Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

# Una nuova caratterizzazione delle rigate di un complesso lineare.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **16** (1961), n.3, p. 332–339.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_332_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma*
*bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*
*SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

# Una nuova caratterizzazione delle rigate di un complesso lineare.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino) (*)

**Riassunto.** - *Se* R *è una rigata sghemba appartenente ad un complesso lineare* G, *la notissima proiettività esistente su una generatrice generica* r *tra i punti di questa ed i poli rispetto a* G *dei piani in essi tangenti alla* R *é una involuzione. Questa proprietá viene enunciata nel n.* 2 *in una forma equivalente, scelta in modo tale da non fare figurare nell'ipotesi l'appartenenza di* R *ad un complesso lineare, cosicché acquista un senso il problema della possibilitá di invertire la proprietá stessa. L'inversione viene effettivamente compiuta nel n.* 3. *Nel n.* 4 *la questione trattata viene messa in relazione con la nozione dell'invariante proiettivo di una coppia di elementi di rigate,* $R_1$ *e* $R_1'$, *entrambi del prim'ordine. Il n.* 5 *contiene una osservazione relativa agli invarianti proiettivi di una coppia di elementi di rigate, formata da un elemento di second'ordine* $R_2$ *variabile di una rigata* R *appartenente a una congruenza lineare, e da un conveniente elemento del prim'ordine fisso* $R_1'$.

**Summary.** - *Let* R *be a non-developable ruled surface belonging to a linear complex* G, *and* r *a generator of* R: *many Authors have taken into consideration the projectivity existing on* r *between the points of* r *and the poles of their tangent planes in* G. *This projectivity is an involution. This property is stated in* $n^r$. 2 *in such a way to give a sense to the problem of the possibility to invert the statement. The inversion is made in* $n^r$. 3. *In* $n^r$. 4 *the question is put in relation with the notion of the projective invariant of a pair of elements of ruled surfaces.* $R_1$ *and* $R_1'$, *being both of first order.* $N^r$. 5 *contains a remark about the projective invariants of a pair of elements of ruled surfaces, formed by an element* $R_2$ *of second order, which varies in a ruled surface belonging to a linear congruence. and a fixed element* $R_1'$ *of first order.*

**1.** Per una rigata $R$ (che in tutto il seguito di questo lavoro supponiamo non sia sviluppabile) appartenente ad un complesso lineare generale $G$, si puó ritenere classica, a partire da una sua generatrice generica $r$, la considerazione della proiettivitá $\omega$ esistente fra le due punteggiate sovrapposte $(P)$, $(P_1)$, di sostegno $r$,

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 4 settembre 1961.

essendo $P_1$ il polo rispetto a $G$ (¹) del piano $\pi$ tangente alla $R$ nel punto $P$ (²) della $r$.

Meno ovvia é la proprietá che la *proiettivitá* $\omega$ *é un' involuzione:* dato il rilievo che questa particolaritá ha per il seguito di questo lavoro, ne diamo una verifica diretta. In coordinate proiettive omogenee, con tetraedro di riferimento $A^1A^2A^3A^4$, possiamo supporre che il complesso lineare $G$ abbia equazione

$$(1\cdot1) \qquad p_{13} + p_{24} = 0,$$

che le generatrici della $R$ siano rappresentate, in funzione di un parametro $t$ dalle

$$(1\cdot2) \qquad \begin{cases} x_1 = l(t)x_3 + m(t)x_4 \\ x_2 = m(t)x_3 + q(t)x_4 , \end{cases}$$

e che la retta $r$ coincide con la $A^3A^4$, e corrisponda al valore $t = 0$ del parametro, cosicché (posto $l(0) = l_0$ etc):

$$l_0 = m_0 = q_0 = 0.$$

Se $P \equiv (0, 0, u_3, u_4)$, $P_1 \equiv (0, 0, v_3, v_4)$ il piano tangente alla $R$ in $P$, avente equazione (in coordinate correnti $x_1, x_2, x_3, x_4$) (³).

$$(m_0'u_3 + q_0'u_4)x_1 - (l_0'u_3 + m_0'u_4)x_2 = 0,$$

ha come polo rispetto al complesso $G$ il punto $P_1$ se

$$(1\cdot3) \qquad l_0'u_3v_3 + m_0'(u_3v_4 + u_4v_3) + q_0'u_4v_4 = 0$$

La (1·3), bilineare nelle coppie $u_3, u_4$; $v_3, v_4$, é proprio l'equazione della proiettivitá $\omega$, e la sua forma rende evidente che si tratta di un' involuzione.

