Gaetano Caradonna

Sull'esistenza delle soluzioni per alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 398–407.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_398_0>

Sull'esistenza delle soluzioni per alcuni sistemi di equazioni integrodifferenziali.

Nota di Gaetano Caradonna (a Bari). (*) (**).

Sunto. - *È contenuto nelle righe che precedono il n. 1 del testo.*

Consideriamo il seguente problema:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F\left(x,\ y,\ \displaystyle\int_0^y u(x,\ t)dt,\ u,\ v\right) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = G\left(x,\ y,\ \displaystyle\int_0^x v(t,\ y)dt,\ u,\ v\right) \end{cases} \qquad (x,\ y) \in R
$$

$$
(2) \qquad \begin{cases} u(0,\ y) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \\ v(x,\ 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}
$$

dove R è il quadrato definito dalle limitazioni:

$$
0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1,
$$

e le funzioni $F(x,\ y,\ z,\ u,\ v)$ e $G(x,\ y,\ z,\ u,\ v)$ sono definite nello strato

$$
\bar{S}: (x,\ y) \in R, \quad |\, z\,|,\ \ |\, u\,|,\ \ |\, v\,| < +\infty.
$$

Intendiamo per soluzione del problema (1), (2) una coppia di funzioni $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$ continue in R, che siano dotate delle derivate che figurano nelle (1) e verifichino le (1) e (2).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 3 ottobre 1961.
(**) La presente Nota fa parte della realizzazione del programma del Gruppo di Ricerca n. 19 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per il 1960-61.

Nel caso in cui F e G non dipendano da z, A. ZITAROSA [5], [6], servendosi dei metodi dell'analisi funzionale, ha stabilito dei teoremi di esistenza in ipotesi abbastanza generali per F e G (1).

L. MERLI [3] ha studiato il problema (1), (2), nel caso in cui F e G dipendano da z, e ha stabilito un teorema di esistenza, supponendo che F e G verifichino una ipotesi del tipo di OSGOOD, la prima rispetto ad u e la seconda rispetto a v.

In questa Nota mi sono proposto di stabilire un teorema di esistenza per il problema (1), (2) in ipotesi per F e G del tipo di quelle fatte dallo ZITAROSA nel caso in cui F e G sono indipendenti da z.

Tale teorema trovasi nel n. 1, e l'impostazione della dimostrazione è quella seguita dallo ZITAROSA nel citato lavoro. Invero mostro che la risoluzione del problema (1), (2) è equivalente al provare l'esistenza di un punto unito in una certa trasformazione funzionale, e poi per mostrare ciò faccio uso del noto teorema di SCHAUDER [4].

Nel n. 2 viene stabilito un analogo teorema per il problema costituito dalle

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F\left(x, y, \displaystyle\int_0^y u(x, t)dt, u, v\right) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = G\left(x, y, \displaystyle\int_0^y u(x, t)dt, u, v\right) \end{cases} \qquad (x, y) \in R$$

e dalle (2).

Il n. 3 è dedicato ad alcune osservazioni.

1. Consideriamo lo spazio $C^{(0)}$ delle funzioni continue in R e adottiamo per esso la metrica lagrangiana di ordine zero; esso risulterà – oltre che lineare – normale e completo. Consideriamo inoltre lo spazio Σ i cui elementi sono le coppie ordinate $\mathbf{W} \equiv [z(x, y), v(x, y)]$, con $z(x, y)$ e $v(x, y)$ appartenenti a $C^{(0)}$; tale

(1) Per la letteratura riguardante lo studio del problema (1), (2), nel caso in cui F e G non dipendano da z, rinvio ai lavori [2] e [6].

I risultati stabiliti da ZITAROSA sono stati poi ritrovati da GUGLIELMINO [2] con un noto metodo introdotto da TONELLI e basato sul teorema di ASCOLI-ARZELÀ.

spazio, prodotto topologico di $C^{(0)}$ per $C^{(0)}$, è lineare, normale e completo, con norma

$$\| W \| = \max_R | z | + \max_R | v | .$$

Nel seguito un generico elemento di Σ lo indicheremo brevemente con $W \equiv [z, v]$.

