema lineare $|A|$, eventualmente incompleto, ed una ipersuperficie B (pure non singolare). Si supponga che siano completi tanto il sistema lineare $(|A| - B)$ — ottenuto togliendo B dalle ipersuperficie di $|A|$ che la contengono — quanto il sistema lineare $|A| \cdot B$ segato da $|A|$ su B. Allora anche il sistema $|A|$ è completo ».

Ciò posto consideriamo su V_{d-h} il sistema lineare (a priori incompleto)

$$|A| = |D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot V_{d-h}$$

e la sottovarietà non singolare $B = V_{d-h} \cap Y$.

Fra le ipersuperficie del sistema lineare $(|A| - B)$ figurano quelle del sistema

$$(T) = |D + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot V_{d-h}.$$

Ma il sistema (T) è completo poichè si ha $\sigma^h(D) = \operatorname{def}(T)$ e per ipotesi $\sigma^h(D) = 0$; quindi il sistema $(|A| - B)$ coincide con il sistema *completo* (T).

D'altra parte è completo anche il sistema $|A| \cdot B$, in quanto si ha

$$\operatorname{def} |A| \cdot B = \operatorname{def} |D + Y + X_1 + X_2 + \dots + X_h| \cdot (V_{d-h} \cap Y) =$$

$$= \sigma^h((D + Y) \cdot \overset{*}{Y}),$$

e per ipotesi $\sigma^h((D + Y) \cdot \overset{*}{Y}) = 0$.

Pertanto, in virtù della proprietà dianzi ricordata, si può affermare che anche il sistema $|A|$ è completo, il che equivale ad affermare che

$$\operatorname{def} |A| = \operatorname{def} |D + Y + X_1 + X_2 + \dots X_h| \cdot V_{d-h} = 0,$$

cioè

$$\sigma^h(D + Y) = 0.$$

§ 3. TEOREMA 3. – *Sia* Y *un'ipersuperficie non singolare tracciata sopra una* V_d *non singolare di dimensione* $d > 2$. *Se per un certo* $h < d - 1$ *si ha*

$$\sigma^{h+1}(D) = \sigma^h(D + Y) = 0,$$

([14]) SEVERI, [7]. pag. 212, Lemma I.

allora risulta anche

$$\sigma^h((D+Y)\cdot \overset{*}{Y})=0.$$

Fissiamo su V_d $h+1$ ipersuperficie, generiche, distinte, non singolari $X_1, X_2, \dots, X_h, X_{h+1}$ estratte da altrettanti sistemi ampi di V_d, tali che anche i vari sistemi $|X_\lambda+D-K|$ e $|X_\lambda+D+Y-K|$ siano ampi. Posto come al solito $V_{d-h}=X_1\cap X_2\cap\dots\cap X_h$ si ha

$$(1_3)\qquad \sigma^{h+1}(D)=\operatorname{def}|D+X_1+X_2+\dots+X_h+X_{h+1}|\cdot(V_{d-h}\cap X_{h+1}),$$

$$(2_3)\qquad \sigma^h(D+Y)=\operatorname{def}|D+Y+X_1+X_2+\dots+X_h|\cdot V_{d-h},$$

$$(3_3)\qquad \sigma^h((D+Y)\cdot \overset{*}{Y})=\operatorname{def}|D+Y+X_1+X_2+\dots+X_h|\cdot(V_{d-h}\cap Y)\ \text{[15]}.$$

Su V_{d-h} consideriamo il sistema canonico impuro

$$|K(V_{d-h})|=||K+X_1+X_2+\dots+X_h|\cdot V_{d-h}|$$

e le superficie

$$F=(D+X_1+X_2+\dots+X_h)\cap V_{d-h},$$

$$X=X_{h+1}\cap V_{d-h},\qquad B=Y\cap V_{d-h};$$

Poichè i tre sistemi (tracciati su V_{d-h})

$$|X|=||X_{h+1}|\cdot V_{d-h}|,$$

$$|F+X+B-K(V_{d-h})|=||X_{h+1}+D+Y-K|\cdot V_{d-h}|,$$

$$(4_3)\qquad |F+X-K(V_{d-h})|=||X_{h+1}+D-K|\cdot V_{d-h}|$$

sono ampi [16], sussiste la relazione

$$\operatorname{def}|F+B|\cdot B\leq \operatorname{def}|F+X|\cdot X$$

(MARCHIONNA, [5], pag. 421, n. 14).

