Bollettino
Unione Matematica Italiana

Magda Rolando

# Invarianti proiettivi simultanei di un elemento di rigata e di un altro elemento.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **16** (1961), n.3, p. 319–331.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_319_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

# Invarianti proiettivi simultanei di un elemento di rigata e di un altro elemento.

Nota di MAGDA ROLANDO (a Torino) (*)

**Sommario.** - *In questo lavoro troviamo gli invarianti proiettivi a) di una coppia di elementi di rigata (ni 2-8); b) della coppia fermata da un elemento di rigata insieme con una calotta superficiale del II ordine (n° 9); e finalmente c) della coppia formata da un elemento di rigata insieme con un elemento curvilineo del III ordine (n° 10). Il concetto dell'elemento di rigata è chiarito al n° 1.*

**Summary.** - *In this paper we study the projective invariants: a) of a pair of elements of ruled surfaces (n.s 2-8), b) of a pair formed by an element of a ruled surface together with a superficial cap of second order (n. 9); c) of a pair formed by an element of a ruled surface together with a curvilinear element of order three. The concept of an « element of a ruled surface » is explained in n. 1*

**1.** Una rigata, che ci limitiamo a supporre analitica, è rappresentabile esprimendo le coordinate di retta in funzione di un parametro. Sviluppando dette funzioni in serie di potenze e considerando tutti i termini fino a quelli di ordine $n$, si ottiene la rappresentazione analitica di un *elemento* $R_n$ *di ordine* n di rigata uscente da una sua generatrice generica $r$ (la quale può essere chiamata « origine » dell'elemento $R_n$). Un $R_0$ è costituito da una retta, (la $r$); un $R_1$ è costituito dalla retta $r$ e dai piani tangenti alla rigata $R$, condotti in ogni punto della $r$.

La rappresentazione analitica dell'$R_n$ è la seguente (dalla quale emerge anche che un $R_n$ dipende da $4+3n$ parametri). Si può assumere per esempio lo spigolo $A^4A^3$ del tetraedro di riferimento $A^1A^2A^3A^4$ coincidente con la $r$, si può immaginare che in prossimità di $r$, le generatrici di $R$ siano date assegnando $p_{13}/p_{34}$: $p_{23}/p_{34}$; $p_{24}/p_{34}$ come funzioni di $t=p_{14}/p_{34}$ sviluppate localmente in serie di potenze:

$$\begin{aligned} p_{13}/p_{34} &= a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + [n+1] \\ p_{23}/p_{34} &= b_1t + b_2t^2 + \dots + b_nt^n + [n+1] \\ p_{24}/p_{34} &= c_1t + c_2t^2 + \dots + c_nt^n + [n+1] \end{aligned}$$

Le equazioni scritte definiscono appunto un $R_n$.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 4 settembre 1961.

Qualora si interpretino le $p_{ik}$ come coordinate di punto nell'$S_5$, ad un elemento di ordine $n$ generico di rigata corrisponde un elemento curvilineo di ordine $n$ appartenente alla quadrica di KLEIN.

## I. - Invarianti proiettivi di una coppia di elementi di rigata.

**2.** *Caso di due rette origine* r *e* r' *distinte e non incidenti.*

Nello spazio a tre dimensioni si considerino due rigate $R$ e $R$ e due loro generatrici $r$ e $r'$ sghembe [1].

Si assuma il tetraedro di riferimento in modo che gli spigoli $A^4A^3$ e $A^1A^2$ coincidano rispettivamente con le due generatrici $r$ e $r'$.

Si rappresentino parametricamente le due rigate in coordinate omogenee mediante le equazioni:

$$(2.1)\quad \begin{aligned} &R)\left\{\begin{aligned} x_1 &= tx_3 + p(t)x_4 &&\text{con } p(0) = m(0) = q(0) = 0 \\ x_2 &= m(t)x_3 + q(t)x_4 &&\text{e } t = p_{14}/p_{34} \end{aligned}\right. \\ &R')\left\{\begin{aligned} x_3 &= ux_1 + p'(u)x_2 &&\text{con } p'(0) = m'(0) = q'(0) = 0 \\ x_4 &= m'(u)x_1 + q'(u)x^2 &&\text{e } u = -p_{23}/p_{12} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

(risulta così rispettata la particolare scelta del sistema di riferimento di cui al $n^o$ 1). Le generatrici $r$ e $r'$ si ottengono rispettivamente per $t=0$ e per $u=0$.