A). Siano $F(x, y, z, u, v)$ e $G(x, y, z, u, v)$ due funzioni continue e limitate nello strato S, e poniamo: $\bar{F} = \sup_S | F(x, y, z, u, v) |$, $\bar{G} = \sup_S | G(x, y, z, u, v) |$;

B) Indicato con I l'insieme delle coppie $[z, v] \in \Sigma$ e tali che

$$| z | \leq \bar{F}, \quad | v(x, y_1) - v(x, y_2) | \leq \bar{G} \, | y_1 - y_2 | , \quad v(x, 0) = 0 \quad (^2),$$

per ogni fissato $W \equiv [z, v] \in I$ e per ogni fissato y di $(0, 1)$ il problema differenziale ordinario

$$(4)_{z, v} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z(x, y), u, v(x, y)) & (x, y) \in R \\ u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

non ammetta più di una soluzione;

C) Il problema

$$\begin{cases} v' = G(0, y, 0, 0, v) & 0 \leq y \leq 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

nella funzione incognita $v(y)$, non ammetta più di una soluzione (³):

D) Comunque si assegnino un x_0, tale che $0 < x_0 \leq 1$, una funzione $z(y)$ continua in $(0, 1)$ e tale che $| z(y) | \leq \bar{G}$, e una

(²) Dalle ipotesi ora fatte ne viene subito che

$$| v(x, y) | \leq \bar{G}, \qquad (x, y) \in R.$$

Infatti:

$$| v(x, y) | = | v(x, y) - v(x, 0) | \leq \bar{G} y \leq \bar{G}.$$

(³) L'esistenza di una soluzione per questo problema e per il problema $(4)_{z, v}$ è, per noti teoremi, assicurata dalla *A*).

successione $\{u_n(y)\}$ di funzioni continue in $(0, 1)$, tali che ivi $|u_n(y)| \leq \bar{F}$, l'equazione

$$V(y) = \lim_{n \to \infty} \int_0^y G(x_0, \tau, z(\tau), u_n(\tau), V(\tau)) d\tau, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

non abbia più di una soluzione (assolutamente) continua $V(y)$ [4].

Vogliamo dimostrare che vale il seguente teorema:

I. - *Nelle ipotesi* A), B), C) *e* D) *il problema* (1), (2) *ammette almeno una soluzione.*

Fissiamo $W \equiv [z, v] \in I$ e sia $u(x, y)$ la corrispondente soluzione del problema $(4)_{z,v}$. Posto:

$$s(x, y) = \int_0^x v(t, y) dt, \tag{5}$$

dove $v(x, y)$ è la funzione precedentemente fissata con W, sia $v'(x, y)$ la soluzione del problema [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = G(x, y, s(x, y), u(x, y), v) & (x, y) \in R \\ v(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

È ovvio che $v'(x, y)$ risulta continua in R. Posto:

$$z'(x, y) = \int_0^y u(x, t) dt \tag{7}$$

[4] Si possono dare delle condizioni sufficienti affinchè l'ipotesi D) sia verificata. Per questo cfr. [5], n. 2, 248-251, n. 4, 254-256. n. 5, 256-258 e anche [6], n. 3, 30-32.

[5] Che il problema (6) ammette soluzione è assicurato, per noti teoremi, dall'ipotesi A). Che poi la soluzione sia unica è evidente: infatti se $x = 0$, tenuto conto che $s(0, y) = 0$, $u(0, y) = 0$, $v(0, 0) = 0$, l'unicità è assicurata dall'ipotesi C); se invece è $0 < x \leq 1$, posto $x_0 = x$, $z(y) = s(x, y)$, $u_n(y) = u(x, y)$, l'unicità è assicurata dall'ipotesi D), tenuto conto del fatto che, per quanto osservato in [2], è $|s(x, y)| \leq \bar{G}$ e che, come si nota subito, è $|u(x, y)| \leq |\bar{F}|$.

a $W \equiv [z, v]$ facciamo corrispondere $W' \equiv [z', v']$, che ovviamente appartiene a Σ. Abbiamo così definito in I una trasformazione funzionale:

$$W' = T(W).$$

L'esistenza di un punto unito per la T equivale all'esistenza di una soluzione per il problema (1), (2):

Infatti se $W \equiv W'$ si ha $z \equiv z' = \int_0^y u(x, t)dt$ e $v \equiv v'$.