[15] Per il calcolo dell'espressione di $\sigma^h((D+Y)\cdot \overset{*}{Y})$ si veda il § precedente.

[16] Infatti sono ampi, per ipotesi, i sistemi

$$|X_{h+1}|,\quad |X_{h+1}+D+Y-K|,\quad |X_{h+1}+D-K)$$

tracciati su V_d.

Ricordando che per ipotesi è $\sigma^h(D+Y)=0$, si ottiene dalla (2_3)

$$\operatorname{def}|D+Y+X_1+\ldots+X_h|\cdot V_{d-h}=0,$$

il che equivale ad affermare che

$$|D+Y+X_1+\ldots+X_h|\cdot V_{d-h}=$$

$$=||D+Y+X_1+\ldots+X_h|\cdot V_{d-h}|=|F+B|.$$

Inoltre poichè sono ampi i sistemi $|X_\lambda+D-K|$ sussiste la relazione

$$\operatorname{def}|D+X_1+X_2+\ldots+X_h+X_{h+1}|\cdot V_{d-h}=0 \quad (^{17})$$

e ciò signiflca

$$|D+X_1+X_2+\ldots+X_h+X_{h+1}|\cdot V_{d-h}=$$

$$||D+X_1+X_2+\ldots+X_h+X_{h+1}|\cdot V_{d-h}|=|F+X|.$$

Quindi la (4_3) è equivalente alla relazione

$$\operatorname{def}|D+Y+X_1+\ldots+X_h|\cdot(V_{d-h}\cap Y)\leq$$

$$\operatorname{def}|D+X_1+\ldots+X_h+X_{h+1}|\cdot(V_{d-h}\cap X_{h+1}),$$

la quale — tenendo conto delle (1_3), (3_3) — può essere scritto nella forma

$$\sigma^h((D+Y)\cdot\overset{*}{Y})\leq\sigma^{h+1}(D).$$

Ma per ipotesi è $\sigma^{h+1}(D)=0$ ed inoltre $\sigma^h((D+Y)\cdot\overset{*}{Y})$ risulta, per sua natura, non negativo; quindi

$$\sigma^h((D+Y)\cdot\overset{*}{Y})=0.$$

§ 4. - Indichiamo: con E una generica sezione iperpiana di $V_d(d>2)$, con $|lE|$ il sistema completo individuato dall'ipersuper ficie E contata l volte, e con E_l una generica ipersuperficie di detto sistema. Per $l<0$ il divisore E_l risulta virtuale e in tal caso si ha

$$\sigma^h(E_l)=0 \quad (^{18})$$

(17) MARCHIONNA, [5], pag. 423, proposizione *a*.
(18) Cfr. ad es. MARCHIONNA, [6], n. 2, osservazione III.

Ciò posto dai teoremi 2 e 3 si deducono immediatamente le seguenti proposizioni:

COROLLARIO 4. – *Se per ogni valore dell'intero relativo* l *si ha*

$$\sigma^h(E_l \cdot \overset{*}{E}) = 0$$

(h < d — 1) *allora risulta pure*

$$\sigma^h(E_l) = 0.$$

COROLLARIO 5. – *Se per ogni valore dell'intero relativo* l *si ha*

$$\sigma^{h+1}(E_l) = \sigma^h(E_l) = 0$$

(h < d — 1) *allora risulta pure*

$$\sigma^h(E_l \cdot \overset{*}{E}) = 0.$$

Per la dimostrazione del corollario 4 basta applicare il teorema 2; ponendo $D = E_{l-1}$, $Y = E$ si deduce che qualora sia $\sigma^h(E_{l-1}) = \sigma^h(E_l \cdot \overset{*}{E}) = 0$, anche $\sigma^h(E_l) = 0$.