(¹) Indichiamo indifferentemente con $G$ sia il complesso lineare di rette, sia la polaritá nulla da esso determinata.

(²) Cfr. S. Lie: *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig 1896, p. 235-236 (dove sono richiamati anche altri lavori di Lie); E. Picard; *Application de la théorie des complexes linéaires á l'étude des surfaces et des courbes gauches*, « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. », (2), 6, 1877, pp. 328-366, v. pp. 330-331. É anche classica l'applicazione che nelle opere citate e altrove si fa dei punti uniti della proiettivitá $\omega$ allo studio delle asintotiche della $R$.

(³) Poniamo $l' = \dfrac{dl}{dt}$, ecc.

**2.** Per lo scopo che mi propongo in questa Nota conviene mettere il risultato citato nel n. 1 sotto una forma un poco diversa.

Sia $s$ una retta generica del complesso lineare $G$, generico nel senso di essere sghemba con le generatrici generiche della rigata $R$, e sia $\sigma$ la proiettività tra la punteggiata di sostegno $s$ ed il fascio di piani di asse $s$ che viene subordinata dalla polarità nulla $G$. Se il piano $\pi$ tangente alla rigata $R$ nel punto $P$ della generatrice $r$ sega la $s$ nel punto $P'$, il piano polare del punto $P'$ nella polaritá $G$ sega la $r$ nel punto $P_1$ considerato nel n. 1 (perché chiamando $Z$ il punto traccia su $r$ del piano polare di $P'$, il piano polare del punto $Z$ é il piano $rP'$, e coincide pertanto con $\pi$). Vogliamo dunque immaginare la situazione in questo modo, che nell'attuale formulazione presentiamo senza utilizzare la circostanza che la rigata sghemba $R$ appartiene ad un complesso lineare: si considera una retta $s$ (non incidente a tutte le generatrici $r$ della $R$), e una proiettivitá $\sigma$ tra la punteggiata di sostegno $s$ ed il fascio di piani di asse $s$. A ogni punto $P$ della generatrice $r$, fissata in modo generico sulla $R$, facciamo corrispondere sulla stessa $r$ il punto $P_1$ segato sulla $r$ dal piano omologo nella proiettività $\sigma$ del punto $P'$ segato sulla $s$ dal piano tangente alla $R$ nel punto $P$, ottenendo così una proiettività $\omega$ tra le due punteggiate $(P)$, $(P_1)$ di sostegno $r$.

*Data una rigata sghemba* R, *é possibile trovare una retta* $s$ (non direttrice della rigata R) *ed una proiettivitá* $\sigma$ *in modo che la corrispondenza* $\omega$ *tra le punteggiate sovrapposte* $(P)$, $(P_1)$ — *corrispondenza ovviamente proiettiva* — *sia costantemente* (cioé per ogni generatrice generica r della $R$) *un'involuzione?*

Alla risposta a questa domanda (la posizione della quale é strettamente connessa con quanto si dirá nel successivo n. 4) é sostanzialmente dedicata la presente Nota. Da quanto si é detto precedentemente risulta che si ha una soluzione assumendo come rigata $R$ una rigata di un complesso lineare generale $G$, come retta $s$ un'ulteriore retta del medesimo còmplesso lineare, e come $\sigma$ la proiettivitá che viene subordinata dalla polaritá nulla $G$ tra la punteggiata di sostegno $s$ ed il fascio di piani di asse s. Le considerazioni che ci accingiamo a sviluppare nel n. 3 provano che non esistono altre soluzioni.

**3.** Per trattare la questione posta nel n. precedente, assumiamo coordinate proiettive omogenee di punto $x_1 x_2 x_3 x_4$ — riservandoci di porre $x_4 = 1$ —, prendendo il tetraedro di riferimento $A^1A^2A^3A^4$ in modo che lo spigolo $A^1A^2$ coincida con la retta fissa $s$, e supponiamo che la proiettività $\sigma$ faccia corrispondere al punto $(X_1, X_2, 0, 0)$ della $s$ il piano per $s$ avente l'equazione