Rileviamo ora che, per $W \in I$, tenuto conto dell'ipotesi A), si vede subito che anche $W' \in I$, cioè la T trasforma l'insieme I in se stesso.

Per dimostrare che la trasformazione $T(W)$ ammette almeno un punto unito nell'insieme I, che peraltro è limitato, chiuso e convesso, basterà, in base al citato teorema di J. SCHAUDER [4], provare che essa è completamente continua, cioè che è continua in I e trasforma I in un insieme compatto.

Proviamo anzitutto che la T è continua.

Detta $\{W_n\}$, con $W_n \equiv [z_n, v_n]$, una successione di elementi di I che converge a $W \equiv [z, v] \in I$, dobbiamo dimostrare che anche la successione $\{W_n'\}$, con $W_n' \equiv [z_n', v_n']$ corrispondente di W_n, tende in norma a $W' \equiv [z', v']$ corrispondente di W; cioè che da

$$\lim_{n \to \infty} \| W_n - W \| = 0, \tag{8}$$

segue:

$$\lim_{n \to \infty} \| W_n' - W' \| = 0. \tag{9}$$

Rileviamo che per ciò basta dimostrare che da

$$\lim_{n \to \infty} \| v_n - v \| = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \| z_n - z \| = 0, \tag{10}$$

segue

$$\lim_{n \to \infty} \| v_n' - v' \| = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \| z_n' - z' \| = 0. \tag{11}$$

Cominciamo a provare che, se sono verificate le (10), si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \| u_n - u \| = 0. \tag{12}$$

Infatti ammettiamo che la (12) sia falsa. Allora esistono un $\varepsilon > 0$ ed una successione $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che

$$\| u_{n_k} - u \| \geq \varepsilon; \tag{13}$$

dalla prima delle (10) segue che le v_n sono equicontinue ed equilimitate, mentre dalla seconda delle (10) segue che le z_n sono equicontinue ed equilimitate; e quindi, per un teorema stabilito da C. CILIBERTO (6), è compatta la $\{u_n\}$ e perciò anche la $\{u_{n_k}\}$. Esiste dunque una successione estratta dalla $\{u_{n_k}\}$ convergente, uniformemente in R, verso una funzione $u'(x, y)$ la quale risulta soluzione del problema $(4)_{z, v}$ (7). Ma tale problema, come si è detto, ha soluzione unica, e quindi $u'(x, y) \equiv u(x, y)$ in R. E ciò è in contrasto con il fatto che dalla (13) segue:

$$\| u' - u \| \geq \varepsilon.$$

Dunque è valida la (12). Tenuta presente la (7) e considerato che $z_n' = \int_0^y u_n(x, t)dt$, si vede subito che dalla (12) si ha la seconda delle (11).

Rileviamo ora che dalla prima delle (10), per la (5), si ha $\lim_{n \to \infty} \| s_n - s \| = 0$: tenuto conto di ciò e della (12), si dimostra la prima delle (11) in modo analogo a quanto fatto per provare la (12), ma facendo ora uso delle ipotesi C) e D).

Dimostriamo ora che I è trasformato dalla T in un insieme compatto. Infatti al variare di W in I, tenuto conto del fatto che F è limitata, la $u(x, y)$ soluzione del problema $(4)_{z,v}$ descrive un insieme di funzioni equilimitate in R, equicontinue rispetto a x, uniformemente rispetto a y. Conseguentemente, tenuto conto della (7), $z'(x, y)$ descrive, sempre al variare di W in I, un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue in R.

(6) Cfr. [1], teorema I pag. 20-21: cfr. anche [5], teorema II pag. 246-247 e osservazione di pag. 263.

(7) Infatti, detta $\{u_m\}$ la successione convergente, uniformemente in R, verso u, si osservi che

$$u_m(x, y) = \int_0^x F(\xi, y, z_m(\xi, y), u_m(\xi, y), v_m(\xi, y))d\xi$$

e quindi si passi al limite per $m \to \infty$.

È ovvio poi che, quando W varia nell'insieme I, poichè per la B) le v sono equilipschitziane rispetto a y, uniformemente rispetto a x, la $s(x, y)$, definita dalla (5), descrive un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue in R. Quindi, tenuto conto delle ipotesi C) e D), in base ad un teorema stabilito dallo ZITAROSA (8), ne viene che v' descrive un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue in R.

