UMI

Recensioni.

* P. G. Guest, Numerical Methods of Curve Fitting, Cambridge University Press, 1961 (F. G. Tricomi)
* R. R. Goldberg, Fourier Transforms, Cambridge University Press, 1961 (F. G. Tricomi)
* Ugo Cassina, Critica dei principi della matematica e questioni di logica, Edizioni Cremonese, Roma, 1961 (Fabio Previale)
* L. W. Busbridge, The Mathematics of Radiative Transfer, Cambridge University Press, 1960 (Luigi Gatteschi)
* G. Ciucu, R. Theodorescu, Processi con vincoli completi, Ed. Acad. R. P. R., 1960 (G. G. Vranceanu)
* Giuseppe Peano, Opere Scelte, Vol. III, Edizioni Cremonese, Roma, 1959 (T. Viola)
* H. Arzeliès, La Dynamique relativiste et ses applications, fascicule II, Gauthier-Villars, Paris, 1958 (Antonio Pignedoli)
* D. Ter Haar, Introduction to the Physics of many-body systems, Interscience Publishers, New York, 1958 (Antonio Pignedoli)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.3, p. 340–358.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_3_340_0>

RECENSIONI

P. G. GUEST, *Numerical Methods of Curve Fitting*, Cambridge Univ. Press, 1961, XIV + 422 pp.; 80 s.

Questo libro — che appartiene ad una regione di confine fra l'Analisi numerica e la Statistica matematica — tratta, con molta larghezza, dei vari metodi per la rappresentazione di dati d'osservazione mediante formule « empiriche »; cioè dei metodi per adattare curve di un tipo prestabilito (p. es. curve gaussiane, parabole d'ordine n, ecc.) alle curve sperimentali.

Dopo un'introduzione statistico-matematica senza pretese, vengono trattati i problemi suaccennati, nonchè quelli affini della perequazione dei dati sperimentali, della correlazione statistica, ecc..

Il livello matematico dell'opera è modesto, come può, ad esempio, rilevarsi dalla seguente asserzione (a p. 23): « L'integrale (di Fourier) può essere stabilito nel modo più agevole come limite della famigliare serie di Fourier ». Tuttavia il libro può rendere utili servigi a chi s'imbatte spesso nei problemi suindicati, come i fisici e i biologi. Inoltre contiene qualche notizia in sè interessante, p. es. che lo « *Student* » che dà il nome ad una ben nota distribuzione statistica, era un pseudonimo del chimico W. S. Gosset.

F. G. TRICOMI

R. R. GOLDBERG, *Fourier Transforms*, (Cambridge Tracts in Mathematics etc., n° 52) Cambridge Univ. Press, 1961 - VIII + 76 pp.; 21 s.

In poco più di 70 paginette, questo libretto fornisce una eccellente introduzione alla moderna teoria della trasformazione di Fourier, restando però essenzialmente nell'ambito dell'Analisi classica.

Si giunge fino al celebre teorema di Plancherel sulla trasformazione di Fourier in L^2, a quello di Wiener sulle trasformate delle « *traslate* » $f(x+c)$ di una funzione $f(x)$ e — nel campo della trasformazione di Fourier-Stieltjes — alla caratterizzazione di Bôchner delle funzioni « *di tipo positivo* », teoremi tutti che vengono dati assieme con le loro dimostrazioni.

L'opera in esame appartiene all'insieme — ahimè sempre più rarefatto — dei libri di matematica in cui l'autore cerca di facilitare il più possibile il lettore, p. es. indicando chiaramente il significato dei simboli e delle definizioni (mai capricciose) adottate, dicendo dove possono trovarsi le dimostrazioni che non può riportare, ecc. Ciò porta con sè che la lettura del libretto è facile e piacevole, nonostante che il continuo uso di molte abbreviazioni — reso necessario dal voler condensare tanta materia in tanto poco spazio — obblighi spesso ad una preventiva traduzione dei vari enunciati in linguaggio ordinario, prima di poterne afferrare il significato.

F. G. TRICOMI

UGO CASSINA, *Critica dei principi della matematica e questioni di logica*, Roma 1961, Ediz. Cremonese, pp. VII + 518.

Il volume raccoglie 23 scritti dell'A. in gran parte già apparsi su pubblicazioni periodiche, ciascuno dei quali, secondo l'avvertenza dello stesso A., può esser letto indipendentemente dagli altri. Esso è tuttavia una raccolta organica di ricerche storico-critiche sui fondamenti della matematica, particolarmente adatta, per i suoi pregi di chiarezza e semplicità, ad aprire ai giovani matematici italiani un accesso verso studi in Italia ancora trascurati, o che tutt'al più riescono a interessare solo per certi loro aspetti curiosi e un po' sconcertanti (antinomie, paradossi), abilmente messi in luce da divertenti, ma spesso aberranti, libri di divulgazione scientifica.

I lavori che l'A. ha destinato a questo suo volume si possono suddividere in due categorie: quella delle ricerche originali su fondamenti di geometria, teoria degli insiemi, analisi, e quella dei saggi in cui l'A. si prefigge di porre in luce la funzione decisiva avuta da G. PEANO, suo grande maestro, nei moderni sviluppi del pensiero matematico, con una ricca documentazione dell'opera originale di PEANO e della propria opera compiuta nello spirito e secondo gli indirizzi del logico cuneese.

Passeremo qui brevemente in rassegna gli scritti che compongono il volume, cercando di conservarne l'ordine, non privo di importanza per la fisionomia generale dell'opera.

Il volume ha inizio con un esame storico-critico dei rapporti tra il concetto di grandezza e il concetto di numero, e con l'esposizione di una teoria assiomatica delle grandezze fondata sul concetto di numero reale (cap. 1-2). Seguono alcuni saggi dedicati alle grandezze geometriche fondamentali (lunghezza, area, volume), in cui fa spicco un'analisi particolarmente approfondita delle moderne teorie sull'equivalenza di poligoni e poliedri, fondate sulla nozione di « segmento associato », che generalizzano le definizioni di EUCLIDE e ARCHIMEDE, insufficienti per affrontare il problema della cubatura (cap 3-5). L'A. passa poi a esporre la storia del concetto di arco di curva fino alle rivoluzionarie scoperte di CANTOR e PEANO e i fondamenti della teoria degli insiemi connessi irriducibili, che permette di caratterizzare nell'ambito della teoria generale degli insiemi l'arco di curva, inteso modernamente come insieme omeomorfo a un segmento rettilineo (cap. 6-9). In particolare l'A. pone in luce la possibilità di liberare le teorie insiemistiche dell'arco di curva dall'uso di infinite scelte arbitrarie (cap. 9).

Dopo due capitoli (10-11) dedicati a un esame accurato della funzione del principio delle infinite scelte arbitrarie nei domini della teoria degli insiemi e dell'analisi infinitesimale, l'A. passa ad ampliare e ad approfondire l'opera di esegesi peaniana, rimasta frammentaria nei capitoli precedenti. Il compito di analizzare tale esegesi non è lieve, data la competenza specifica dell'A., che tra l'altro, come è noto, ha di recente curato per l' U.M.I. l'edizione dei tre tomi delle « *Opere scelte* » di PEANO. Ci sembra tuttavia di dover fare qualche riserva sul giudizio complessivo dell'opera logica e filosofica di PEANO dato dall'A.. Gli accenti apologetici, e talvolta commossi, come nella suggestiva commemorazione: « *Su l'opera filosofica e didattica di G. Peano* » (cap. 18), non ci paiono in tale giudizio del tutto misurati. Non vi è dubbio che la *Logica matematica* di PEANO fu una conquista decisiva del pensiero matematico; basterebbe a provarlo la profonda impressione suscitata, secondo la testimonianza di B. RUSSEL (« *My mental development* »), dalle idee di PEANO e dei suoi allievi al Congresso di Filosofia di Parigi del 1900. Ma lascia un po' perplessi la tendenza dell'A. a considerare l'opera di PEANO in campo logico, almeno nelle sue linee direttive, definitiva, e a ritenere addirittura che PEANO abbia fatto compiere alla logica « i soli progressi essenziali dai tempi di ARISTOTELE ai nostri giorni » (cap. 18, p. 346).

Questa sopravalutazione dell'opera di PEANO ha talvolta come naturale conseguenza una svalutazione da parte dell'A. di alcuni pensatori anche sommi del nostro tempo Così ad es. il parallelo tra la *Logica matematica* di PEANO e la *Logica teoretica* di HILBERT (cap. 19), peraltro impostato dall'A. troppo unilateralmente sul confronto dei rispettivi simbolismi, è risolto decisamente a favore di PEANO, laddove è persino dubbio che si possa istituire un parallelo di tal genere.