Si consideri la proiettività $\pi$ che nasce dall'associare alla punteggiata $P(r)$ la punteggiata $P_1(r)$, dove $P_1$ è la traccia sulla $r$ del piano tangente alla rigata $R'$ nel punto $P'$ della $r'$ segato su questa dal piano tangente alla $R$ nel punto $P$ della $r$, e si assumano i vertici $A^3$ e $A^4$ del tetraedro di riferimento nei due punti uniti di detta proiettività che per ora supponiamo distinti [2].

[1] A queste ipotesi, valide nei numeri 2 - 6 vanno anche aggiunte altre ipotesi di genericità che sottintendiamo nel seguito, come quella che la quadrica $Q'$ di cui parliamo al n° 6 non contenga la $r$.

[2] Nel caso in cui la proiettività $\pi$ è parabolica, studiando con procedimenti, sebbene un pò più complicati, analoghi a quelli qui sviluppati, una coppia di elementi del 1° ordine, si giunge al risultato della non esistenza degli invarianti.

Si assumano inoltre i vertici $A^1$ e $A^2$ nei punti ottenuti intersecando la $r'$ coi piani tangenti alla $R$ nei punti $A^3$ e $A^4$ rispettivamente. Notiamo esplicitamente che la posizione dei vertici del tetraedro di riferimento risulta determinata dagli elementi del 1° ordine delle due rigate uscenti rispettivamente da $r$ e da $r'$.

Ponendo

$$p_1 = (dp/dt)_0\,; \quad p_2 = \frac{1}{2}(d^2p/dt^2)_0\,; \quad p_3 = \frac{1}{3!}(d^3p/dt^3)_0 \quad \text{ecc.}$$

e analogamente

$$p'_1 = (dp'/dt)_0\,; \quad p'_2 = 1/2(d_2p'/dt^2)_0\,; \quad p'_3 = 1/3!\ (d^3p'/dt^3)_0 \quad \text{ecc.}$$

le ulteriori condizioni analitiche che traducono la particolare scelta del tetraedro di riferimento sono: $p_1 = p'_1 = m'_1 = 0$.

Ii un altro spazio si considerino due rigate $\bar{R}$ e $\bar{R}'$ con due rette $\bar{r}$ e $\bar{r}'$ sghembe come origini e si assuma il sistema di riferimento $\bar{A}^1$, $\bar{A}^2$, $\bar{A}^3$, $\bar{A}^4$ come si è fatto nel primo spazio. La più generale omografia che fa passare da uno spazio all'altro e muta uno nell'altro i due sistemi di riferimento è data dalle:

$$\left\{\begin{array}{llll} X_1 = a_{11}x_1 & & & \\ X_2 = & a_{22}x_2 & & \\ X_3 = & & a_{33}x_3 & \\ X_4 = & & & x_4 \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Le equazioni parametriche della $R$ in coordinate di retta sono:

$$p_{13}/p_{34} = -p_2t^2 - p_3t^3 - \dots\,; \quad p_{23}/p_{34} = -q_1t - q_2t^2 - q_3t^3 - \dots\,;$$
$$p_{24}/p_{34} = m_2t^2 + m_3t^3 + \dots$$

e per la $R'$:

$$p_{13}/p_{12} = p'_2u^2 + p'_3u^3 + \dots\,; \quad p_{14}/p_{12} = q'_1u + q'_2u^2 + q'_3u^3 + \dots\,;$$
$$p_{24}/p_{12} = -m'_2u^2 - m'_3u^3 - \dots$$

Nel secondo spazio si considerino le rigate $\bar{R}$ e $\bar{R}'$ di equazioni:

$$\bar{p}_{13}/\bar{p}_{34} = -\bar{p}_2\bar{t}^2 - \bar{p}_3\bar{t}^3 - \dots\,; \quad \bar{p}_{23}/\bar{p}_{34} = -\bar{q}_1\bar{t} - \bar{q}_2\bar{t}^2 - \bar{q}_3\bar{t}^3 - \dots\,;$$

$$\bar{p}_{24}/\bar{p}_{34} = \bar{m}_2\bar{t}^2 + \bar{m}_3\bar{t}^3 + \dots$$

e

$$\bar{p}_{13}/\bar{p}_{12} = \bar{p}'_2\bar{u}^2 + \bar{p}'_3\bar{u}^3 + \dots ; \quad \bar{p}_{14}/\bar{p}_{12} = \bar{q}'_1\bar{u} + \bar{q}'_2\bar{u}^2 + \bar{q}'_3\bar{u}^3 + \dots ,$$

$$\bar{p}_{24}/\bar{p}_{14} = -\bar{m}_2\bar{u}^2 - \bar{m}_3\bar{u}^3 - \dots$$

dove $\bar{t}$ e $\bar{u}$ sono i parametri analoghi di t e $u$.