Dai ragionamenti fatti segue che l'insieme I è mutato dalla considerata trasformazione in un insieme compatto. Il teorema è quindi dimostrato.

2. Mantenendo le notazioni stabilite nel n. 1 notiamo che vale anche il seguente altro teorema:

II. - *Nelle ipotesi A), B), C) e D), il problema* (3), (2) *ammette almeno una soluzione.*

Definiamo nel già considerato insieme I di Σ una trasformazione $W' = T(W)$ nel modo seguente: Fissato $W \equiv [z, v] \in I$, sia $u(x, y)$ la soluzione del problema

$$(14)_{z,v} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, y, z(x, y), u, v(x, y)) & (x, y) \in R \\ u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

(8) Cfr. [5], teorema I pag. 244 e osservazioni di pag. 247 e di pag. 263. Rileviamo che il teorema stabilito da ZITAROSA assicura la compattezza delle soluzioni $v(x, y)$ del sistema (6), quando $s(x, y)$ e $u(x, y)$ descrivono insiemi di funzioni equilimitate ed equicontinue rispetto a x, uniformemente rispetto a y, sotto la seguente ipotesi: D') Comunque si assegnino un x_0, tale che $0 < x_0 \leq 1$, e due successioni $\{u_n(y)\}$ e $\{z_n(y)\}$ di funzioni continue in (0, 1), e tali che $|u_n(y)| \leq \bar{F}$ e $|z_n(y)| \leq \bar{G}$, l'equazione:

$$V(y) = \lim_{n \to \infty} \int_0^y G(x_0, \tau, z_n(\tau), u_n(\tau), V(\tau)) d\tau, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

non abbia più di una soluzione (assolutamente) continua $V(y)$.

Siccome, però, nel nostro caso le funzioni $s(x, y)$, al variare di W in I, come si è visto, descrivono un insieme compatto, non è difficile vedere, rifacendo la dimostrazione del teorema stabilito da ZITAROSA, che la tesi di tale teorema è valida anche quando le funzioni $s(x, y)$ descrivono un insieme compatto e le $u(x, y)$ descrivono un insieme di funzioni equilimitate ed equicontinue rispetto a x, uniformemente rispetto a y, bastando, in tal caso, fare in luogo dell'ipotesi D') l'ipotesi meno restrittiva D).

Consideriamo poi il problema

$$
(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = G\left(x,\ y,\ \displaystyle\int_0^y u(x,\ t)dt,\ u(x,\ y),\ v\right) & (x,\ y) \in R \\ v(x,\ 0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
$$

dove $u(x,\ y)$ è la soluzione del problema $(14)_{z,v}$, e sia $v'(x,\ y)$ la sua soluzione [9]. Posto $z'(x,\ y) = \int_0^y u(x,\ t)dt$, *a* $W \equiv [z,\ v]$ facciamo corrispondere $W' \equiv [z',\ v']$.

Si vede facilmente che l'esistenza di una soluzione per il problema (3), (2) equivale all'esistenza di un punto unito per la trasformazione così definita. Con procedimento non differente da quello seguito nel caso del teorema I, si prova che T ammette almeno un punto unito nell'insieme I.

3. Osservazione 1^a. - Non è difficile constatare che, se il problema (1), (2) ammette soluzione, è risolubile anche il problema:

$$
(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = F(x,\ y,\ U,\ U_y,\ V_x) \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = G(x,\ y,\ V,\ U_y,\ V_x) \end{cases} \quad (x,\ y) \in R
$$

$$
(17)\quad \begin{cases} U(x,\ 0) = 0 \\ V(x,\ 0) = 0 \end{cases} \ 0 \leq x \leq 1, \qquad (18)\quad \begin{cases} U(0\ \ y) = 0 \\ V(0,\ y) = 0 \end{cases} \ 0 \leq y \leq 1
$$

dove per soluzione di un tale problema si intende una coppia di funzioni $U(x,\ y)$ e $V(x,\ y)$ continue in R, dotate delle derivate che figurano nelle (16) e verificanti le (16), (17) e (18).