Ma $\sigma^h(E_{l-1}) = 0$ per $l - 1 < 0$, ed inoltre abbiamo supposto $\sigma^h(E_l \cdot \overset{*}{E}) = 0$ per l arbitrario; sicchè dando ad l successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ..., resta appunto dimostrato che anche $\sigma^h(E_l) = 0$ per l arbitrario.

Il corollario 5 discende immediatamente dal teorema 3 ove si ponga ancora $D = E_{l-1}$, $Y = E$.

CAPITOLO II. – **Condizioni caratteristiche per la normalità aritmetica delle sezioni spaziali di una varietà non singolare.**

§ 5. – Applicheremo ora i teoremi sugli indici di irregolarità del divisore E_l dianzi stabiliti per determinare alcune proprietà delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari.

Ricordiamo che due varietà V_d e V_d' si dicono *complementari* se formano insieme l'intersezione totale di $r—d$ forme dello spazio ambiente S_r.

Data una V_d non singolare, diremo che V_d' è una generica varietà complementare di V_d se risulta anch'essa non singolare e se la intersezione di V_d con V_d' è una varietà (d—1) dimensionale pure non singolare. Una siffatta V_d' si può ottenere immergendo dapprima V_d in un S_r di dimensione $r > 2d$ (cosa del tutto lecita) e costruendo poi la varietà complementare di V_d rispetto all'intersezione totale di $r-d$ forme *generiche* (passanti per V_d) *aventi ordini abbastanza elevati* (19).

Per gli sviluppi successivi è essenziale la seguente proprietà (da noi dimostrata in [2], n. 10)

TEOREMA 6. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà* V_d' *non singolare di dimensione* $d > 1$ *risulti aritmeticamente normale è che sopra una generica varietà complementare* V_d *sia nullo, per ogni* $l \geqq 0$, *l'ultimo indice d'irregolarità* $\sigma^{d-1}(E_l)$ *del divisore* E_l.

Questa proprietà viene ora estesa dal

TEOREMA 7. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la sottovarietà*

$$E'^h = V_d' \cap S_{r-h} \qquad (h \leqq d-2)$$

sezione di una V_d' *non singolare di dimensione* $d > 1$ *con un generico* S_{r-h} *risulti aritmeticamente normale è che sopra una generica varietà* V_d *complementare di* V_d' *si abbia*

$$\sigma^{d-1}(E_l) = \sigma^{d-2}(E_l) = \ldots = \sigma^{d-h}(E_l) = \sigma^{d-h-1}(E_l) = 0$$

per ogni $l \geqq 0$.

Per $h = 0$ questa proposizione si riduce ovviamente al teorema 6; occorre dunque dimostrarla per $h > 0$. Proviamo dapprima che la condizione espressa dal teorema 7 è necessaria.

Se E'^h è aritmeticamente normale risultano aritmeticamente normali tanto V_d' quanto le sottovarietà $E'^1, E'^2, \ldots, E'^{h-1}$ sezioni di V_d' con generici spazi $S_{r-1}, S_{r-2}, \ldots, S_{r-h+1}$ (cfr. ad esempio [6], n. 15).

Indichiamo con $E^1, E^2, \ldots, E^{h-1}, E^h$ le sottovarietà tagliate sopra V_d dagli spazi $S_{r-1}, S_{r-2}, \ldots, S_{r-h}$ dianzi considerati.

(19) Cfr. SEVERI, [7], pag. 217. Si vedano anche i seguenti lavori dello stesso SEVERI: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Circ. Matem. », Palermo, XXVIII (1909), n. 2; *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, « Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino », serie II, 52 (1902), paragrafo 5.

Per ogni $i \leqq h$ le varietà $(d-i)$-dimensionali E^i, E'^i sono ovviamente complementari (e non singolari).