$$x_3 = \frac{lX_1 + pX_2}{mX_1 + qX_2} x_4, \tag{3.1}$$

dove $l, p, m, q$ sono costanti assegnate, con

$$lq - pm \neq 0. \tag{3·2}$$

La rigata $R$ sia individuata da due sue linee direttrici $(y)$, $(z)$, descritte da punti $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, funzioni di uno stesso parametro $t$. Sulla generatrice $r$ di $R$, proveniente da un valore generico di $t$, sia $P \equiv (y_1 + \lambda z_1, y_2 + \lambda z_2, y_3 + \lambda z_3, y_4 + \lambda z_4)$: il piano tangente alla $R$ in $P$ sega la $s$ nel punto $P' \equiv (X_1, X_2, 0, 0)$ con [4]

$$X_1 : X_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ y_1' + \lambda z_1' & y_3' + \lambda z_3' & y_4' + \lambda z_4' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ y_2' + \lambda z_2' & y_3' + \lambda z_3' & y_4' + \lambda z_4' \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

A norma delle (3·1), (3·3) al punto $P'$ corrisponde nella proiettivitá $\sigma$ un piano che sega la $r$ nel punto $P_1 \equiv (y_i + \lambda_1 z_i)$, con $i = 1, 2, 3, 4$, essendo

$$\begin{aligned} &[l(y_4 + \lambda_1 z_4) - m(y_3 + \lambda_1 z_3)] \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ y_1' + \lambda z_1' & y_3' + \lambda z_3' & y_4' + \lambda z_4' \end{vmatrix} + \\ &+ [p(y_4 + \lambda_1 z_4) - q(y_3 + \lambda_1 z_3)] \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ y_2' + \lambda z_2' & y_3' + \lambda z_3' & y_4' + \lambda z_4' \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{3·4}$$

La (3·4), bilineare in $\lambda$, $\lambda_1$, é l'equazione delle proiettivitá $\omega$ tra le punteggiate di sostegno $r$ descritte dai punti $P$, $P_1$. La condizione

[4] Poniamo $y_1' = \frac{dy_1}{dt}$, ecc.

affinché essa sia un'involuzione é dunque

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ z_1'(ly_4-my_3)-y_1'(lz_4-mz_3) & z_3'(ly_4-my_3)-y_3'(lz_4-mz_3) & z_4'(ly_4-my_3)-y_4'(lz_4-mz_3) \end{vmatrix} +$$

(3.5)

$$+ \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2'(py_4-qy_3)-y_2'(pz_4-qz_3) & z_3'(py_4-qy_3)-y_3'(pz_4-qz_3) & z_4'(py_4-qy_3)-y_4'(pz_4-qz_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Se ora, senza scapito di generalitá, supponiamo

$$y_4 = z_4 = 1$$

e poniamo

(3·6) $$z_i - y_i = \varphi_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

la condizione (3·5) si trasforma nella

(3·7) $$[(l-my_3)\varphi_1+(p-qy_3)\varphi_2]\varphi_3'-[(l-my_3)\varphi_1'-m\varphi_1 y_3'+(p-qy_3)\varphi_2'-q\varphi_2 y_3']\varphi_3-(my_1'+qy_2')\varphi_3^2=0.$$

La (3·7) é ovviamente soddisfatta per $\varphi_3 \equiv 0$, caso che peró noi escludiamo perché la (3·6) darebbe $y_3 = z_3$, cioé la generatrice $r$ delle $R$ sarebbe appoggiata alla retta fissa $s$, caso da noi escluso. D'altro lato per $\varphi_3 \neq 0$, dividendo la (3·7) per $\varphi_3^2$ essa diventa

$$\left[\frac{(l-my_3)\varphi_1 + (p-qy_3)\varphi_2}{\varphi_3} + my_1 + qy_2\right]' = 0$$

Integrando si ricava

(3·8) $$\varphi_3 = \frac{(l-my_3)\varphi_1 + (p-qy_3)\varphi_2}{k - my_1 - qy_2},$$

con $k$ costante. Ricordando che $z_3 = y_3 + \varphi_3$, si ha intanto che la $R$ é individuata dalle due linee direttrici $(y)$, $(z)$ delle quali la prima si puó assegnare arbitrariamente, e per la seconda si possono dare arbitrariamente $z_1(t)$. $z_2(t)$ mentre

(3·9) $$z_3 = \frac{l\varphi_1 + p\varphi_2 + (k - mz_1 - qz_2)y_3}{k - my_1 - qy_2},$$

con $k$ costante.