L'A. non tien molto conto delle direttive precise e profondamente originali che caratterizzano la *Logica teoretica* di HILBERT e che si distinguono nettamente da quelle piuttosto oscillanti di PEANO, il quale, dopo un fugace entusiasmo per il programma leibniziano della realizzazione di una « Ars characteristica universalis », atta a garantire al ragionamento la speditezza e la sicurezza di un comune calcolo algebrico, ebbe indubbiamente a ripiegare, come dimostra la sconcertante reticenza sull'argomento da lui mantenuta negli ultimi trent'anni della sua vita (e come notava ad es. G. ASCOLI, *In memoria di Giuseppe Peano*, Cuneo, Liceo Scientifico Statale, 1955, p. 27), su un programma più modesto e realistico: la costituzione di un simbolismo ideografico universale, conciso e sicuro, per l'esposizione di ogni scienza deduttiva. Nel caso di HILBERT non ebbe a manifestarsi una crisi di coscienza analoga a quella che dovette bloccare l'attività di PEANO, giacchè HILBERT non si propose in alcun modo di riesumare il programma Leibniziano, e vide nel « sistema formale », il cui concetto egli possedeva con ben altra precisione di PEANO, più che un effettivo strumento di calcolo, un oggetto di studio per quelle ricerche « metamatematiche », o più propriamente « metaformali », concernenti il cosiddetto « *Entscheidungsproblem* ». Il sistema formale di HILBERT, non concepito necessariamente come i colossi dei *Principia Mathematica* di RUSSEL-WHITEHEAD o del *Formulario* di PEANO, ma adattabile a ogni singola teoria assiomaticamente individuata, rende d'altronde elastica la distinzione tra matematica e metamatematica; e HILBERT, al contrario di PEANO, può in tal modo evitare, nella sua formalizzazione dell'Aritmetica, la necessità di inserire in ogni formula l'ipotesi che gli oggetti ivi trattati siano numeri, e può anzi far a meno dello stesso simbolo N di PEANO per denotare la classe dei numeri. Giacchè infatti nel sistema formale dell'aritmetica gli oggetti trattati sono tutti numeri, l'ipotesi che lo siano è ovviamente superflua e può relegarsi tra le considerazioni metamatematiche. Pertanto, considerare, come fa l'A. (p. 366), una lacuna della formalizzazione Hilbertiana dell'aritmetica l'assenza del simbolo N di PEANO, è un'ingiustizia nei riguardi di HILBERT.

Altrove poi l'A si schiera forse a torto dalla parte di PEANO, come ad es. là dove considera il « principio della scelta » di ZERMELO uno strumento atto a mascherare uno schema di ragionamento estraneo alla logica ordinaria, e gli nega d'altra parte recisamente ogni diritto di inserirsi tra gli assiomi della teoria degli insiemi (cap. 11, pp. 230-232 e pp. 259-260).

In generale comunque l'esegesi dell'opera peaniana compiuta dall'A. ripropone temi e sviluppi vitali per la riflessione sui fondamenti dell'intera scienza, e non si può negare d'altronde che la stessa critica dell'A. a HILBERT coglie il segno almeno nel porre in rilievo la scarsa sensibilità dimostrata da HILBERT nei riguardi del postulato peaniano di induzione completa, elemento indispensabile per ogni costruzione razionale dell'aritmetica (pp. 370-371).

Dopo la parentesi dedicata a PEANO, gli ultimi tre scritti del volume contengono nuovamente ricerche originali sui fondamenti della geometria; ci sembra degno di una particolare attenzione l'ultimo di essi, che svolge una teoria assiomatica della congruenza euclidea, in cui sono soppresse dall'elenco delle idee primitive quelle di « angolo » e di « congruenza tra angoli », e ciò in base all'osservazione che « il modo più semplice per verificare sperimentalmente la congruenza di due angoli è quello di ricorrere al compasso e al criterio di congruenza dei triangoli fondato sulla congruenza dei lati corrispondenti (III criterio) » (p. 499).

FLAVIO PREVIALE

I. W. BUSBRIDGE, *The Mathematics of Radiative Transfer* (Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. n° 50), Cambridge Univ. Press 1960, pp. 1 3, 30 s.

Questo volumetto è dedicatô all'esposizione dei metodi matematici con i quali si possono affrontare alcuni problemi basilari della moderna Astrofisica.

Il libro, che non è solo un rifacimento del classico trattato del 1934 di E. HOPF, *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*, pubblicato nella stessa Collezione, contiene, esposti in modo semplice ma rigoroso, i più recenti risultati sull'argomento. È pertanto raccomandabile a chi voglia rapidamente informarsi sulle questioni più importanti.

Nella prima parte, partendo da alcune questioni centrali della Astrofisica, si perviene alla determinazione dei tipi fondamentali di equazioni integrali che reggono i vari problemi. Si tratta, in sostanza, delle due equazioni integrali (equazioni di Milne generalizzate)

$$I(\tau) = \frac{1}{2}\omega_0 \int_0^{\tau_1} I(t)\, E(|t-\tau|)\, dt + B(\tau),$$

$$I(\tau) = \frac{1}{2}\omega_0 \int_0^{\infty} I(t)\, E(|t-\tau|)\, dt + B(\tau),$$

con $B(\tau)$ e $E(\tau)$ funzioni note.

La seconda parte del volume tratta dei metodi di risoluzione delle suddette equazioni integrali e vi troviamo, accanto agli ormai tradizionali metodi « alla Wiener-Hopf », alcune più recenti tecniche quali ad es. quelle dovute ai russi V. A. AMBARTSUMIAN e V. V. SOBOLEV.

Chiude il volume un'appendice su alcune questioni non ancora completamente risolte.

LUIGI GATTESCHI

G. CIUCU, R. THEODORESCU, *Processi con vincoli completi*. La collezione « Teoria delle Probabilità » I. Ed. Acad. R. P. R., 1960; 231 pag. Lei 9,85.

La presente monografia contiene uno studio sistematico delle catene con vincoli completi (catene di ordine infinito dopo un'altra terminologia). Queste catene, che contengono come caso speciale le catene MARKOV, sono state introdotte nella teoria delle probabilità da O. ONICESCU e G. MIHOC fin dal 1935 e poi studiate anche da altri probabilisti romeni.

Questa monografia costituisce il primo lavoro esistente oggi nella letteratura di specialità dedicata a questo argomento e rappresenta il primo numero nella collezione intitolata « Teoria delle probabilità » pubblicata dall'Editoria dell'Accademia R.P.R..

Il materiale è diviso in otto capitoli e un'appendice.

I primi sette capitoli trattano della teoria propriamente detta delle catene con vincoli completi: i capitoli I e II si occupano di catene con vincoli completi, i capitoli III-VI di catene con vincoli completi nel senso esteso, il VII capitolo considera processi con vincoli completi (il caso del parametro continuo). L'ultimo capitolo è consacrato alla teoria del studiare (learning theory) rispetto al punto di vista di queste catene, e l'appendice ha un carattere in un certo senso indipendente, essendo consacrata ai processi MARKOV multipli.

Il primo capitolo della monografia, intitolato « Catene con vincoli completi », comincia con la definizione di queste catene, mettendo in evidenza il caso stazionario, del quale si occupa la monografia esclusivamente, e la loro classificazione secondo il comportamento asintotico. Un ruolo centrale in questo capitolo occupa la relazione funzionale della probabilità totale; questa relazione la quale in principio ha il ruolo della relazione di CHAPMAN nella presente teoria, ha condotto ulteriormente a una serie di rimarcabili risultati teoretici rispetto a una classe di operatori. La nozione di catena con vincoli completi e poi illustrata con numerosi esempi (catene MARKOV semplici e multipli, schema di contagione e invalidità, etc.) Il capitolo finisce con lo studio della catena associata ad una catena con vincoli completi la quale presenta un interesse speciale intervenendo direttamente nella teoria del studiare e di uno schema generalizzato (O. ONICESCU, G. MIHOC (1936); R. THEODORESCU (1960)).

Il secondo capitolo « Teoreme ergodice. Teoreme limita » si occupa in primo luogo del comportamento asintotico della probabilità totale, dandosi il teorema di O ONICESCU e G. MIHOC. Si passa poi alle teoreme di R. FORTET, svolte nella sua tesi del 1938, che danno espressioni effettive per le itterate di certe grandezze che intervengono nell'analisi della struttura ergodica delle catene con vincoli completi lineari alternativi. Si studia poi un sistema circolare di urne, equivalenti con una catena con vincoli completi, mettendosi in evidenza un nuovo aspetto della legge dei grandi numeri. Infine, utilizzando il metodo della funzione caratteristica, si considerano condizioni di normalità asintotica (O. ONICESCU, G. MIHOC (1940); M. IOSIFESCU (1960)).

Il terzo capitolo « Catene con vincoli completi nel senso esteso » presenta in primo luogo l'estensione data la prima volta dai W. DOEBLIN e R. FORTET (1937) e poi dai C. T. IONESCU TULCEA e G. MARINESCU (1948) al concetto di catena con vincoli completi: in realtà, la relazione funzionale della probabilità totale è conservata generalizzandosi il termine funzionale quale si trova in relazione funzionale con l'aiuto della nozione di cammino. Tenendosi poi conto del fatto che lo studio d'una catena con vincoli completi arbitraria è difficile, si mette in evidenza le catene del tipo (A), (B) introdotte da W. DOEBLIN e R. FORTET (1937) e (G) (introdotte da G. CIUCU (1957)). Il capitolo si chiude con lo studio delle proprietà di T. E. HARRIS (1955) di esistenza e d'unicità.