Trasformando mediante l'omografia (2.2) la rigata $R$ si ottiene la rigata $\bar{\bar{R}}$ avente le equazioni:

$$\bar{p}_{13}/\bar{p}_{34} = -a_{11}p_2t^2 - \dots ; \quad \bar{p}_{23}\,\bar{p}_{34} = -a_{22}q_1t - a_{22}q_2t^2 - \dots ;$$

$$\bar{p}_{24}/\bar{p}_{34} = a_{22}/a_{33}m_2t^2 + \dots$$

Ci interessa, e lo faremo più avanti, imporre fino ai termini di un certo ordine la coincidenza $R \equiv \bar{\bar{R}}$, $\bar{R}' \equiv \bar{\bar{R}}''$ nel qual caso è da assumere: $\bar{t} = a_{11}/a_{33} \cdot t$, (come segue immediatamente da $t = \bar{p}_{14}/\bar{p}_{34}$ e dalle (2.2).

Sostituendo $\bar{t}$ nelle equazioni di $\bar{R}$ si ha:

$$\bar{p}_{13}/\bar{p}_{34} - a^2{}_{11}/a'{}_{33}\bar{p}_2t^2 - \dots ; \quad \bar{p}_{23}/\bar{p}_{34} = -a_{11}/a_{33}\bar{q}_1t - a_{11}/a_{33}\bar{q}_2t^2 - \dots ;$$

$$\bar{p}_{24}/\bar{p}_{34} = a^2{}_{11}/a^2{}_{33}\bar{m}_2t^2 + \dots$$

Procedendo analogamente per la seconda rigata si ottiene

$$\bar{p}_{13}/\bar{p}_{12} = a^2{}_{33}/a^3{}_{11}\bar{p}_2'u^2 + \dots ; \quad \bar{p}_{14}/\bar{p}_{12} = a_{33}/a_{11}\bar{q}_1'u + a^2{}_{33}/a^2{}_{11}\bar{q}_1'u^2 + \dots ;$$

$$\bar{p}_{24}/\bar{p}_{12} = -a^2{}_{33}/a^2{}_{11}\bar{m}_2'u^2 + \dots$$

Si hanno così le equazioni parametriche rispetto al parametro $t$, delle rigate $\bar{R}$ e $\bar{R}'$ trasformate delle $R$ e $R'$ mediante l'omografia (2.2).

## 3. *Invarianti proiettivi della coppia* $R_1$, $R_1'$.

Consideriamo ora delle varie rigate i soli elementi del primo ordine. Per trovare gli invarianti proiettivi della coppia $R_1R_1'$ occorre calcolare le condizioni sotto le quali esistono dei valori dei coefficienti delle (2.2) tali che sia $\bar{\bar{R}}_1 \equiv \bar{R}_1$ e $\bar{\bar{R}}_1' = \bar{R}_1'$. Così facendo si ottiene la condizione necessaria e sufficiente $q_1q_1' = \bar{q}_1\bar{q}_1'$ da cui si deduce per la coppia $R_1$, $R'_1$ l'esistenza del solo invariante

$$I_1 = q_1q_1'.$$

### 4. *Invarianti proiettivi della coppia* $R_1$, $R_2'$.

Per la coppia $R_1$, $R_2'$ il computo dei parametri permette di prevedere l'esistenza di almeno due invarianti, (in quanto $R_1$ dipende da 7 parametri e $R_2'$ da 10). Confrontando le equazioni degli elementi che ora interessano e imponendo che $\bar{R}_1 \equiv \bar{R}_1$ e che $\bar{\bar{R}}_2' \equiv R_2'$ si ottiene un sistema di 5 equazioni nelle 3 incognite $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$. Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè tale sistema sia risolubile risultano:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} q_1 q_1' = q_1 q_1' \\ q_2'^2/(m_2' q_1 q_1'^2 p_2') = \bar{q}_2'^2/(\bar{m}_2' \bar{q}_1' \bar{q}_1'^2 \bar{p}_2') \end{cases}$$

che danno luogo all'invariante $I_1$ già trovato e al nuovo invariante $I_2 = q_2'^2/(m_2' q_1 q_1'^2 p_2')$.