Se ora a norma della (3·8) si calcolano le coordinate di una generica generatrice $r$ della $R$ si ottiene

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} : p_{34} = N(y_1\varphi_2 - y_2\varphi_1) : (ly_1 - ky_3 + qy_2y_3)\varphi_1 +$$

$$+ (p - qy_3)y_1\varphi_2 : - N\varphi_1 : (l - my_3)y_2\varphi_1 + (py_2 - ky_3 + my_1y_3)\varphi_2 :$$

$$: N\varphi_2 : - (l - my_3)\varphi_1 - (p - qy_3)\varphi_2 ,$$

con

$$N = k - my_1 - qy_2 .$$

Sulle equazioni così ottenute si riscontra immediatamente che la rigata $R$ appartiene al complesso lineare $G$ avente l'equazione

$$mp_{13} - lp_{14} + qp_{23} + pp_{42} + kp_{34} = 0. \tag{3·10}$$

Il complesso (3·10) é generale in base alla (3·2). É ovvio che la retta $A^1A^2$, che abbiamo assunta come retta $s$ appartiene al complesso (3·10) e si verifica anche senza difficoltá che la polaritá nulla da questo definita subordina tra la punteggiata di sostegno $s$ e il fascio di piani di asse $s$ la stessa proiettivitá utilizzata nella (3.1).

Risulta cosí completamente dimostrato quanto é asserito nel l'ultimo capoverso del n. 2.

**4.** In un lavoro pubblicato in questo stesso fascicolo del Bollettino ([5]) la sig.na MAGDA ROLANDO ha considerato, fra altro, gli invarianti proiettivi di una coppia di elementi di rigata entrambi di 1° ordine $R_1$, $R_1'$: ognuno di questi é essenzialmente costituito da una retta ($r$, o rispettivamente $s$) e da una proiettivitá ($\rho$ o rispettivamente $\sigma$) tra la punteggiata di sostegno $r$ (risp. $s$) e il fascio di piani avente per asse la medesima retta. Nel caso « generale » in cui le due rette $r$, $s$ sono sghembe esiste un (solo) invariante proiettivo della coppia, il quale é fornito dall'invariante assoluto $I$ della proiettivitá $\omega$ (supposta non parabolica) tra le due punteggiate sovrapposte ($P$), ($P_1$), dove a partire da un punto $P$

([5]) *Invarianti proiettivi simultanei di un elemento di rigata e di un altro elemento.*

della $r$ e dal piano $\pi$ suo omologo in $\rho$, si ottiene $P_1$ come traccia su $r$ del piano omologo in $\sigma$ del punto $P' \equiv \pi s$. (6)

Così, mantenuti fissi la retta $s$ e l'elemento di prim'ordine di rigata di cui essa é origine, sia $R_1'$ (cioé la proiettivitá $\sigma$ tra la punteggiata $s$ ed il fascio di piani omonimo), sorge la possibilitá di considerare il predetto invariante proiettivo quando $r$ varia venendo successivamente a coincidere con le varie generatrici di una rigata $R$ (non avente la retta $s$ come direttrice), mentre come elemento $R_1$ uscente da $r$ si assume quello definito dalla rigata $R$. E vi é luogo a considerare la possibilitá che $R$ sia tale che l'invariante proiettivo $I$ definito dai singoli elementi $R_1$ di $R$ insieme con $R_1'$ sia costante.

Rinviando ad altra occasione la determinazione di tutte le rigate $R$ per le quali ció avviene, ci limitiamo qua ad osservare che in particolare questo caso si presenta per le rigate $R$ per le quali la proiettivitá $\omega$ é costantemente un'involuzione ($I = -1$); e che a norma di quanto é detto nei n.i precedenti, sussiste il seguente

Teorema. – *Le rigate sghembe* R *per le quali la coppia formata da un loro qualsiasi elemento del prim'ordine* $\mathrm{R}_1$ *insieme con un elemento di rigata del prim'ordine fisso* $\mathrm{R}_1'$ (uscente da una retta s che non sia direttrice della $R$) *ha costantemente l'invariante proiettivo* 1 *eguale a* $-1$ *sono, tutte e sole, le rigate appartenenti ad un complesso lineare generale contenente la retta fissa* s *e subordinante tra la punteggiata di sostegno* s *e il fascio di piani d'asse* s *la medesima proiettività dell'*$\mathrm{R}_1'$.