Indichiamo inoltre con $E_l \cdot \overset{*}{E^i}$ il divisore tagliato sopra E^i dal divisore E_l tracciato su V_d (vale a dire il multiplo secondo l'intero relativo l della generica sezione iperpiana di E^i) ed osserviamo che l'ultimo indice d'irregolarità del divisore $E_l \cdot \overset{*}{E^i}$ della varietà $(d-i)$-dimensionale E^i è l'indice d'irregolarità $\sigma^{d-i-1}(E_l \cdot \overset{*}{E^i})$.

Ciò posto possiamo applicare il teorema 6 alle varie coppie di varietà complementari V_d, V_d'; E^1, E'^1; E^2, E'^2; ...; E^{h-1}, E'^{h-1}; E^h, E'^h; poichè le varietà accentuate delle singole coppie sono aritmeticamente normali, otteniamo per ogni $l \geqq 0$, e quindi per *ogni intero relativo* l:

$$
(1_5) \qquad
\begin{aligned}
&\sigma^{d-1}(E_l) = 0\\
&\sigma^{d-2}(E_l \cdot \overset{*}{E^1}) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma^{d-h}(E_l \cdot \overset{*}{E^{h-1}}) = 0\\
&\sigma^{d-h-1}(E_l \cdot \overset{*}{E^h}) = 0.
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora una qualsiasi delle relazioni (1_5) diversa dalla prima, ad esempio la

$$
(2_5) \qquad \sigma^{d-i}(E_l \cdot \overset{*}{E^{i-1}}) = 0
$$

(con $1 < i \leqq h+1$), e teniamo presente che: E^{i-1} è sezione iperpiana di E^{i-2}; E^{i-2} è sezione iperpiana di E^{i-3}; ...; E^2 è sezione iperpiana di E^1; E^1 è sezione iperpiana di V_d.

Dalla (2_5), applicando successivamente il corollario 4 alle varietà E^{i-2}, E^{i-3}, ..., E^1, V_d, si deduce che, per ogni intero relativo l, sussistono le relazioni

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{d-1}(E_l \cdot \overset{*}{E^{i-2}}) = 0\\
&\sigma^{d-1}(E_l \cdot \overset{*}{E^{i-3}}) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma^{d-1}(E_l \cdot \overset{*}{E^1}) = 0\\
&\sigma^{d-1}(E_l) = 0
\end{aligned}
$$

Di queste uguaglianze a noi interessa l'ultima, perchè permette di affermare che dalle (1_5) discendono le relazioni (valide per ogni intero relativo l)

$$(3_5)\qquad \begin{aligned} &\sigma^{d-1}(E_l)=0\\ &\sigma^{d-2}(E_l)=0\\ &\cdots\cdots\\ &\sigma^{d-h}(E_l)=0\\ &\sigma^{d-h-1}(E_l)=0 \quad ([20]) \end{aligned}$$

Dimostrata la necessità della condizione espressa dal Teorema 7, verifichiamone la sufficienza.

Supponiamo dunque che su V_d siano valide le (3_5) per $l \geqq 0$ (e quindi per l relativo arbitrario), e proviamo che E'^h risulta aritmeticamente normale.

Poichè per l arbitrario sono nulli gl'indici $\sigma^{d-1}(E_l)$, $\sigma^{d-2}(E_l)$, il corollario 5 mostra che è nullo anche $\sigma^{d-2}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^1)$; analogamente poichè sono nulli $\sigma^{d-2}(E_l)$, $\sigma^{d-3}(E_l)$ risulta nullo anche $\sigma^{d-3}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^1)$; e così via.