Nello studio delle proprietà ergodiche, uno dei più fruttuosi metodi di esaminare, è il metodo operazionale. Nel quarto capitolo « Teoreme ergodice uniforme » si espongono i teoremi di C. T. IONESCU TULCEA e G. MARINESCU (1949) e i teoremi classici di K. YOSIDA e S. KAKUTANI (1941) per operatori limitati definiti su spazi BANACH con valori negli spazi BANACH. Si passa poi allo studio di qualche esempi di operatori di una classe speciale, quale contiene come casi particolari, gli operatori che intervengono nello studio delle catene con vincoli completi.

Sempre con l'aiuto del metodo operazionale, nel quinto capitolo « Catene del tipo (A) e (B) », è esaminato tanto il caso della probabilità di passaggio (C. T. IONESCU TULCEA e G. MARINESCU (1949)), quanto il caso della densità di passaggio (G. CIUCU (1951), (1954)). Si considera poi la catena del tipo (B) incontrata da W. DOEBLIN (1940) nello studio delle frazioni continue, si studia una classe di operatori che intervengono nella teoria delle catene con vincoli completi e si da un teorema di esistenza.

Lo studio delle catene con vincoli completi nel senso esteso finisce col capitolo VI « Leggi limite. La legge normale ». Dopo che si introducono i momenti asintotici di una catena del tipo (G) si danno alcune espressioni asintotiche, si dimostra un teorema limite centrale per questa classe di catene (G CIUCU (1957)) e un teorema analogo per un altra clsse di catene.

Altrimenti, altre varianti di teoremi limite centrale s'incontrano anche nel secondo e quarto capitolo

Nel capitolo VII intitolato « Processi con vincoli completi. Processi generalizzati » è abbordato il caso del parametro continuo, caso poco studiato finora. Per una molteplicità finità di stati si studiano prima le proprietà dei sistemi di equazioni differenzali di O. ONICESCU (1954), quali sostituiscono i sistemi ben noti di A. N. KOLMOGOROV per i processi MARKOV, dandosi un teorema di esistenza e unicità e la relazione funzionale verificata delle soluzioni corrispondenti. Si passa poi ad un sistema integro-differenziale quale caratterizza un processo con una molteplicità arbitraria di stati e ad alcune proprietà ergodiche per processi del tipo (B') (R. THEODORESCU (1958)). L'ultima parte del capitolo contiene un'esposizione succinta sopra le estensioni delle nozioni di processo aleatorio e si considera l'analogo della catena con vincoli completi per processi generalizzati, così com'è stato considerato da G. MARINESCU (1960).

Uno dei più interessanti capitoli per il contenuto e la sua novità è il capitolo VIII « Le catene con vincoli completi e alcuni schemi matematici della teoria del studiare ». Negli ultimi anni è apparsa una ricca letteratura nella teoria del studiare, benchè, non si è osservato il fatto che in questa teoria un ruolo essenziale ha la catena associata ad una catena con vincoli completi, sotto la forma nella quale è stata considerata da O. ONICESCU e G. MIHOC, nel 1936. Il capitolo costituisce il primo materiale sopra la teoria del studiare nella lingua romena e ha il merito di aver messo in evidenza chiara la correlazione tra la teoria delle catene con vincoli completi e la teoria del studiare. Nel capitolo sono esposti i principi fondamentali della teoria e gli operatori corrispondenti degli avvenimenti controllati dall'esperimentatore, dal soggetto e dall'esperimentatore e dal soggetto, seguendo gli iniziatori di questa teoria R. R. BUSH e F. MOSTELLER (1955). Si mostra così che tutti i modelli ricordati, possono essere dedotti d'uno schema generale il quale fa intervenire la nozione di catena con vincoli completi (R. THEODORESCU (1960)). Il capitolo finisce con alcuni teoremi ergodici per i modelli con punti assorbenti, dove i risultati di M. KENNEDY (1957) e S. KARLIN (1953) hanno un ruolo centrale.

La monografia si chiude con un'appendice, consacrata ad uno studio analitico diretto dei processi di MARKOV multipli con l'aiuto delle equazioni integro-differenziali (R. THEODORESCU (1955), (1960)).

La monografia contiene altresì una ricca e completa bibliografia.

Scritta in uno stile sobrio e conciso, con dimostrazioni complete e rigorose, la presente monografia riempie un vuoto risentito da molto tempo nella letteratura di specialità.

G. G. VRANCEANU

GIUSEPPE PEANO, *Opere scelte*, vol. III, Ed. Cremonese, Roma, 1959, pp. VII + 470, L. 5000.

I lavori contenuti in questo volume sono distribuiti nelle tre Sezioni: a) *Geometria e fondamenti*; b) *Meccanica razionale*; c) *Varie*. Essi sono numerati con riferimento all'indice cronologico di tutte le pubblicazioni scientifiche dell'Autore (v. vol. I, pp. 11-21), e quasi sempre preceduti (talvolta anche accompagnati) da brevissime note esplicative e bibliografiche del prof. UGO CASSINA.

a) *Geometria e fondamenti* (1). I primi tre lavori riguardano la teoria

(1) La numerazione qui adottata è quella propria della Sezione in esame. L'elenco dei titoli di tutti i lavori pubblicati nelle « *Opere Scelte* », che molto opportunamente chiude questo volume (pp. 463-467), facilita la coordinazione del volume stesso ai due precedenti, per la quale giova consultare la breve prefazione del CASSINA (pp. V-VII).

delle forme algebriche. Il 1° è di contenuto esclusivamente algebrico e dimostra un teorema fondamentale sulle forme multiple affermando semplicemente, nel caso particolare delle forme binarie doppie, essere finito il numero delle formazioni invariantive fondamentali relative ad un sistema di quante si vogliono di tali forme (cioè formazioni in funzione razionale intera delle quali sia possibile esprimere ogni altra formazione invariantiva). Il 2° lavoro prende in esame una generica forma binaria doppia

$$f = \sum_{i,j} \frac{m!}{(m-i)!\,i!} \, \frac{\mu!}{(\mu-j)!\,j!} \, a_{ij} x_1^{m-i} x_2^{i} \xi_1^{\mu-j} \xi_2^{j},$$

interpretando le variabili $(x_1 x_2)$, $(\xi_1 \xi_2)$ come coordinate di due forme geometriche di prima specie. La corrispondenza fra tali forme, individuata dall'equazione $f = 0$, è indicata col simbolo (m, μ), e si suppone che le due coppie di variabili vengano assogettate a trasformazioni lineari indipendenti fra loro.

A. Clebsch, A. Capelli ed E. D'Ovidio avevano già studiato profondamente le corrispondenze (1, 1), (2, 1), (2, 2), determinandone alcune delle formazioni invariantive fondamentali, ma non erano ancora giunti neppure a dimostrare che il numero totale di siffatte formazioni è finito. Il Peano, forte del teorema fondamentale dimostrato nel lavoro precedente, calcola effettivamente il sistema di tutte le formazioni invariantive fondamentali relative ad una o più corrispondenze (1, 1), o relative ad una (2, 1), o infine ad una (2, 2). Questo lavoro è splendido, per la grande eleganza e novità del procedimento costruttivo escogitato, in mezzo a difficoltà algebriche veramente ardue.

Il 3° lavoro tratta dei sistemi di forme binarie d'ugual grado dimostrando, in stretta relazione coi precedenti due lavori, alcune notevoli proprietà del sistema completo delle rispettive formazioni invariantive, e facendone applicazione ai sistemi di quante si vogliono cubiche.

Il 5° lavoro è un'esposizione didattica degli *Elementi di Calcolo geometrico* secondo i principi dell'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann, limitatamente alle cosiddette formazioni geometriche di 1° grado, o somme di punti. Sono del più grande interesse storico le prime sette pagine di questo lavoro (che, divenuto ben presto famoso, venne tradotto in tedesco), come premessa alla teoria dei vettori, tale teoria venendo poi ampiamente svolta nelle altre venti pagine del lavoro stesso, e nei lavori 6° (Alcuni teoremi sulle curve reali, estratto dalle Lezioni di analisi infinitesimale del 1893), 10° (Trasformazioni lineari dei vettori di un piano), 12° (Analisi della teoria dei vettori) e 13° (Complementi alla teoria dei vettori, estratto dal vol. V del Formulario, 1908).

L'11° lavoro è un'esposizione, più succinta e più completa del 5° (ma dichiaratamente non con finalità didattiche), dei suddetti elementi di calcolo geometrico: vi sono infatti trattate, in modo unitario, le forme geometriche di tutti i gradi 1°, 2°, 3° e 4°. Il 4° lavoro è un elenco di enunciati di teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superfici, le cui dimostrazioni sono proposte al lettore come semplici esercizi di applicazione del detto calcolo geometrico: alcuni di questi teoremi sono attribuiti a celebri autori, altri sono effettivamente nuovi ed appariscono molto originali ed interessanti.