### 5. *Invarianti proiettivi della coppia* $R_2$, $R_2'$.

In questo ceso si prevede mediante il computo dei parametri, l'esistenza di almeno 5 invarianti. Procedendo come nei casi precedenti si perviene ad un sistema di 8 equazioni nelle tre incognite $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ le cui condizioni di risolubità sono ancora le (4.1) che danno luogo agli invarianti $I_1$ e $I_2$ e le:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} (p_2 q_2'^2)/(q_1 q_1'^2 p_2') = (\bar{p}_2 \bar{q}_2'^2)/(\bar{q}_1 \bar{q}_1'^2 \bar{p}_2') \\ q_2 q_2' = \bar{q}_2 \bar{q}_2' \qquad m_2 p_2' = \bar{m}_2 \bar{p}_2' \end{cases}$$

che danno luogo ai nuovi invarianti: [3]

$$I_3 = (p_2 q_2'^2)/(q_1 q_1'^2 p_2'); \qquad I_4 = q_2 q_2'; \qquad I_5 = m_2 p_2'.$$

### 6. *Interpretazione geometrica degli invarianti trovati.*

$I_1$ è l'invariante assoluto della proiettività $\pi$ già definita nel n° 2: infatti il piano tangente a $R$ nel suo generico punto $P(0, 0, h. 1)$ è il piano $q_1 x_1 - h x_2 = 0$ che incontra la $r'$ in $P'(h, q_1, 0, 0)$,

[3] Fra gli invarianti della coppia $R_2 R_2'$ si deve trovare anche l'analogo dell'invariante già denominato $I_2$ ottenuto da questo scambiando fra loro le due rigate $\bar{I}_2^* = q_2^2/(m_2 q_1 p_2)$ effettivamente siri scontra senza difficoltà che $\bar{I}_2^* = I_4^2/(I_1^2 I_3 I_5)$.

e il piano tangente a $R'$ in $P'$ è il piano $q_1'q_1x_3 - hx_4 = 0$ che incontra la $r$ in $P'(0,\ 0,\ h,\ q_1q_1')$. L'invariante assoluto della proiettività $\pi$ è perciò dato appunto da $(A^3A^4P_1P) = q_1q_1'$.

Per avere l'interpretazione geometrica di $I_2$ conviene considerare l'invariante $I_2^* = q_2'^2/(m_2'q_1'p_2')$ legato a $I_2$ dalla relazione $I_2^* = I_2I_1$. Ora $I_2^*$ è esprimibile come funzione (razionale) del birapporto $(M_1M_2A^4A^3)$, dove $M_1$ e $M_2$ sono le intersezioni dello spigolo $A^3A^4$ con la quadrica $Q'$ individuata dalla condizione di contenere l'elemento $R_2'$ ([4]). Infatti l'equazione della quadrica $Q'$ è

$$q_1'x_2x_3 + m_2'x_3^2 + q_2'/q_1'x_3x_4 - x_1x_4 - p_2'/q_1'x_4^2 = 0$$

come si può verificare. Il valore di $x_3/x_4$ relativo ai punti $M_1$, $M_2$ si ottiene risolvendo l'equazione

$$m_2'(x_3/x_4)^2 + q_2'/q_1'x_3\,x_4 - p_2'/q_1' = 0$$

cosicchè chiamando $\lambda$ il birapporto dei punti $M_1$, $M_2$, $A^4$, $A^3$ considerati nell'ordine risulta che: $I_2^* = -(2 + \lambda + 1/\lambda)$ e ciò fornisce accanto a quella di $I_1$, un'interpretazione geometrica per $I_2$.

Per intepretare geometricamente anche i tre ulteriori invarianti $I_3$, $I_4$, $I_5$ consideriamo il fascio $QQ'$, essendo rispettivamente $Q$ e $Q'$ le quadriche individuate dagli elementi $R_2$, $R_2'$, e precisamente consideriamo il birapporto formato da due qualunque fra i quattro coni del fascio seguiti dalle stesse quadriche $Q$ e $Q'$. L'equazione del fascio $QQ'$ è:

$$m_2x_1^2 + q_2/q_1x_1x_2 + q_1x_1x_4 - p_2/q_1x_2^2 - x_2x_3 + \mu(q_1'x_2x_3 +$$
$$+ m_2'x_3^2 + q_2'/q_1'x_3x_4 - x_1x_4 - p_2'/q_1'x_4^2) = 0$$

cosicchè i coni del fascio si ottengono per i valori di $\mu$ che chiameremo $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ che verificano la seguente equazione di IV grado:

$$\begin{vmatrix} m_2 & q_2/(2q_1) & 0 & q_1 - \mu/2 \\ q_2/(2q_1) & -p_2/q_1 & (\mu q_1' - 1)/2 & 0 \\ 0 & (\mu q_1' - 1)/2 & \mu m_2' & \mu q_2'/(2q_1') \\ (q_1 - \mu)/2 & 0 & \mu q_2'/(2q_1') & -\mu p_2'/q_1' \end{vmatrix} = 0$$

i cui coefficienti indichiamo per brevità con $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$.