Riassumendo: applicando h volte il corollario 5 alla varietà V_d si deducono dalle $h+1$ relazioni (3_5) le h relazioni

$$(4_5)\qquad \begin{aligned} &\sigma^{d-2}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^1)=0\\ &\sigma^{d-3}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^1)=0\\ &\cdots\cdots\\ &\sigma^{d-h-1}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^1)=0. \end{aligned}$$

Similmente applicando $h-1$ volte il corollario 5 alla varietà E^1 si deducono dalle h relazioni (4_5) le $h-1$ relazioni

$$\begin{aligned} &\sigma^{d-3}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^2)=0\\ &\sigma^{d-4}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^2)=0\\ &\cdots\cdots\\ &\sigma^{d-h-1}(E_l \cdot \overset{*}{E}{}^2)=0 \end{aligned}$$

([20]) Alle medesime conclusioni si potrebbe giungere applicando (con opportuni accorgimenti) il teorema 1 invece del corollario 4.

Così proseguendo, applicando successivamente il corollario 5 alle varietà E', E^3, ..., E^h si giunge infine alla relazione

$$\sigma^{d-h-1}(E_l \cdot \overset{*}{E^h}) = 0.$$

Pertanto, poichè sopra E^h l'ultimo indice d'irregolarità del divisore $E_l \cdot \overset{*}{E^h}$ è nullo per l arbitrario possiamo applicare il teorema 6, e concludere che la varietà E'^h, complementare di E_h, risulta aritmeticamente normale.

NOTA. - Il teorema 7 è valido per $h \leq d-2$. Quando h assume il valore massimo $d-2$, il teorema afferma che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie E'^{d-2} sezione di V_d' con un generico S_{r-d+2} sia aritmeticamente normale, è che sulla varietà complementare V_d siano nulli, per ogni $l > 0$, tutti i $d-1$ indici di irregolarità del divisore E_l. Il caso escluso $h = d-1$ è risolto, ad esempio, dalla seguente proposizione (fusione di alcuni risultati di GAETA e di MARCHIONNA):

TEOREMA 8. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva* E'^{d-1}, *sezione di* V_d' *con un generico* S_{r-d+1}, *sia aritmeticamente normale, è che:*

a) la varietà complementare V_d *sia aritmeticamente normale:*

su V_d *risultino nulli per ogni* $l \geq 0$ *tutti gli indici d'irregolarità del divisore* E_l.

Per la dimostrazione indichiamo con E^{d-1} la curva non singolare segata su V_d dallo stesso spazio S_{r-d+1} che taglia E'^{d-1} sopra V_d', e ricordiamo che

c) dal fatto che una delle curve complementari E^{d-1}, E'^{d-1} sia aritmeticamente normale segue che lo è anche l'altra ([21]); di più risultano aritmeticamente normali anche V_d e V_d' e le loro generiche sezioni spaziali ([22]) (in particolare risulta aritmeticamente normale la superficie E'^{d-2} sezione di V_d' con un generico S_{r-d+2} la qual cosa giustifica già la necessità della condizione b);

d) La condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva E^{d-1} sezione di una V_d aritmeticamente normale con un generico S_{r-d+1} sia anch'essa aritmeticamente normale è che su V_d siano nulli, per ogni $l \geq 0$, tutti gli indici di irregolarità del divisore E_l ([23]).

([21]) Cfr. GAETA, [1], pag. 195.
([22]) Cfr. ad es. [6] n. 15.
([23]) Cfr. MARCHIONNA [6], teorema 7, del n. 17.

Si prova ora immediatamente che le condizioni espresse dal teorema 8 sono necessarie.

Infatti se la curva E'^{d-1} è aritmeticamente normale, anche E^{d-1} è aritmeticamente normale; pertanto dalla proprietà *c*) segue che V_d è aritmeticamente normale, e dalla proprietà *d*) si deduce che tutti gli indici d'irregolarità del divisore E_l sono nulli per ogni $l \geqq 0$.

Viceversa le condizioni *a*) e *b*) del teorema 8 sono sufficienti.

Infatti, ammessa la loro validità, la curva E^{d-1} risulta aritmeticamente normale per la proprietà *d*), e dalla proprietà *c*) discende infine che anche E'^{d-1} è aritmeticamente normale.