Invero, supposto che il problema (1), (2) ammetta una soluzione $u(x,\ y)$, $v(x,\ y)$, posto:

$$
U(x,\ y) = \int_0^y u(x,\ t)dt, \qquad V(x,\ y) = \int_0^x v(t,\ y)dt,
$$

(9) Vale un'osservazione analoga a quella fatta in (5).

si vede subito che le funzioni $U(x, y)$ e $V(x, y)$ verificano il problema (16), (17), (18).

Di qui ne viene che il teorema I dà anche un teorema di esistenza per il problema (16), (17), (18).

Analoga osservazione vale per il problema:

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = F(x, y, U, U_y, V) \\ \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = G(x, y, U, U_y, V) \end{cases} \qquad (x, y) \in R$$

$$(20) \qquad \begin{cases} U(x, 0) = 0 \\ \\ V(x, 0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad (21) \qquad U(0, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Invero se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ è soluzione del problema (3), (2), posto

$$U(x, y) = \int_0^y u(x, t)dt, \qquad V(x, y) = v(x, y),$$

si trova subito che $U(x, y)$, $V(x, y)$ è soluzione del problema (19) (20), (21). Ne viene che il teorema II dà anche un teorema d esistenza per il problema (19), (20), (21).

In particolare se $F = G = f$, il problema (19), (20), (21), tenut conto del fatto che dalle (19) e (20) segue $V(x, y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, si mut nel problema di DARBOUX:

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z_x, z_y) \qquad (x, y) \in R \\ \\ z(x, 0) = z(0, y) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Allora il teorema II, nel caso in cui $F = G = f$, fornisce u teorema di esistenza per il problema di DARBOUX (10).

(10) Tale teorema è contenuto in teoremi stabiliti da ZITAROSA e GUGLIELMINO. Invero, ferme restando le ipotesi A), C) e D), l'ipot B) è meno generale di un'analoga ipotesi fatta da ZITAROSA e GUGLIELMINO. In proposito cfr. [6], n. 4, 52-35 e [2], nn. 2-3, 68-75.

OSSERVAZIONE 2ª. - Supponiamo in particolare che per le funzioni F e G siano verificate le seguenti ipotesi:

$$| F(x, y, z, u', v) - F(x, y, z, u, v) | \leq \chi(| u - u' |) \tag{23}$$

$$| G(x, y, z, u, v') - G(x, y, z, u, v) | \leq \pi(| v - v' |) \tag{24}$$

dove $\chi(\rho)$, $\pi(\sigma)$ sono due funzioni continue per $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $\chi(\rho) > 0$ per $\rho > 0$ e $\pi(\sigma) > 0$ per $\sigma > 0$, con

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{h} \frac{d\rho}{\chi(\rho)} = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{\bar{h}} \frac{d\sigma}{\pi(\sigma)} = +\infty, \qquad h > 0.$$

Ora, in base a noti criteri di unicità per le equazioni differenziali ordinarie, è ovvio che le ipotesi (23), (24) assicurino il verificarsi rispettivamente delle ipotesi $B)$ e $C)$; inoltre, per quanto rilevato dallo ZITAROSA ([11]), la (24) assicura il verificarsi dell'ipotesi $D)$; pertanto i risultati stabiliti da MERLI ([12]) sono contenuti in quelli conseguiti in questo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CILIBERTO, *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, «Ricerche di Mat.», 4 (1955), 15-29.

[2] F. GUGLIELMINO, *Sull'esistenza delle soluzioni dei problemi relativi alle equazioni non lineari di tipo iperbolico in due variabili*, «Le Matematiche», Vol. XIV, fasc. I (1959), 67-80.

[3] L. MERLI, *Un problema ai limiti per una classe di sistemi di equazioni integrali*, «Annali di Mat.», Tomo LI (1960), 139-146.

[4] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, «Studia Math.», 2 (1930), 171-180.

[5] A. ZITAROSA, *Su alcuni sistemi iperbolici di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, «Ricerche di Mat», 8 (1959), 240-269.

[6] A. ZITAROSA, *Alcune osservazioni su certi teoremi di compattezza e sul problema di Darboux*, «Rend. dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli», Serie 4, Vol. XXVII, (1960), 25-35.

([11]) Vedi nota ([4]).

([12]) Cfr. [3], pag. 141.