([4]) Cfr. la nota (1).

I birapporti a cui abbiamo accennato sono

$$(\mu_i \,.\, \mu_k,\ 0,\ \infty) = \mu_i/\mu_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\,;$$

per ragioni di razionalità alla loro considerazione sostituiamo quella delle seguenti funzioni simmetriche di $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ omogenee di grado zero:

$$K_1 = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)^2}{\sum_{1}^{4}{}_{ik}\ \mu_i\mu_k} = \frac{a_1^2}{a_0 a_2}$$

$$K_2 = \frac{\sum_{1}^{4}{}_{ijk}\ (\mu_i\mu_j\mu_k)^2}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\left(\sum_{1}^{4}{}_{ik}\ \mu_i\mu_k\right)} = \frac{a_3^2}{a_4 a_2}$$

$$K_3 = \frac{\left(\sum_{1}^{4}{}_{ik}\ \mu_i\mu_k\right)^2}{\left(\sum_{1}^{4}{}_{ijk}\ \mu_i\mu_j\mu_k\right)(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)} = \frac{a_2^2}{a_1 a_3}$$

Risulta così

$$K_1 = \frac{4(2I_1I_5 + I_4 + 2I_3^* - I_1^2 - I_1)^2}{16I_1I_3^*I_5 + 4(I_0 + I_2)I_1^3I_3^*I_5 + (I_4 - I_1)^2 - I_1^2(8I_5 + 2I_4 + 8I_3^* - I_1^2 - 4I_1)}$$

$$K_2 = \frac{(4I_5 - 2I_4 + 4I_1I_3^* - 2I_1 - 2I_1^2)^2}{16I_1I_3^*I_5 + 4(I_0 + I_2)I_1^3I_3^*I_5 + (I_4 - I_1)^2 - I_1^2(8I_5 + 2I_4 + 8I_3^* - I_1^2 - 4I_1)}$$

$$K_3 = \frac{16I_1I_3^*I_5 + 4(I_0 + I_2)I_1^3I_3^*I_5 + (I_4 - I_1)^2 - I_1^2(8I_5 + 2I_4 + 8I_3^* - I_1^2 - 4I_1)}{2I_1(4I_1I_5 + 2I_1I_4 + 4I_1^2I_3^* - 2I_1^2 - 2I_1^3)(2I_1I_5 + I_1I_4 + 2I_1I_3^* - I_1^3 - I_1^2)}$$

avendo posto

$$I_3^* = I_3/I_2 = p_2 m_2' \,; \qquad I_0 = I_4^2/(I_2 I_1^3 I_5 I_3^*) = q_2^2/(q_1^2 q_1' m_2 p_2).$$

Si hanno così le interpretazioni geometriche cercate.

**7.** *Coppie di elementi di rigate con rette origine incidenti.*

A partire dall'inizio del n° 2 abbiamo supposto che le due rette origine $r$ e $r'$ degli elementi di rigata fossero non incidenti. nel caso in cui esse sono ancora distinte, ma incidenti, mi sono limitata a considerare coppie di elementi del 1° ordine giungendo facilmente al risultato che non esistono invarianti proiettivi.

**8.** *Coppie di elementi di rigata con la stessa retta origine.*

Si considerino due rigate $R$ e $R'$ con una stessa retta origine $r \equiv r'$. Sulla punteggiata $r \equiv r'$ sorge ora la proiettività $\omega$ che intercede fra i punti di contatto, rispettivamente con la $R$ e la $R'$, di uno stesso piano variabile intorno alla $r \equiv r'$.