Capitolo III. - **Una condizione sufficiente affinchè una varietà superficialmente regolare sia aritmeticamente regolare e totalmente regolare.**

§ 6. - La ipersuperficie E_l per $l=0$ si riduce allo zero Z dell'equivalenza ipersuperficiale su V_d; in tal caso, detti $q_h(V_d)$ e $i_h(V_d)$ rispettivamente l'irregolarità h-dimensionale di V_d e il numero delle forme differenziali di prima specie del grado h, linearmente indipendenti, attaccate a V_d si ha

$$\sigma^h(Z) = i_h(V_d) = q_h(V_d) + q_{h+1}(V_d). \tag{1_6}$$

Indichiamo poi con $s\,|D|$ la sovrabbondanza di un sistema lineare $|D|$ tracciato su V_d e con $s\,|D|\cdot B$ la sovrabbondanza del sistema lineare $|D|\cdot B$ tagliato da $|D|$ sulla sottovarietà non singolare B tracciata su V_d (per definizione $s\,|D|\cdot B$ coincide con la sovrabbondanza del sistema completo $||D|\cdot B|$). Si ha

$$s\,|D| = \sum_{h=1}^{-1} (-1)^{h+1}\sigma^h(D) \quad (^{24}). \tag{2_6}$$

Ciò posto sussiste il seguente

Teorema 9. - *Sia* V_d *una varietà algebrica non singolare superficialmente regolare avente dimensione* $d \geqq 3$, *e sia* V_2 *una superficie* (non singolare) *intersezione di* V_d *con un determinato* S_{r-d+2}. *Se* V_2 *è aritmeticamente regolare allora* V_d *risulta aritmeticamente regolare e totalmente regolare.*

[24] Per tutte queste proprietà cfr. Hodge, [3]; Marchionna, [5], pag. 426, 431, 433.

Infatti essendo V_2 aritmeticamente regolare, risulta $s\,|E_l|\cdot V_2=0$ per ogni $l>0$. Ma per la (2_6) è

$$s\,|E_l|\cdot V_2=\sigma^1(E_l\cdot\overset{*}{V}_2)\,;$$

ne discende che

$$\sigma^1(E_l\cdot\overset{*}{V}_2)=0$$

per ogni $l>0$.

Per $l=0$ la (1_6) porge

$$\sigma^1(Z\cdot\overset{*}{V}_2)=q_2(V_2)\quad(^{25}).$$

Ma $q_2(V_2)=q_2(V_d)$ [26], e $q_2(V_d)=0$ per ipotesi; quindi risulta

$$\sigma^1(E_l\cdot\overset{*}{V}_2)=0$$

anche per $l=0$.

Sia allora V_d' una generica varietà non singolare complementare della V_d e sia V_2' la intersezione di V_d' con lo stesso S_{r-d+2} che taglia V_2 sopra V_d. La superficie V_2 e V_2' sono complementari l'una dell'altra e poichè $\sigma^1(E_l\cdot\overset{*}{V}_2)$ è nullo per ogni $l\geqq 0$, la V_2' risulta aritmeticamente normale (teorema 6). Pertanto risulta aritmeticamente normale anche la superficie E'^{d-2} ottenuta intersecando V_d' con un generico spazio lineare S_{r-d+2} [27] e dal teorema 7 si ricava che su V_d sussistono le relazioni

$$(3_6)\qquad \sigma^{d-1}(E_l)=\sigma^{d-2}(E_l)=\ldots=\sigma^1(E_l)=0$$

valide per qualunque valore di $l\geqq 0$.

Dalla (2_6) si ottiene di conseguenza

$$s\,|E_l|=\sum_{h=1}^{d-1}(-1)^{h+1}\sigma^h(E_l)=0$$

per ogni $l>0$, e la V_d risulta aritmeticamente regolare.

Inoltre, tenuto conto che le (3_6) sussistono anche per $l=0$ e che $q_2(V_d)=0$ per ipotesi, delle (1_6) si deduce che

$$q_2(V_d)=q_3(V_d)=\ldots=q_d(V_d)=0,$$

sicchè V_d risulta totalmente regolare.