Il giudizio dei più eminenti specialisti sull'argomento è concorde nel riconoscere i grandi progressi che il Peano segnò sull'opera del Grassmann, sia per aver eliminata da questa tutta la « malsicura astrattezza » (2) e la

(2) L'espressione è di B. Levi, secondo il quale « il tratto caratteristico del genio del Peano fu la spontanea ed immediata profondità nell'analisi delle idee, che a Lui si presentavano ridotte spesso ad una schematica semplicità, ed in questa forma soltanto erano da Lui apprezzate » (*In memoria di* G. Peano, Cuneo, presso il Liceo Scientifico Statale, 1955, p. 11).

non chiara forma filosofica, sia per averne tratto lo spunto per nuovi geniali e precorritori concetti (3), sia infine per aver dato nuovo, grande impulso al calcolo vettoriale (4).

A proposito del calcolo vettoriale, è molto interessante seguire, attraverso i citati lavori, come maturi progressivamente, nel pensiero del PEANO, il concetto di vettore. Ovunque si trova la definizione di vettore come *differenza di due punti*, ma ciò non è esente da equivoci. Nel 5° lavoro il significato d'una tal differenza è spiegato con la precedente teoria generale delle forme geometriche di prima specie, ma noi riteniamo che tale significato non venga ivi a distinguersi, in sostanza, da quello ch'è stato poi chiamato, dagli allievi del PEANO, « *vettore applicato* » oppure « *segmento orientato* ». Nel 12° lavoro è fatto un tentativo per eliminare questo primo equivoco. Infatti si dà ivi dapprima il significato d'una scrittura del tipo:

$$a-b=c-d$$

(che noi chiamiamo: equipollenza fra due vettori applicati) nella quale le lettere a, b, c, d indicano punti e, con l'introduzione di opportuni postulati, se ne stabiliscono le proprietà fondamentali. Fra queste proprietà si trova quella che, qualunque siano i punti a, b, c, ..., si ha sempre:

$$a-a=b-b=c-c=\dots,$$

dopodichè l'Autore dice semplicemente: « il valore costante $a-a$ s'indicherà, come in algebra, col segno 0 » (questa definizione è, subito dopo, espressa anche coi simboli della logica), e poi definisce la *coincidenza di posizione* di due punti a, b, con la formula:

$$a-c=b-c\cdot\supset\cdot a=b$$

(cioè: a e b coincidono, se esiste un punto c tale che $a-c=b-c$). Questa ultima definizione viene aggiunta dall'Autore nelle successive edizioni del Formulario, ove si trova anche dimostrato (subito dopo) che condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $a=b$, è che sia $a-b=0$. Ciò permette all'Autore di proseguire senza intoppi nella teoria dei vettori. Ma si può osservare (5) che le parole « *il valore costante di* », sopra richiamate nella definizione del segno o simbolo 0, non possono significare altro che: « l'astratto di tutte le infinite scritture », epperò, mentre un vettore non nullo continua ad essere una differenza di punti, tale non è il vettore nullo 0 (6).

---

(3) Cfr. G. ASCOLI, loc. cit. alla nota (2), pp. 26-27. In realtà tali concetti, come ben osserva l'ASCOLI, si trovano profusi, più ancora che nelle pubblicazioni sul calcolo geometrico del GRASSMANN, nelle successive edizioni del Formulario e nell'ampio trattato del 1887 sulle *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Dispiace che di tale trattato abbia potuto trovar posto qui, nella forma autentica, soltanto qualche breve frammento).

(4) Cfr. T. BOGGIO, loc. cit. alla nota (2), pp. 65-69. Inoltre: Jahrbuch Fortsch. Mathem. XX, 1888, pp. 689-692.

(5) Il Dr. GIOVANNI FERRERO, in occasione del mio corso di Matematiche Complementari del 1959-60, ha attirato la mia attenzione sull'interessante questione.

(6) Definire la coincidenza di posizione di due punti a, b non significa altro (se non si vuol far questione di parole) che definire l'*identità* dei due punti a, b. Dunque il PEANO intende dare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due lettere a, b rappresentino *uno stesso punto*: questione puramente nominalistica che, come tale, ci sembra pertinente non già di una teoria matematica, ma del metodo di formalizzazione che si decide d'adot-

I lavori 7°, 14°, 15°, 16° sono dedicati ai fondamenti dell'aritmetica. Essi fano seguito agli *Arithmetices principia* già pubblicati nel vol. II di queste *Opere scelte,* insieme ai quali costituiscono una raccolta preziosa per seguire il non facile cammino che il PEANO dovette percorrere per arrivare all'enunciazione, in veste definitiva, dei Suoi famosi postulati sui numeri interi assoluti. Nel 7° lavoro, la classe dei numeri considerata nei relativi postulati, non contiene lo 0; nei rimanenti lavori viene aggiunto, alla detta classe, lo 0 come primo numero, ottenendosi così semplificazioni notevoli per i successivi sviluppi (definizione degli interi negativi, dei numeri fratti ecc.).

---

tare per la medesima. Infatti non si può sfuggire al dilemma: o le lettere *a, b* non sono che simboli atti a richiamare al nostro pensiero enti ben determinati (i punti), ed allora dev'essere inerente a questo richiamo la possibilità di riconoscere direttamente ed immediatamente se tali enti sono fra loro distinti o no (significato « contenutistico » dei simboli); oppure le lettere *a, b* sono puri segni sui quali si opera con regole formali opportunamente convenute, ed allora non ha senso prescrivere delle *regole geometriche* che permettano di riconoscere se tali segni indicano uno stesso ente o no (significato « formalistico » dei simboli).

Non ci sembra che il PEANO abbia avuto del tutto chiara la distinzione fra questi due significati. Nasce questo sospetto dall'inesatta interpretazione che Egli diede del principio d'identità (Cfr. vol. II, p. 417), che credette di riconoscere già in un passo della *Topica* d'ARISTOTELE, ove si chiamano ταὐτά le cose tali che tutto quel che si afferma dell'una, deve potersi affermare anche dell'altra («ὅσα γὰρ θατέρου κατηγορεῖται, καὶ θατέρου κατηγορεῖσθαι δεῖ»). Il PEANO traduce ταὐτά per: *identiche* o *uguali.* Il significato esatto è « *uguali* », e la formulazione a cui il PEANO ritiene di poter ridurre la definizione d'ARISTOTELE, cioè:

$$x = y \cdot = \colon a \, \varepsilon \, \mathrm{Cls} \cdot \supset_a \cdot \, y \, \varepsilon \, a,$$

è accettabile solo con la riserva: « qualunque sia la classe *a contenuta in un ben determinato ambiente preconvenuto* » (v. anche vol. II, p. 421).

Perciò l'applicazione del principio d'identità che il PEANO fece pretendendo di caratterizzare la formula $a = b$ (identità di due punti), è a nostro parere illusoria. È anche da osservare che, in ultima analisi, come viene affermato altrove (p. 47, n 21), l'uguaglianza (o pretesa identità) di due vettori *a-b, c-d* consiste nella proprietà che i punti medi dei due segmenti *ad, bc* coincidano (Dunque, secondo il PEANO, per constatare che due punti *a, b* coincidono, si dovrebbe fare un'opportuna costruzione atta a constatare che certi altri due punti coincidono, il che ci sembra un po' strano!).

Analogamente ci sembra illusoria l'applicazione fatta per definire l'identità di due numeri naturali (v. vol. II, p. 34). Ma i quattro postulati relativi che il PEANO dapprima enunciò, furono poi soppressi, talchè rimasero i cinque ben noti postulati sufficienti a definire implicitamente i numeri naturali.

Invece l'applicazione che il PEANO credette di poter fare del principio d'identità per definire un vettore, è a nostro parere erronea. Infatti scrivendo, per quattro punti *a, b, c, d,* che $a - b = c - d$, non si scrive un'identità ma una semplice uguaglianza (perchè, essendo le due coppie *ab, cd* distinte, « non tutto quello che si afferma della coppia *ab,* può affermarsi anche dell'altra, nè viceversa »).

Il principio d'identità non si trova in ARISTOTELE e neppure in S. TOMMASO D'AQUINO (il quale non fa che ripetere letteralmente ARISTOTELE), bensì, per la prima volta, in CH. VON WOLFF (1679-1754) (v. il *Dizionario di filosofia* di N. ABBAGNANO, Torino 1961, p. 446).

È inoltre da osservare che in nessuno di questi lavori compare ancora il postulato: « i numeri (interi assoluti) formano una classe » (7).

L'8° lavoro porta il titolo: *Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti.* Ad esso il CASSINA non fa precedere alcun commento, ma il nostro parere è che, trattandosi di un lavoro errato (cosa questa che non può sfuggire ad un'analisi un po' accurata del medesimo, a seguito delle molte ricerche che furono fatte in argomento dopo l'anno di pubblicazione 1892), sarebbe stato opportuno renderne avvertito il lettore (8).