Supposto che la proiettività $\omega$ non sia parabolica ([5]) assumiamo i vertici $A^3$ e $A^4$ del tetraedro di riferimento nei suoi due punti uniti e i piani $A^3A^4A^1$, $A^3A^4A^2$ nei corrispondenti piani tangenti (il che non pregiudica ancora la posizione dei vertici $A^1$ e $A^2$ entro i due piani testè indicati). Le due rigate $R$ e $R'$ si possono ora rappresentare con le

$$(8.1) \qquad R)\left\{\begin{array}{ll} x_1 = t x_3 + p(t) x_4 & \text{con } p(0) = m(0) = q(0) = 0 \\ x_2 = m(t) x_3 + q(t) x_4 & \text{e } t = p_{14}/p_{34} \end{array}\right.$$

$$(8.2) \qquad R')\left\{\begin{array}{ll} x_1 = u x_3 + p'(u) x_4 & \text{con } p'(0) = m'(0) = q'(0) = 0 \\ x_2 = m'(u) x_3 + q'(u) x_4 & \text{e } u = p_{14}/p_{34} \end{array}\right.$$

Le condizioni analitiche che corrispondono alla scelta del sistema di riferimento sono: $p_1 = p_1' = m_1 = m_1' = 0$.

([5]) Se invece la proiettività $\omega$ è parabolica lo studio fatto con metodi analoghi conduce al risultato che $R_1$, $R_1'$; $R_1$, $R_2'$; $R_2$, $R_2'$ non ammettono invarianti proiettivi.

In un altro spazio siano $\bar{R}$ e $\bar{R}'$ due rigate con una stessa retta $\bar{r} \equiv \bar{r}'$ come origine e scegliamo il tetraedro di riferimento $\bar{A}^1$, $\bar{A}^2$, $\bar{A}^3$, $\bar{A}^4$ in modo analogo a quanto è stato fatto nel primo spazio

L'omografia più generale che fa passare da uno spazio all'altro e muta uno nell'alto i due sistemi di riferimento è data dalle:

$$
(8.3) \qquad \begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 \\ X_2 = \qquad\qquad a_{22}x_2 \\ X_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ X_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \qquad\qquad x_4 . \end{cases}
$$

Imponendo che gli elementi $\bar{\bar{R}}_1$ e $\bar{\bar{R}}_1'$ coincidano rispettivamente con gli elementi $\bar{R}_1$ e $\bar{R}_1'$ si perviene al sistema:

$$
(8.4) \qquad \begin{cases} a_{22}q_1 = (a_{11}/a_{33})\bar{q}_1 \\ a_{22}q_1' = (a_{11}/a_{33})\bar{q}_1' \end{cases}
$$

la cui condizione di risolubilità risulta

$$
(8.5) \qquad q_1/q_1' = \bar{q}_1/\bar{q}_1'
$$

da cui si ricava, per la coppia $R_1$, $R_1'$, l'invariante $I = q_1/q_1'$.

Considerando invece le coppie formate da un elemento del 1° ordine e da uno del secondo ($R_1$, $R_2'$) oppure da due del 2° ($R_2$, $R_2'$) si vede che i coefficienti dell'omografia devono soddisfare rispettivamente 5 e 8 equazioni omogenee formanti due sistemi in 7 incognite e che la loro coesistenza non dà luogo ad altre condizioni oltre alla (8.5) precedente. Pertanto si può asserire che le coppie $R_1$, $R_2'$ e $R_2$, $R_2'$ con la stessa retta origine e nelle condizioni fin qui supposte valide non ammettono altri invarianti proiettivi oltre quello dei loro $R_1$.

## II. – Invarianti proiettivi della coppia formata da un elemento di rigata insieme con una calotta superficiale di II ordine.

**9.** Nello spazio a tre dimensioni si consideri ora una calotta del 2° ordine $S_2$ non parabolica e un elemento di rigata. Ci limitiamo nel seguito al caso « generale » in cui la retta $r$ origine di questo elemento non sta nel piano tangente alla calotta nel suo centro e non passa per tale centro.

Si assuma il tetraedro di riferimento in modo che il vertice $A^4$ coincida con il centro della calotta (in $A^4$); inoltre, detto $M$ il punto in cui la generatrice $r$ della rigata $R$ incontra il piano tangente alla calotta in $A^4$, si prendano $A^1$ e $A^2$ sul piano tangente alla $R$ in $M$. Si prenda infine $A^3$ nel punto di contatto di $R$ col piano $(rA^4)$.

In queste condizioni (in coordinate non omogenee $x = x_1/x_4$; $y = x_2/x_4$; $z = x_3/x_4$) l'elemento $S_2$ della calotta può essere rappresentato dalle:

$$z = hxy + [3]. \tag{9.1}$$

La $r$ ha equazioni del tipo

$$x_2 = \alpha x_1 ; \qquad x_4 = 0. \tag{9.2}$$

In prossimità della $r$ la $R$ ha equazioni

$$\begin{cases} x_2 = (\alpha + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)x_1 + (p_1 t + p_2 t^2 + \dots)x_3 \\ x_4 = (b_1 t + b_2 t^2 + \dots)x_1 + (q_1 t + q_2 t^2 + \dots)x_3 \end{cases} \tag{9.3}$$

che scriviamo anche

$$\begin{cases} x_2 = a(t)x_1 + p(t)x_3 & \text{con } a(0) \doteq \alpha \\ x_4 = b(t)x_1 + q(t)x_3 & p(0) = b(0) = q(0) = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Le condizioni analitiche che esprimono la particolarità del sistema di riferimento adottato sono: $b_1 = p_1 = 0$.