(25) Si ricordi che la irregolarità unidimensionale di una varietà non singolare è sempre nulla.

(26) Cfr. ad es. [5], pag. 428

(27) Cfr. ad es. [6], n. 15.

Capitolo IV. - Sui modelli proiettivi normali di una varietà non singolare.

§ 7. - Sia W_d una varietà algebrica non singolare di un certo S_r e consideriamo (con Marchionna) un suo *modello proiettivo normale.* Un siffatto modello V_d è l'immagine proiettiva del sistema lineare $|E_\lambda|$ segato su W_d dalle forme di S_r aventi un certo ordine λ abbastanza elevato (l'intero λ è scelto in modo che $|E_\lambda|$ e tutti i suoi multipli « minimi » siano completi e sufficientemente ampi rispetto al sistema canonico di W_d); *V_d risulta aritmeticamente regolare nel relativo spazio ambiente S_R.* Inoltre, indicato con E_l il divisore di V_d costituito dal multiplo secondo l'intero l della sua generica sezione iperpiana E, accade che per ogni $l>0$ i relativi indici d'irregolarità $\sigma^1(E_l)$, $\sigma^2(E_l)$, ..., $\sigma^{d-1}(E_l)$ sono tutti nulli [28].

Ciò posto possiamo dimostrare il

Teorema 10. - *Sia* W_d *una varietà algebrica non singolare priva delle forme differenziali di prima specie dei gradi* $d-1$, $d-2$, ..., $d-h$. *In questo caso* (e solo in questo) *risultano aritmeticamente normali tanto la generica varietà* V_d' *— complementare di un modello proiettivo normale* V_d *della* W_d *— quanto le sezioni di* V_d' *con i generici spazi lineari* S_{R-1}, S_{R-2}, ..., S_{R-h+1} [29].

Infatti, avendo supposto che W_d sia priva delle forme differenziali di prima specie dei gradi $d-1$, $d-2$, ..., $d-h$, risulta

$$i_{d-1}(W_d) = i_{d-2}(W_d) = \dots = i_{d-h}(W_d) = 0.$$

Ma la varietà V_d, in corrispondenza birazionale regolare con W_d, ha i medesimi invarianti trascendenti i_{d-1}, i_{d-2}, ..., i_{d-h} di W_d. Pertanto in questo caso (e solo in questo) si ha, tenendo conto delle (1_6)

$$\sigma^{d-1}(E_l) = \sigma^{d-2}(E_l) = \dots = \sigma^{d-h}(E_l) = 0$$

anche per $l=0$.

[28] Per tutte queste proprietà cfr. Marchionna, [6], n. 20.

[29] Nel caso più semplice che W_d sia priva delle *sole* forme differenziali di prima specie del grado $d-1$; il teorema 10 si limita ad affermare che la varietà V_d' è aritmeticamente normale.

Applicando allora i teoremi 6 e 7 alla varietà V_d si conclude che risultano aritmeticamente normali tanto la generica varietà V_d', complementare della V_d, quanto le sezioni di V_d' con i generici spazi lineari S_{R-1}, S_{R-2}, ..., S_{R-h+1}.

OSSERVAZIONE. - Nel caso che W_d sia priva di forme differenziali dei primi $d-1$ gradi ($i_1 = i_2 = ... = i_{d-1} = 0$) il teorema qui dimostrato afferma che la superficie sezione di V_d' con un generico S_{R-d+2} è aritmeticamente normale; occorre tuttavia segnalare che, nel caso ora considerato, anche la curva E'^{d-1}, sezione di V_d' con un generico S_{R-d+1}, risulta aritmeticamente normale. Ciò discende immediatamente dal fatto che appaiono soddisfatte le condizioni espresse dal teorema 8. Invero

a) la varietà V_d complementare di V_d' è aritmeticamente normale per ipotesi (perchè modello proiettivo normale di W_d);

b) la trattazione suesposta mette in luce che l'annullarsi degli invarianti i_1, i_2, .., i_{d-1} implica l'annullarsi su V_d (per ogni $l \geqq 0$) di tutti gli indici d'irregolarità del divisore E_l