I lavori 9° e 17° sono dedicati ai fondamenti della geometria. Il primo di essi è una rielaborazione e riduzione, con aggiunte varie, d'un opuscolo (*I principi di geometria logicamente esposti*, 1889) già ripubblicato nel vol. II di queste *Opere scelte*. Come in quell'opuscolo, qui la Geometria di *posizione* (di cui la geometria proiettiva è caso particolare) viene fondata sulle idee primitive di *punto* e di *segmento* e su un elenco di 17 postulati relativi. Si trova poi, completamento molto importante, una trattazione dei fondamenti della geometria metrica: a tale scopo viene aggiunta l'idea primitiva di *moto*, con un elenco di 8 postulati relativi. L'Autore avverte che la prima parte di questo lavoro è molto vicina alle ricerche di M. PASCH (9) e si diffonde in osservazioni critiche interessanti soprattutto dal punto di vista storico (10).

---

(7) Questo postulato compare, per la prima volta, nella terza edizione del Formulario (1901), come primo della serie. V. anche la nota preced.

(8) L'errore consiste essenzialmente in una petizione di principio, che affiora nella conclusione del lavoro (p. 114, rr. -5 a -4). Si noti che sia G. VERONESE (*Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale*, Circolo Mat. Palermo, VI, 1892, pp. 73-76), sia G. VIVANTI (Jahrbuch Fortsch. Mathem. XXIV, 1892, pp. 68-69) credettero invece d'individuare l'errore essenzialmente in una scorretta applicazione della teoria dei numeri transfiniti del CANTOR (v. il n. 11, nonchè le formule e gli enunciati del n. 12), ed in ciò sbagliarono. Ma perchè scomodare i transfiniti del CANTOR, per un ragionamento tanto semplice quanto quello del PEANO? La verità è che soprattutto il PEANO, ma anche il VERONESE ed il VIVANTI, ragionavano sotto la forte suggestione della recente grande scoperta del CANTOR. Tuttavia il VERONESE, nei Suoi *Fondamenti di Geometria* (Padova 1891), aveva già dato un primo esempio di geometria lineare non archimedea, ed è perciò veramente singolare che il PEANO (il quale, in questo Suo lavoro, non cita nè il VERONESE, nè persino il postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE!) si sia attardato a voler precisare ciò che precisabile evidentemente non era (la presunta dimostrazione del CANTOR). Questo problema storico-critico, molto interessante, verrà studiato in una nota di prossima pubblicazione, dal Dr. F. PREVIALE.

Noi non siamo, per principio, contrari a che si rendano noti gli errori dei grandi uomini (v. più innanzi la nota (19)), purchè tali errori siano messi nella loro giusta evidenza.

(9) *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Lipsia, 1882).

(10) Una delle più interessanti ci sembra questa: « È chiaro che le idee primitive si debbano ridurre al minimo numero; e che per idee primitive si debbano assumere idee semplicissime, e *comuni a tutti gli uomini*; esse debbono avere il loro nome in tutte le lingue. Chi incomincia lo studio della geometria *deve già possedere queste idee primitive*; non è punto necessario che conosca le idee derivate, che saranno definite man mano si progredirà nello studio » (p. 116; le sottolineature sono nostre). L'Autore è ormai lontano da EUCLIDE (« Considereremo come termini geometrici tutti i termini che compaiono in un libro di geometria, e che non appartengono alla logica generale. E il primo lavoro a farsi si è la distinzione di questi termini, o delle idee che essi rappresentano, in idee *primitive*, che non si definiscono,

Il lavoro 18° porta il titolo: *Sui fondamenti dell'Analisi*, ma in realtà esso contiene invece l'enunciazione e l'illustrazione d'alcune idee sull'insegnamento elementare della matematica. Dal contesto si rileva trattarsi d'una conferenza tenuta dall'Autore alla Società Nazionale *Mathesis*. L'enunciazione è fatta in tono molto bonario, qua e là forse troppo paradossale e semplicistico, oseremmo dire un po' superficiale (11).

b) *Meccanica razionale*. Dei sette lavori di questa sezione, tutti, tranne il 1° ed il 6°, sono dedicati allo studio del moto dei sistemi nei quali sussistono moti interni variabili. Tali lavori, degli anni 1895-96, ebbero origine da un celebre esperimento, detto del gatto, eseguito all'Accademia di Parigi dal fisiologo MURLEY. L'esperimento aveva dato luogo ad un'accesa discussione fra alcuni celebri specialisti di meccanica razionale (fra i quali l'APPELL e il LECORNU) e ad alcuni lavori di V. VOLTERRA, nei quali veniva felicemente stabilito un parallelismo fra il fenomeno di caduta del gatto e quello dello spostamento dell'asse di rotazione terrestre per effetto delle correnti marine, dei venti e dei movimenti tellurici. Il PEANO, nei cinque lavori citati, tratta ampiamente la questione, sia dal punto di vista teorico (applicando il calcolo geometrico del GRASSMANN), sia nelle sue applicazioni al fenomeno di caduta del gatto e a quello dello spostamento dell'asse terrestre. Il lettore che s'interessa all'argomento, può utilmente mettere a confronto la trattazione del PEANO con quella del VOLTERRA, riportata integralmente nelle « *Opere matematiche* » di questo (12).

Il 1° lavoro è una brevissima nota che ne completa un'altra pubblicata da E. CARVALLO sotto lo stesso titolo (*Sur les forces centrales*). Il 6° è uno studio sul pendolo di lunghezza variabile e si riallaccia ad altro pubblicato dal LECORNU sullo stesso argomento.

c) *Varie*. Questa sezione è contenuta in quasi 150 pagine ed è una raccolta di 28 pubblicazioni, estendentesi dal 1889 al 1928. A nostro avviso, essa presenta un eccezionale valore biografico, forse anche superiore all'interesse degli argomenti trattati: quattro recensioni, una necrologia (di ANGELO GENOCCHI, Maestro amato e venerato dell'Autore), uno studio storico su GIOV. FRANCESCO PEVERONE *e altri matematici piemontesi ai tempi di* EMANUELE FILIBERTO, osservazioni critiche su alcuni trattati d'Analisi, alcune note dedicate alla traduzione, o riduzione, dei libri V, VII, VIII, IX e X degli *Elementi* d'EUCLIDE in formule (facendo uso dei simboli del Formulario), alcune pubblicazioni d'argomenti didattici e molte altre d'indirizzo critico o storico su questioni di matematiche elementari (Area del rettangolo, Operazioni sulle grandezze, Definizione dei numeri immaginari, ecc.) o su questioni che bisognerebbe chiamare filosofiche piuttosto che matematiche (Sul principio di permanenza, Sull'importanza dei simboli in matematica). Diciamo così, perchè mai l'Autore arriva a formulare vere e proprie idee di carattere filosofico, ma implicazioni filosofiche, d'interpretazione spesso oscillante anche per il lettore più esperto (13), sono frequenti. Si trovano trattati, in questa sezione, anche argomenti che, rispetto al periodo in cui l'Autore li studiò, cioè il periodo storico che vide il sorgere delle nuove

---

e in idee *derivate*, che si definiscono », Ibid.), ma molto vicino all'HILBERT (si veda la discussione fatta sull'indipendenza dei postulati, mediante opportuni esempi che alterano il significato intuitivo delle idee primitive, pp. 126-129).

(11) Notiamo, a questo proposito, per es. i due passi seguenti: « Un libro qualunque, anche il più spropositato, si può rendere rigoroso, cancellandovi quanto vi è di falso, e ciò che rimane è la parte utile di quel libro » (p. 276); « I simboli sono tutto ciò che si possa immaginare di più rigoroso ad un tempo, e di più semplice chiaro e facile per gli alunni » (p. 278).

(12) Vol. II (Roma, 1956), pp. 87-215 (v. in particolare alle pp. 170 e 213).

(13) Cfr. L. GEYMONAT in loc. cit. alla nota (2), pp. 51-63.

grandi correnti della analisi moderna (l'integrale di LEBESGUE, le equazioni integrali ed integro-differenziali, i metodi diretti nel calcolo delle variazioni, gli studi sulle equazioni alle derivate parziali dei vari tipi, l'analisi funzionale ecc.), appariscono come del tutto marginali: La numerazione binaria applicata alla stenografia, I calcoli sul calendario, L'esecuzione tipografica delle formule matematiche, La teoria dei numeri.

Ognuna di queste brevi note è scritta con lo stile, inconfondibile per la semplicità, asciutta e quasi scarna, ma sempre originalissima, dell'Autore, qua e là infiorato d'osservazioni umoristiche che colgono paradossalmente certi aspetti della vita del matematico, ricercatore od insegnante. E noi, che abbiamo personalmente l'onore e l'onere d'aver raccolto, a molti anni di distanza, l'eredità della cattedra di matematiche complementari che l'Autore occupò sul finire della vita, ci siamo soffermati, in modo del tutto particolare, appunto sulle note dedicate ad argomenti didattici o pedagogici: non c'è pagina di quelle note che non contenga qualcosa di fortemente originale ed interessante, e frequenti sono gli spunti addirittura divertenti e spiritosi. Valga, per tutti il passo seguente che il CASSINA estrae dai *Giochi di aritmetica e problemi interessanti* (Torino, 1924) e rimanda come « Conclusione » alla fine del volume (p. 459): « La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un piu lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Nè vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sè e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo mal, pianga sè stesso. Così disse Giove, e lo riferisce OMERO, *Odissea* 1,34. Con questi principii, caro lettore e collega, vivrai felice ».