Ciò premesso si può procedere allo studio degli invarianti proiettivi. Anzitutto per la coppia formata da $R_1$, $S_2$, usando una tecnica analoga a quella del n. 2 adattata alle nuove circostanze, si riscontra che non esistono invarianti proiettivi (conformemente alla previsione che si può fare in base al numero dei parametri dai quali dipende la coppia $R_1$, $S_2$).

Se invece si considera la coppia $R_2$, $S_2$. si ottengono in tutto i tre invarianti

$$I_1 = a_2\alpha/a_1^2 ; \qquad I_2 = p_2\alpha\sqrt{h}/\sqrt{a_1^3} ; \qquad I_3 = b_2\alpha/\sqrt{ha_1^3 q_1}$$

il significato geometrico dei quali risulta implicitamente dalle considerazioni che seguono, nelle quali assegnamo tre interpretazioni geometriche per altrettante loro funzioni.

Due di queste risultano considerando la quadrica $Q$ individuata dalla condizione di contenere l'elemento $R_2$ e le sue intersezioni (rispettivamente $H$, $K$; $P$, $T$) con le rette $A^4 A^1$, $A^4 A^2$.

Posto:

$$\lambda = (H,\ K,\ A^4,\ A^1). \qquad \lambda' = (P,\ T,\ A^4,\ A^2)$$

a calcoli fatti risulta che:

$$\lambda + 1/\lambda + 2 = (\alpha a_2 - a_1^2)^2/(\alpha^2 b_2 a_1 p_2) = (I_1 - 1)^2/I_2 I_3 \tag{9.5}$$

$$\lambda' + \frac{1}{\lambda'} + 2 = a_2^2/(b_2 a_1 p_2) = I_1^2/I_2 I_3 . \tag{9.6}$$

Per avere la terza interpretazione geometrica occorre considerare, oltre alla quadrica $Q$, la quadrica $Q_1$ individuata dalle condizioni di contenere la calotta $S_2$ e di passare per il punto $A^3$ con piano tangente $x_4 = 0$, cosicchè la quadrica $Q_1$ ha equazione $x_3 x_4 = h x_1 x_2$. L'interpretazione cercata è fornita dal birapporto formato dai quattro coni del fascio $Q$, $Q_1$. Scrivendo l'equazione di una quadrica generica del fascio

$$\begin{aligned} \alpha^2 b_2 x_1^2 + b_2 x_2^2 + a_1 p_2 x_4^2 - (2\alpha b_2 + \mu h) x_1 x_2 - \alpha a_1 x_1 x_3 + \\ + (\alpha a_2 - a_1^2) x_1 x_4 + a_1 x_2 x_3 - a_2 x_2 x_4 + \mu x_3 x_4 = 0 \end{aligned} \tag{9.7}$$

i coni si ottengono per i valori di $\mu$ che soddisfano l'equazione di IV grado

$$\begin{aligned} h^2 \mu^4 + 4\, \alpha h b_2 \mu^3 + 2 h a_1 [- a_1^2 + 2\alpha a_2] \mu^2 + \\ + 4\alpha h a_1^3 p_2 \mu + a_1^6 = 0 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Sostituendo per ovvie ragioni alla considerazione del birapporto menzionato, quella dell'invariante assoluto $J$ del polinomio di IV grado che figura nel primo membro della (9.8) si riscontra che

$$J = \frac{(4 - 4I_1 + 4I_1^2 - 12 I_2 I_3)^3}{(27 I_2^2 + 8 + 18 I_2 I_3 - 12 I_1 - 36 I_1 I_2 I_3 - 12 I_1^2 + 8 I_1^3 + 27 I_3)^2} \tag{9.9}$$

che fornisce così la terza interpretazione geometrica cercata.

## III - Invarianti proiettivi della coppia formata da un elemento $R_1$ di rigata insieme con un elemento curvilineo del III ordine.