5. A complemento di quanto si é detto, aggiungiamo che nel suo lavoro citato la sig.na Rolando ha anche considerato gli invarianti proiettivi della coppia formata da due elementi di rigata,

(6) Si riconosce subito che, se in quanto precede si scambiano fra loro le due rette $r$, $s$ (e, insieme con esse, le proiettività $\rho$, $\sigma$), la proiettività $\omega$ tra due punteggiate $(P)$, $(P_1)$ viene sostituita da una proiettività $\bar{\omega}$ tra due punteggiate sovrapposte di sostegno $s$, che é proiettivamente equivalente alla $\omega$, ed ha pertanto il medesimo invariante assoluto $I$. Si può anche osservare che, p. e. per la proiettività $\omega$, la considerazione del: l'invariante assoluto implica una distinzione tra i suoi due punti uniti- essa si evita sostituendo alla considerazione di $I$ quella di

$$H = \frac{(I+1)^2}{I}.$$

uno dei quali é ora un elemento $R_2$ di second'ordine (di origine $r$), restando l'altro ancora un elemento $R_1'$ di prim'ordine (di origine $s$), stabilendo che tali invarianti si riducono sostanzialmente a due, $I$, $I'$, il primo dei quali é l'invariante giá menzionato di una coppia di elementi del prim'ordine, e precisamente dell'elemento $R_1$ contenuto in $R_2$, insieme con $R_1'$, mentre l'altro. cioé $I'$, nelle condizioni più generali, é il birapporto $(MNU_1U_2)$ dove:

$M$, $N$ sono le intersezioni della retta $s$ con la quadrica $Q$ osculatrice (lungo la $r$) all'elemento $R_2$;

$U_1$, $U_2$ sono le traccie sulla $s$ dei piani tangenti all'elemento $R_2$ nei punti uniti della proiettivitá $\omega$.

Ebbene. se $R$ é una rigata appartenente ad una congruenza lineare $K$ — che ci limitiamo a supporre generale. cioé dotata di due rette direttrici distinte $m$, $n$ —, $s$ una retta appartenente a $K$, e $\sigma$ una proiettivitá tra la punteggiata $s$ ed il fascio di piani omonimo, che ai due punti $M \equiv sm$, $N \equiv sn$ faccia corrispondere rispettivamente i piani $\mu \equiv sn$, $\nu \equiv sm$, la coppia formata da un elemento variabile $R_2$ della rigata $R$ insieme con l'elemento $R_1'$ fisso di origine $s$ definito dalla $\sigma$ ha entrambi i suoi invarianti proiettivi costanti.

Invero, sia $G$ il complesso lineare passante per la congruenza lineare $K$ che subordina tra la punteggiata $s$ e il fascio di piani di asse $s$ la proiettivitá $\sigma$, e siano $W_1$, $W_2$ i punti doppi dell'involuzione $\omega$ che cosí nasce sulla generatrice generica $r$ delle $R$. La costanza dell'invariante $I$ é giá acquisita. Quanto a $I'$, osserviamo che, chiamando prima schiera della quadrica $Q$ quella a cui appartiene la $r$, appartengono alla seconda schiera sia le direttrici $m$, $n$, sia le rette tangenti alle asintotiche curve della rigata $R$ nei vari punti $P$ della retta $r$, e quindi in particolare quelle — che chiamiamo $w_i$ — passanti per ciascuno dei due punti $W_i$ $(i=1, 2)$ che sono doppi per l'involuzione $\omega$. Posto $M_0 = mr$, $N_0 = nr$, la coppia $M_0N_0$ appartiene a questa involuzione (in quanto il piano tangente alla $R$ in $M_0$ cioé il piano $mr$ sega la $s$ in $M$, che ha come piano polare in $G$ il piano $\mu \equiv sn$, passante per $N_0$), cosicché le coppie $W_1W_2$. $M_0N_0$ sono armoniche. Perció nella seconda schiera della quadrica $Q$ sono armoniche le coppie $w_1w_2$, $mn$, cioé sulla $s$ sono armoniche le coppie $U_1U_2$. $MN$ (la seconda delle quali é appunto segata sulla $s$ dalla $Q$), in quanto sezioni delle $s$ con le coppie armoniche di piani $rw_1$, $rw_2$. $rm$, $rn$. L'asserto é cosí dimostrato.