Passo veramente tipico della sensibilità pedagogica dell'Autore, cui un solo appunto può muoversi: quello d'essersi pronunciato spesso in modo troppo semplice e deciso, si direbbe ignorando situazioni umane, delicate e difficili, immerse nella penombra (14). Forse fu anche tale modo, oltre alla riluttanza dell'Autore a pronunciarsi in argomenti propriamente filosofici, che rese difficile o addirittura impossibile a quasi tutti i filosofi italiani del Suo tempo, di comprendere l'importanza della Sua opera non solo per l'avvenire della matematica, ma anche per quello della filosofia (15).

---

(14) Meditando sul passo citato, la nostra memoria ha spontaneamente richiamato esempi, tristi ma non rari, d'insegnati che operarono tutta la vita nel modo più umile e sempre amarono teneramente i propri alunni, e sempre lodarono la scienza che insegnarono, e infine sempre si sforzarono di rendere tale scienza gradita e bella, ma mai... riuscirono in quest'intento, nè raccolsero alcun frutto! In verità la pedagogia e la didattica sono arti e scienze assai complesse, e solo a spiriti di rarissima eccezione possono riuscire facili. Non possiamo fare a meno d'obiettare alla citata « Conclusione », che il problema non si risolve, in generale, per puro istinto e con l'applicazione di principi così semplici!

(15) Il caso del più grande di quei filosofi, il CROCE, è a tutti noto ed è stato studiato in lavori pregevoli (v. per es. F. BARONE in loc. cit. alla nota (2), pp. 41-50). Ma la diagnosi che ne fa il Prof. G. RICCI (Bollettino UMI, 1957, p. 107), ci lascia alquanto perplessi. Secondo il RICCI, « il CROCE non poteva intendere l'aspetto teorico della costruzione delle strutture formali che sono necessarie alla ricerca scientifica: il CROCE ed il PEANO si trovavano come collocati su piani diversi e l'espressione del CROCE non può ritenersi un giudizio ingiusto perchè è il discorso di uno che è « *sordo* » verso l'aspetto filosofico del problema scientifico: tale discorso è, peraltro, molto

Le note in esame attestano vieppiù della grande versatilità dell'Autore, secondo il quale « è bene non restringere lo studio alla sola matematica perchè tutta la scienza è bella se la si studia per sè stessa e non allo scopo di esami o di lucro » (p. VI). Ma tale versatilità, scrisse acutamente l'ASCOLI (16), « ha carattere ben diverso da quella di molti altri grandi spiriti matematici — un BELTRAMI, un BRIOSCHI, un PAINLEVÈ — che cercarono nelle arti, nei compiti organizzativi, nella politica, più che una distrazione. un completamento della loro vita spirituale: in PEANO agiscono in ogni campo, ci sembra, motivi analoghi, ed elementari, sicchè tutta la sua attività appare illuminata da un'unica forma mentale, guidata da pochi e semplici fili conduttori ... . Dotato per la ricerca matematica in modo eminente, si direbbe che egli ne subisse il fascino con riluttanza, sospinto da altre aspirazioni, più vaste, più universali ... . Matematico d'insuperata eleganza, egli rinnega nella matematica ogni motivo di pura bellezza creativa per correr dietro, umilmente, al mito di una immediata utilità umana. Non fu facile a tutti comprenderlo; ma come ogni natura istintiva e sincera, ebbe ammiratori entusiasti e detrattori tenaci ». Le note raccolte nella terza sezione, che risultano tutte pubblicate quando l'Autore sembrò a molti aver ormai percorso la grande parabola creativa sella Sua vita, rispecchiano appunto chiaramente e fedelmente il carattere distaccato, quasi assente, che Lo portò sempre più, negli ultimi trent'anni, ad intraprendere certe ricerche frammentarie, accuratissime e spesso singolarmente arricchite da una grande cultura storica e filologica, ma che spesso si ridussero ad eleganti ed interessanti esercitazioni (17). Esse rispecchiano anche il carattere che l'Autore diede ai Suoi corsi di matematiche complementari. In questo senso il loro interesse è sommo: segnaliamo per es. le note, già citate, in cui sono ridotti in formule alcuni libri degli *Elementi* d'EUCLIDE, note che oggi e sempre potrebbero utilmente entrare in qualunque corso di matematiche complementari o di storia della matematica.

Qui sorge spontanea la domanda quale sia il significato e il valore della cultura storica e filologica che l'Autore riversò con tanta dovizia nei Suoi scritti. Per quanto Egli non si sia mai espresso esplicitamente in proposito, noi riteniamo di poter affermare che Egli non fu uno *storicista* nel senso che oggi, nei vari indirizzi filosofici, viene attribuito a questo termine. Se, come rileva giustamente il CARRUCCIO (18), « il PEANO desiderò l'insegnamento della matematica condotto secondo il metodo storico, d'accordo su questo punto con F. ENRIQUES », ci sembra che Egli concepì la storia della matematica in un senso profondamente diverso dal Suo grande collega. Lo storicismo dell'ENRIQUES è diretto ad una valutazione positiva (ma sempre controllata e funzionale) del travaglio storico attraverso le progressive

---

interessante perchè consente, a sua volta, di formarci un'opinione sulla filosofia che è fiorita con la scuola del CROCE ». In verità bisogna confessare che non doveva esser facile, a quel tempo, accorgersi dell'importanza filosofica dell'opera del PEANO, oggi riconosciuto quale precursore del neopositivismo, se essa sfuggì persino a matematici della statura d'un ENRIQUES, che pure fu avversario accanito, in campo filosofico, del CROCE, e d'un SEVERI, che pure fu tra i collaboratori dello stesso Formulario.

(16) Loc. cit. alla nota (2), pp. 23, 29.

(17) Ciò non può invocarsi a conferma d'una presunta involuzione senile: può essere invece il segno rivelatore d'uno sforzo immane ch'Egli avrebbe compiuto per affrontare nuovi problemi, al Suo tempo, e forse oggi ancora, lontani da maturazione. Alludiamo ai problemi riguardanti non più soltanto la logica matematica, ma il linguaggio in generale (Cfr. L. GEYMONAT nel Bollettino U.M.I., 1959, a fine p. 110).

(18) Loc. cit. alla nota (2), p. 114.

vicende che conducono all'acquisizione finale e definitiva della verità (19). Per il PEANO, invece, l'errore non sembra, per lo più, meritar citazione, e il progresso della matematica consiste, sempre e soltanto, nell'« aggiungere nuove verità alle antiche ». E come si aggiungono tali verità? « C'è il periodo di ricerca che precede l'istante della *scoperta* », risponde il PEANO poichè, secondo Lui, « un teorema è scoperto, quando è dimostrato » (20). Un tale atteggiamento, a nostro parere, sminuisce alquanto la visione storica del PEANO e l'allontana dalle correnti contemporanee, più aperte, più comprensive, più ricche di contenuto umanistico (21).

Ciò che avvicina il PEANO all'ENRIQUES, a nostro avviso, è la chiara, cristallina coscienza del valore universale ed eterno della verità matematica. Nessuno ebbe più profonda e ferma di Lui tale convinzione. Lo attesta la risposta ch'Egli diede all'obiezione dell'HOBBES: « Se le definizioni sono arbitrarie, tutta la matematica, che si basa sulle definizioni, è una scienza arbitraria ». La risposta del PEANO è: « Supposte le definizioni arbitrarie, risulta solo arbitraria la forma della matematica, non il contenuto dei teoremi » (23). Lo attesta l'appassionata ed eruditissima ricerca ch'Egli fece

---

(19) « L'errore è, sulla via della verità, l'aspetto negativo del precorrimento di essa coll'intuizione, e così essenzialmente parte di ogni più elevata conquista scientifica » (F. ENRIQUES, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Bologna 1938, p. 183).

(20) Loc. cit. alla nota (2), pp. 6-7.

(21) La storia è ricca di teoremi previsti, addirittura divinati, e perciò, a nostro parere, « scoperti » prima d'esser stati dimostrati (si pensi, per es., ai molti che, in tal senso, furono *scoperti* dal GAUSS). E, quanto all'importanza dell'errore (non solo dal punto di vista euristico), basta ricordare alcuni esempi insigni (per es. la pubblicazione da parte del KEPLERO delle vastissime ed infruttuose ricerche sulla legge matematica della rifrazione della luce (22) che potrebbero essere valutate utili ed interessanti da un ENRIQUES, inutili e d'interesse nullo da un PEANO).

(22) In *Astronomiae pars optica* (Cap. IV: *De refractionum mensura*). Cfr. T. VIOLA nel Periodo di Matematiche, 1946, pp. 68-83.