**10.** Ci limitiamo anche qui al caso « generale » nel quale i due elementi considerati hanno posizione generica uno rispetto all'altro. Fissiamo il sistema di riferimento in modo che $A^4$ coincida col centro dell'$E_3$, la retta $A^4A^1$ ed il piano $A^4A^2A^1$ rispettivamente con la retta tangente e col piano osculatore al medesimo $E_3$ nel punto $A^4$. Inoltre assumiamo $A^2$ nel punto intersezione della retta $r$, origine dell'elemento di rigata, col piano $x_3=0$, $A^3$ nel punto di contatto della rigata col piano $rA^4$, e $A^1$ nel punto di intersezione della retta $A^4A^1$ col piano tangente alla rigata in $A^2$; cosicchè anche ora i quattro vertici del tetraedro di riferimento risultano univocamente determinati dai dati.

Rappresentiamo analiticamente l'$E_3$ curvilineo con le

$$(10.1) \qquad \begin{cases} x_1/x_4 = n_2(x_1/x_4)^2 + n_3(x_1/x_4)^3 + [4] \\ x_3/x_4 = \qquad\qquad\qquad\quad l_3(x_1/x_4)^3 + [4] \end{cases}$$

e la rigata $R$ con le

$$(10.2) \qquad \begin{cases} x_1 = tx_2 + b(t)x_3 \\ x_4 = m(t)x_2 + q(t)x_3 \end{cases} \qquad \text{con } p(0) = m(0) = q(0) = 0.$$

Le condizioni analitiche che corrispondono alla scelta del sistema di riferimento sono:

$$(10.3) \qquad p_1 = m_1 = 0.$$

Usando anche qui una tecnica analoga a quella sviluppata al n° 2 e adattata ora alle nuove circostanze si riconosce allora che lo $R_1$ e l'$E_3$ considerati ammettono un unico invariante proiettivo (come era anche presumibile da un computo di parametri) e precisamente

$$(10.4) \qquad I = l_3q_1n_2)/n_3^2.$$

Esponiamo nelle linee che seguono una interpretazione geometrica di tale invariante I, sebbene essa presenti una notevole complicazione

Chiamiamo anzitutto $F_1$ la quadrica individuata dalle condizioni di contenere la retta $A^4A^1$ e di contenere altresì la retta $r$ risultando lungo questa tangente alla $R$.

Consideriamo anche la rete $T$ delle quadriche contenenti l'elemento $E_3$ e passanti per la retta $r$: per ogni quadrica della rete esistono due punti della $r$ in ciascuno dei quali la quadrica risulta tangente alla rigata $R$: chiamiamo $F_2$ la quadrica della rete per la quale entrambi i punti della coppia testè menzionata coincidono con $A^2$.

Le quadriche $F_1$ e $F_2$, oltrechè nella retta $r$, si segano secondo una $C^3$ sghemba. Siano $C^{*3}$ e $E_3^*$ le proiezioni, eseguite entrambe dal punto $A^3$ sul piano $x_3 = 0$, rispettivamente della $C^3$ sghemba testè indicata e del suo elemento di III ordine $E_3$ uscente dal punto $A^4$. Sia infine $\mu$ la conica del piano $x_3=0$ individuata dalle condizioni di contenere l'elemento $E_3^*$ e di passare per il punto $A^2$. Questa conica e la cubica $C^{*3}$, fueri dei punti $A^2, A^4$ hanno in comune due punti $M$, $N$. Chiamando $\mathfrak{z}$ il birapporto della quattro rette che da $A^1$ proiettano rispettivamente i punti $M$, $N$, $A^4$, $A^2$ si ha finalmente il significato geometrico

$$I = -(\mathfrak{z} + 1/\mathfrak{z} + 2)$$

Tutto ciò si verifica senza difficoltà utilizzando le seguenti equazioni:

$$(10.5) \qquad F_1) \quad x_2x_4 - q_1x_1x_3 = 0$$

$$(10.6) \qquad F_2) \quad -n_2l_3x_1^2 + l_3x_2x_4 - n_3x_3x_4 - q_1l_2x_1x_3 = 0$$

$$(10.7) \qquad C_3) \quad \begin{cases} x_2/x_4 = -(q_1n_1l_3/n_3)(x_1/x_4)^3 \\ x_3/x_4 = -(n_2l_3)/n_3(x_1/x_4)^2 \end{cases}$$

$$(10.8) \qquad C^{*3}) \quad x_2/x_4 = -(q_1n_2l_3)/n_3(x_1/x_4)^3$$

$$(10.9) \qquad \mu) \quad -x_2x_4 + x_2x_1^2 + n_3/n_2x_1x_2 = 0.$$