§ 8. Consideriamo infine una varietà W_d non singolare le cui ultime $h+1$ irregolarità $q_d(W_d)$, $q_{d-1}(W_d)$, ..., $q_{d-h}(W_d)$ ($h \geqq 1$) siano nulle. Tale W_d risulta priva delle forme differenziali di prima specie dei gradi $d-1$, $d-2$, ..., $d-h$ (si ricordi la (1_6)); laonde la generica varietà V_d' complementare di un modello proiettivo normale della W_d gode delle proprietà enunciate nel teorema precedente.

Ma in questo nuovo caso (e solo in questo caso) *la* V_d' *risulta oltre che arimeticamente normale anche aritmeticamente regolare.*

Sia infatti S_R lo spazio ambiente della V_d e siano n_1, n_2, ..., n_{R-d} gli ordini delle $R-d$ forme (di S_R) che si tagliano lungo la varietà $V_d + V_d'$ e poniamo

$$\rho = n_1 + n_2 + ... + n_{R-d} - R - 1.$$

Indichiamo inoltre con Δ_l e s_l rispettivamente la deficienza e la sovrabbondanza del sistema lineare tagliato su V_d dalla totalità delle forme di ordine l di S_R e con Δ_l' e s_l' gli analoghi caratteri relativi a V_d'.

Per ogni valore di $l \left(\gtreqless 0\right)$ sussiste la relazione

$$(1_8) \qquad s_l - \Delta_l = (-1)^{d+1}(s'_{\rho-l} - \Delta'_{\rho-l})$$

con la convenzione che $\Delta_l = \Delta_l' = 0$ per $l \leqq 0$ [30].

[30] MARCHIONNA, [6], n. 9

Ricordiamo poi che per $l < 0$ risulta

$$s_l = s_l' = 0$$

e che per $l = 0$ si ha

$$s_0 = (-1)^d q_d(V_d) \quad (2_8)$$ [31].

Nel nostro caso, poichè V_d e V_d' sono entrambe aritmeticamente normali, le deficienze Δ_l e Δ_l' sono nulle p r qualunque valore di l. Inoltre, essendo V_d aritmeticamente regolare, si ha

$$s_l = 0$$

anche per $l > 0$, sicchè dalle (1_8) e (2_8) si deduce

$$s'_{\rho-l} = 0 \quad \text{per } l \neq 0$$
$$s'_\rho = -q_d(V_d) \quad \text{per } l = 0.$$

Pertanto la sovrabbondanza s_l' è nulla per ogni valore di l se e solo se $q_d(V_d) = 0$. Essendo $q_d(V_d) = q_d(W_d)$ [32] ne segue l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. GAETA, *Sulle curve sghembe di residuale finito*, « Annali di Matematica », serie IV, t. XXVII (1948).

[2] U. GASAPINA, *Sulle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari*, « Rend. Sem. Univ. e Polit. Torino », vol. 19° (1959-60).

[3] W. V. D. HODGE, *A note on the Riemann-Roch theorem*, « Journal London Math. Soc. » **30** (1955)

[4] K. KODAIRA, *Some results in the trascendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Mathem. », **59** (1954).

[5] E. MARCHIONNA, *Il teorema di Riemann-Roch sulle varietà algebriche e questioni collegate con la teoria delle irregolarità*, Appendice VI al trattato di F. SEVERI citato in [7].

[6] — — *Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica non singolare*, « Annali di Matematica », serie IV, t. LIV (1961).

[7] F. SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, Vol. III, Edizione Cremonese, Roma (1960).

[31] Cfr. ad es. [6], nn. 2, 3.

[32] Perchè le irregolarità di varietà — come i caratteri trascendenti i_h cui sono legate dalla (1_6) — sono invarianti per trasformazioni birazionali regolari.