(23) Vol. II, p. 435. L'obiezione dell'HOBBES è riportata a seguito di altre due celebri affermazioni, l'una di PASCAL: « Les définitions sont très libres, et elles ne sont iamais sujettes à être contredites, car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée, un nom tel qu'on voudra »; l'altra di LEIBNIZ (completamento e limitazione della precedente): « Definitiones per se quidem sunt arbitrariae, usui tamen et communi sociorum consensu probari debent ».

Abbiamo lungamente riflettuto agl'interrogativi che il GEYMONAT (Loc. cit. alla nota (2), pp. 61-63) formula sul passo del PEANO, da ultimo citato. Certo l'interpretazione di questo passo non può essere data con sicurezza, ma un'analisi accurata di tutti i passi connessi c'incoraggia a proporre l'interpretazione seguente, che ci sembra la più semplice e spontanea: un sistema ipotetico-deduttivo cambia *solo di forma*, se tutte le proposizioni che lo compongono vengono ordinate altrimenti, in modo cioè che alcune di esse che originariamente erano assunte come postulati divengano dei teoremi, mentre altre che originariamente erano dei teoremi divengano dei postulati. Con ciò intendiamo che il nuovo ordinamento venga eseguito in modo coerente e completo. PEANO vuol dire, per es., che l'aritmetica potrebbe essere edificata in altro modo, cioè a partire da un sistema di postulati diversi dai Suoi cinque celebri, e ciò secondo i gusti o i criteri di semplicità degli autori (« A queste domande si possono dare dai vari autori differenti risposte, potendosi diversamente intendere la semplicità », p. 98), o appunto secondo la norma sopra riportata dal LEIBNIZ: ma con ciò l'aritmetica cambierebbe *solo di forma, non di contenuto*. In senso più restrittivo, data poi una qualunque definizione esplicita, ogni condizione necessaria nelle questioni di priorità (il *Formulario* n'è pieno), avendo per scopo principale, come molto giustamente afferma G. Vailati [24], di « distruggere una quantità di pregiudizi riferentisi a supposti contrasti tra le teorie oggi correnti e le vedute dei grandi scienziati o pensatori dell'antichità, ponendo in luce come molte, e non le meno importanti tra le scoperte dei matematici moderni, non siano consistite in altro che nell'introduzione di nuovi modi più semplici, più comodi, più perfetti per esprimere rapporti, o denotare procedimenti, già adoperati o considerati sotto altri nomi, o anche senza nomi, dai loro predecessori ». Visione della storia, codesta, che fu portata all'estremo, forse proprio perchè escludente ogni elemento artistico ed ispirata al « mito di una immediata utilità umana » di cui parla l'Ascoli (v. sopra).

Lo attesta il rispetto e la venerazione somma in cui Egli tenne gli *Elementi* d'Euclide: « L'opera di Euclide sfida i secoli. Invano il grande Legendre tentò, or è un secolo, una geometria superiore all'Euclide; invano negli ultimi cinquant'anni si introdussero nei trattati di geometria delle teorie di Kant [25] sugli spazi; il libro di Euclide apparve sempre superiore a tutti. Del resto, in greco, definizione è indicato per ὁρισμός, e così dice sempre Aristotele. Invece le proposizioni di Euclide, criticate quali definizioni, portano il titolo ὅροι e ὅρος significa « *termine* ». Quindi quelle pagine sono una raccolta di termini, come un dizionario, e le proposizioni relative non sono definizioni, nè postulati, nè teoremi; sono schiarimenti; la versione di ὅρος per « *definizione* » può essere impropria » (p. 277) [26].

---

e sufficiente affinchè un'entità matematica soddisfi a quella condizione, può esser sostituita nella definizione stessa. Richiamiamo anche il passo: « Spesso si dice che esistono più teorie degli irrazionali, o più modi d'introdurli. Analizzando i varii modi proposti, ed esprimendoli in simboli di Logica-Matematica (com'è fatto alle pp. 249-267), in modo che ogni idea risulti espressa da un sol simbolo, indipendente dalle varie forme di linguaggio, risulta che questi modi coincidono fra loro. La loro differenza è solo linguistica » (pp. 379-380).

Analogamente a proposito della geometria euclidea (Si pensi ai *cambiamenti di forma* che a tale geometria, supposta trattata secondo il sistema ipotetico-deduttivo dell'Hilbert, si possono immaginar conferiti dal Pieri [per es. a partire da due sole idee primitive: *punto*, e *distanza* di due punti], dal Pasch, dallo stesso Peano, dal Veblen, dal Kerékjarto e da molti altri).

[24] *Scritti* (Lipsia e Firenze, 1911), p. 691 (Cfr. anche ivi p. 764).

[25] Peano non dice nè quali teorie di Kant vennero introdotte, nè in che modo, ma è da presumere ch'Egli volesse alludere a un Kant travisato. Infatti, com'è ben noto, per Kant la geometria euclidea ha un valore assoluto ed universale non meno che per Newton: per l'uno sul piano metafisico, per l'altro sul piano gnoseologico. Ma è anche noto che, a seguito delle successive ricerche sui fondamenti della geometria, i kantiani cercarono di trasferire ad un livello di maggiore generalità (sostituendo per es. la topologia alla geometria euclidea) la concezione del loro sommo Maestro, e che se ciò fecero talvolta con grande arte e tenendosi vicini al Maestro, più spesso lo fecero invece tradendo le idee del medesimo. Detto ciò, desideriamo dichiarare esplicitamente, a scanso d'equivoci, che non siamo neppur noi favorevoli a che s'introducano, *nei trattati di geometria*, concetti filosofici, siano anche dello stesso Kant!

[26] Queste righe furono scritte nel 1910, e non è neppur pensabile che l'Autore non si sia ricordato della teoria della relatività! Che significa « il libro d'Euclide apparve sempre superiore a tutti »? A nostro parere, non può significare che questo: l'edificazione d'un sistema ipotetico-deduttivo, a parte le questioni di forma (nel senso spiegato alla nota (23)), non è arbitraria. Perchè? Non ci risulta che il Peano si sia mai pronunciato in merito, ma abbiamo la certezza che Egli fu agli antipodi del Russell, per

Altrove (a piena conferma del rilievo del VAILATI, sopra riportato) Egli così delinea, parlando di EUCLIDE, il significato del « *progresso* » nella matematica: « Conviene porre tra le mani EUCLIDE autentico nell'originale greco, accompagnando ogni proposizione della sua versione completa nel linguaggio matematico; e risulta evidente il suo perfezionamento in 2000 anni, e l'enorme semplificazione apportata dall'uso dei simboli » (p. 379) (27). Ed ancora: « Il calcolo geometrico, come ogni altro metodo, non è già un sistema di convenzioni, ma un sistema di verità. Così il metodo degli indivisibili (CAVALIERI), degli infinitesimi (LEIBNIZ), delle flussioni (NEWTON) sono la stessa scienza, più o meno perfetta, ed esposta sotto forme diverse » (p. 168).

Lo attesta infine la Sua convinzione nell'immutabilità, e quindi nell'universalità della logica: « Per riconoscere se una teoria sia esatta, occorre la logica naturale » (p. 278) (28).

Abbiamo tentato di ricostruire, in vari punti in cui il Nostro non si espresse esaurientemente, le Sue idee sulla matematica e sulla storia della matematica, idee che lo avvicinano ad altri grandi matematici di tutti i tempi e di tutti i luoghi (29) e che fanno da sfondo al Suo originalissimo genio creativo. E ci siamo permessi, pur nella nostra grandissima ammirazione, di dissentire da Lui sotto alcuni aspetti. Talchè ci piace terminare con le nobili parole dell'ASCOLI (30): « È vano, come fa il RUSSELL, lamentare che Egli non fosse abbastanza filosofo, o, come molti altri, che Egli abbia tradito la Sua vocazione, e dalla ricerca matematica, nel senso usuale, si sia troppo presto straniato: non si può, all'uomo geniale, domandare di essere diverso da ciò che la Sua natura lo ha fatto. Fu altro il Suo compito: spargere, alteri saeculo, fermenti vitali di pensiero e di azione, improntare del Suo spirito le speculazioni avvenire. E ben può dirsi che Egli lo ha assolto, se i matematici d'oggi legano al Suo nome concezioni di cui Egli vide appena il germe e se questo nome è sempre più familiare alle persone colte in ogni parte del mondo ».

T. VIOLA

---

il quale, com'è noto, la matematica è una scienza in cui non si ha mai bisogno di sapere se quello che si dice è vero, e neppure di sapere di che cosa si parla.

(27) Fra le mani, Egli intende, degli allievi dei corsi universitari superiori.

(28) Logica ed aritmetica sono, nel pensiero del PEANO, i due pilastri sui quali si fonda ogni teoria matematica. L'una ci appare connaturata all'altra in tal modo, da autorizzarci a credere nella possibilità di una finale evoluzione delle Sue idee in una sola direzione, e cioè: inserzione completa del gruppo dei postulati fondamentali dell'aritmetica in una qualunque riduzione della logica matematica a sistema ipotetico-deduttivo (« Il concetto di numero naturale è così semplice e fondamentale, che ritengo difficile il trovare un ragionamento un po' lungo, di qualunque siasi scienza, in cui esso non compaia » p. 98).

(29) Ci sia permesso, a questo proposito, di esprimere la nostra convinzione che molti punti di contatto potrebbero trovarsi, a seguito d'una accurata indagine, con un altro grande fondamentalista tuttora vivente, il SIERPINSKI, e ciò, ovviamente, a prescindere da divergenze su particolari questioni matematiche!

(30) Loc. cit. alla nota (2), p. 30.

H. Arzeliès, *La Dynamique relativiste et ses applications*, fascicule II vol. in 8(16-25) di XXXIV-451 pag., 188 fig. - Editore Gauthier-Villars, Paris, 1958; prezzo 6000 franchi,

L'opera, concernente i problemi di movimento in Dinamica relativistica del punto lentamente accelerato, è scritta con la collaborazione di R. Mendez. Essa presenta anzitutto una ampia introduzione generale a carattere filosofico-scientifico.

Il vocabolario epistemologico, non ha ragione — secondo Arzeliès — di essere distinto dal vocabolario tecnico. Dunque attualmente il vocabolario epistemologico è molto importante per il fisico e deve fare parte della sua formazione tecnica. Infatti una comprensione profonda delle teorie relativistiche, come di quelle quantistiche, esige essenzialmente una meditazione assai penetrante sui concetti di verità, di esistenza, di oggettività, etc..

L'intersezione con la Filosofia diventa evidente, ma la dottrina, che viene dall'esperienza ed all'esperienza soltanto si applica, è essenzialmente indipendente dai sistemi metafisici. Ed è essenziale lasciare « aperta » una tale Filosofia, conservarle il suo rango « subalterno ».

Per riportare l'esatto pensiero di Arzeliès in materia, diremo che egli considera la subordinazione della Filosofia alle Scienze sperimentali, *per i loro dominî comuni*, come la « pietra angolare per una sana concezione della Fisica e della Epistemologia ».

Ma il tema fondamentale della introduzione è una discussione sul concetto di *verità fisica*. L'Autore ne esamina i principali caratteri. Anzitutto la verità fisica è essenzialmente rivolta verso l'avvenire, in quanto le leggi fisiche riposano su delle esperienze passate e formulano delle previsioni. Poi la verità fisica stessa comporta — almeno in senso largo — il controllo del mondo esterno ed esige quindi una sanzione che trascende il mondo della Logica.

L'Autore fa poi notare che un enunciato è vero soltanto entro i limiti di una certa approssimazione e che ciò non contraddice col fatto che un enunciato vero sia definitivamente acquisito nei limiti delle sue condizioni d'applicazione e d'approssimazione.

Inoltre la verità fisica è di natura operazionale, quindi il dire che un enunciato è vero significa dire che esso corrisponde ad una operazione realizzabile. Che se si tratta, invece, di una operazione immaginabile senza contraddizione, ma non realizzabile, l'enunciato apparterrà alla classe delle proposizioni da chiamare soltanto « utili » o « comode ».

Da tutto ciò consegue la definizione di *teoria fisica*, che è un insieme di proposizioni dei diversi tipi (vere, utili o comode, etc.), organizzate in un certo ordine determinato dalla scelta di una logica e in cui ogni proposizione si deduce dalle precedenti.

L'Autore esamina poi il concetto di « bontà » o meno di una teoria fisica, anche in relazione al suo valore estetico ed accenna ai rapporti del concetto di verità in Fisica col concetto di verità logico-matematica.

Seguono i capitoli che costituiscono la trattazione oggetto del volume. Esso è suddiviso in diciannove capitoli, cui si aggiungono sette appendici. Il primo capitolo consta di una visione panoramica dei problemi trattati nell'opera e dei metodi impiegati per risolverli. Il secondo tratta del movimento rettilineo di una particella puntuale elettrizzata — di massa variabile relativisticamente — in un campo elettrico costante ed uniforme. Nel capitolo in parola, oltre ad un paragrafo sul problema della diffrazione dei corpuscoli, appare già un accenno alla astronautica in rapporto alla relatività. Il terzo capitolo è dedicato allo studio del movimento curvilineo in un campo elettrico costante ed uniforme, con applicazioni alla spettrografia di massa ed anche alla balistica relativisticamente pensata.

Nel capitolo quarto si prende in esame il caso del campo magnetico costante ed uniforme, con applicazione al problema della focalizzazione mentre, nel capitolo quinto, si studia il moto in un campo elettrico ed in un campo magnetico sovrapposti, costanti ed uniformi.

Il sesto capitolo è dedicato allo studio del moto rettilineo di una particella puntuale, dotata di energia relativistica, in un campo elettrico funzione soltanto del posto ed al problema dei moti tautocroni e delle oscillazioni isocrone.

Nel capitolo settimo l'autore si occupa del problema del moto in un campo di forza centrale e nell'ottavo del caso particolare delle forze newtoniane. In entrambi viene rivolta l'attenzione del lettore ai problemi di deviazione e di focalizzazione. I capitoli nono e decimo sono dedicati allo studio relativistico dei movimenti in campi elettrici non uniformi e, rispettivamente, in campi magnetici non uniformi. Il capitolo undecimo riguarda il moto nel campo magnetico di un dipolo o di una sfera uniformemente polarizzata, con applicazioni ai problemi dei raggi cosmici e delle aurore polari. Nel capitolo dodicesimo si studiano i problemi dinamico-relativistici concernenti campi elettrici e magnetici sovrapposti costanti ma non uniformi. Fra le applicazioni, da segnalare quella relativa al magnetron.

Nel capitolo decimoterzo si considerano movimenti in campi elettrici che possono dipendere dal posto, dal tempo e dalla velocità. Nel capitolo decimoquarto appare lo studio del movimento su di una superficie fissa e nel decimoquinto quello del movimento su di una curva assegnata. Nel capitolo decimosesto l'autore si occupa dell'equazione differenziale di Ackeret, concernente il movimento di un razzo (puntuale) dotato di energia relativistica.

I capitoli decimosettimo e decimottavo sono dedicati rispettivamente alla teoria dell'urto elastico ed a quella dell'effetto Compton in particolare. Infine, il capitolo decimonono riguarda gli urti *non* elastici fra particelle, quindi le reazioni nucleari. In questo capitolo, va notato uno studio « macroscopico » sul concetto di anti-particella.

Fra le appendici, va segnalata quella sul viaggiatore di Langevin, in relatività ristretta.

L'opera, che fa seguito ai due volumi rispettivamente di Cinematica relativistica e di Dinamica relativistica (fascicolo I) già pubblicati dall'autore, è legata soprattutto — com'è naturale — al volume citato di Dinamica, del quale applica i principî generali ai problemi concreti di movimento con legge relativistica.

Va notato che, spesso, un problema vi è trattato con più d'un metodo. E va soprattutto segnalato l'opportuno sforzo compiuto con successo dall'Autore allo scopo di rendere i capitoli il più possibile indipendenti l'uno dall'altro, in modo da ottenere, con ciò, che un lettore, in possesso dei principî generali, possa con maggiore facilità consultare l'opera stessa. Questa, indubbiamente molto interessante, appare assai utile, oltre che per i fisici matematici ed i fisici teorici, anche per gli specialisti dell'Ottica elettronica, per quelli delle macchine acceleratrici della Fisica nucleare e per gli studiosi di raggi cosmici.

ANTONIO PIGNEDOLI

D. TER HAAR, *Introduction to the Phyics of many-body systems*, Serie: Interscience tracts on Physics and Astronomy n° 5, Interscience Publishers, inc, New York, 1958, vol. in 16° di pag. 127, prezzo dollari 1,95 opp. 3,85 (rilegato).

L'opera costituisce una trattazione introduttiva all'importante corpo di dottrina — in rapido e notevole sviluppo — concernente la Fisica di molti corpi inter-agenti. L'Autore concilia il carattere dell'opera, che si propone di occupare breve spazio, con la necessità di una visione sufficientemente ampia. Per questo sottolinea i punti più significativi della teoria, ne indica gli sviluppi recenti e fa riferimento ad un'ampia bibliografia, utilissima.

Il volume ha inizio con una breve introduzione concernente le idee basilari degli sviluppi recenti nella dottrina fisica dei sistemi costituiti da un gran numero di particelle inter-agenti.

Seguono poi le due parti della trattazione. La prima parte — dedicata alle teorie dei campi — tratta anzitutto della approssimazione di Hartree e Fock, indi del modello statistico dell'atomo del problema nucleare dei molti corpi inter-agenti (con la teoria di Brueckner) e delle quasi-particelle nei solidi.

La seconda parte del volume — dedicata alle teorie del comportamento collettivo dopo aver dato luogo alla deposizione dei metodi generali, passa allo studio delle onde sonore nei gas e nei cristalli rispettivamente, indi alla teoria delle oscillazioni del « plasma », indi allo studio del comportamento collettivo dei nuclei ed, infine, a fissare l'attenzione sull'elio liquido.

Il volume si chiude con tre appendici e con quella esauriente bibliografia di cui abbiamo già detto e costituisce una esposizione snella molto utile per fisici-matematici e fisici teorici.

ANTONIO PIGNEDOLI