Bollettino Unione Matematica Italiana

Romana Bacchiani, Angela M. Spera

Sui grandi divisori primi dei polinomi di esponenziali a coefficienti interi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 412–424.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_412_0>

Sui grandi divisori primi dei polinomi di esponenziali a coefficienti interi.

Nota di ROMANA BACCHIANI e ANGELA M. SPERA (a Milano) (*) (**).

Sunto. - *Sia* $F(y)$ *un polinomio a coefficienti interi; posto* $y = a^{x^m}$ ($m \geq 1$, $|a| \geq 2$), $G(x) = F(a^{x^m})$, *denotiamo con* P_x *il massimo divisore primo del prodotto* $G(1) \cdot G(2) \dots G(x)$ (*togliendo gli eventuali fattori nulli, al più in numero finito*). *Si dimostra che* $P_x/\sqrt{x \log x} \to +\infty$ *per* $x \to +\infty$ *e si aggiungono altre informazioni sul complesso dei divisori primi «grandi».*

Summary. - *Let* $F(y)$ *be a polynomial with integer coefficients; we set now* $y = a^{x^m}$ (*with* $m \geq 1$, $|a| \geq 2$), *and* $G(x) = F(a^{x^m})$, *and we shall denote with* P_x *the greatest prime divisor of the product* $G(1) \cdot G(2) \dots G(x)$ (*where we shall remove the possible vanishing factors, which can be at most a finite number*). *We can demonstrate that* $P_x/\sqrt{x \log x} \to +\infty$ for $x \to +\infty$, *and other informations can be added about the whole of the «large» prime divisors.*

1. Siano $c_0, c_1, \dots, c_n$ razionali interi e poniamo $F(y) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \dots + c_n$. Siano a e m interi, $|a| \geq 2$, $m \geq 1$, e poniamo:

$$y = a^{x^m}.$$

La funzione

$$G(x) = F(a^{x^m}) = c_0 a^{nx^m} + c_1 a^{(n-1)x^m} + \dots + c_n \tag{1.1}$$

assume valori interi per $x = 1, 2, 3, 4, \dots$.

Consideriamo il prodotto:

$$\Pi(x) = G(1) \cdot G(2) \cdot \dots \cdot G(x) \tag{1.2}$$

e denotiamo con P_x il massimo divisore primo di questo prodotto.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. l'11 ottobre 1961.

(**) Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca N. 14 (1960-61) del C. N. R.

In questa Nota studiamo l'andamento di P_x e cerchiamo di trarre informazioni sulla scomposizione in fattori primi di $\Pi(x)$ per quanto riguarda i divisori primi più grandi.

Nel caso in cui $F(y)$ abbia radici intere della forma a^{σ^m} qualche fattore $G(u)$ di $\Pi(x)$ è nullo; in ogni caso tali fattori nulli sono al più in numero finito e quindi per $x \geqq x_0$ conveniente risulta $G(x) \neq 0$; conveniamo in questo caso di porre

$$\Pi(x) = G(x_0) \cdot G(x_0 + 1) \ldots G(x). \tag{1.2'}$$

Le proprietà di P_x che abbiamo in vista sono di carattere asintotico e pertanto la considerazione eventuale del prodotto (1.2') in luogo di (1.2) non altera la questione. Supporremo pertanto $G(x) \neq 0$ per $x \geqq 1$.

Su questo argomento ci sono noti i risultati seguenti:

a) Se $m = 1$ è $P_x \to +\infty$. ([1])

b) Se $m = 1$, $F(y)$ irriducibile, risulta: ([2])

$$\underline{\lim}\, P_x/x \log x \geqq 1/2(n+1)$$

In questo caso sono note anche proprietà sul numero dei divisori primi superiori a $x \log^{1-\varepsilon} x (\varepsilon > 0)$ e superiori a $\alpha x \log x$ $(0 < \alpha < 1/2(n+1))$.

c) Nel caso $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $(a, c_n) = 1$, $F(y)$ irriducibile, risulta: ([3])

$$\underline{\lim}\, P_x/\sqrt{x \log x} > 0$$

Il metodo seguito in *b*) è diverso da quello seguito in *a*), poichè questo è rivolto a una proprietà più semplice. Il metodo seguito in *c*) è analogo a quello seguito in *b*), e noi, riprendendo in esame *c*), con alcune modificazioni, siamo pervenute ai risultati espressi dal seguente Teorema. ([4])

([1]) G. Pólya [3].
([2]) G. Ricci [4].
([3]) M. Cugiani [1].
([4]) Seguendo la consuetudine consideriamo nulle le somme vuote di termini e uguali a 1 i prodotti vuoti di fattori

TEOREMA. - Sia $K > 0$. *Denotiamo con:* 1). P_x *il massimo divisore primo di* $\Pi(x)$; 2). $N_K(x)$ *e* $S_K(x)$ *rispettivamente il numero e la somma dei divisori primi distinti di* $\Pi(x)$ *che superano* $K\sqrt{x \log x}$; 3). $Q_K(x)$ *il massimo divisore di* $\Pi(x)$ *composto esclusivamente con fattori primi maggiori di* $K\sqrt{x \log x}$.

Allora valgono le seguenti relazioni di limite, per $x \to +\infty$:

(A) $P_x/\sqrt{x \log x} \to +\infty$.

(B) *Per ogni* $K > 0$, $Max\{P_x/x,\ N_K(x)\} \to +\infty$.

(C) *Per ogni* $K > 0$, $S_K(x)/x \to +\infty$.

(D) *Per ogni* $K > 0$, $\log Q_K(x) \sim \log \Pi(x)$,

OSSERVAZIONI.

1). (A) è conseguenza di (B), poichè, se esistessero un numero K e una successione crescente di interi x' per la quale $P_{x'} < K\sqrt{x' \log x'}$, sarebbe $P_{x'}/x' \to 0$ e $N_K(x') = 0$ contro (B).

2) (B) è conseguenza di (C). Per assurdo: se (B) non valesse esisterebbero un numero $H > 0$ e una successione crescente di interi x', tali che

$$Max\{P_{x'}/x',\ N_K(x')\} < H;$$

lungo questa successione sarebbe $P_{x'}/x' < H$; $N_K(x') < H$ e quindi $S_K(x') \leq N_K(x') \cdot P_{x'} < H^2 x'$ contro (C).

Rimangono quindi da dimostrare (C) e (D).

Denoteremo con la lettera γ delle costanti positive opportune (indipendenti da x e da p), non necessariamente le stesse nelle varie occasioni; quando sarà il caso le contraddistingueremo facendo uso di indici. Conveniamo per semplicità di scrivere $F(\xi)$, $G(\xi)$, $\Pi(\xi)$ ecc., in luogo di $F([\xi])$, $G([\xi])$, $\Pi([\xi])$, ecc.

2. *Limitazione per* $\log \Pi(x)$.

Scelti due numeri reali positivi γ_1 e γ_2, tali che $\gamma_1 < |c_0| < \gamma_2$, essendo

$$|G(x)| = |a|^{nx^m} \cdot |c_0 + c_1 a^{-x^m} + \dots| \tag{2.1}$$

è sempre possibile determinare in conseguenza uno ξ_0 tale che per ogni $\xi \geqq \xi_0$, sia:

$$\gamma \mid a \mid^{n(\xi-1)^m} < \mid G(\xi) \mid < \gamma_2 \mid a \mid^{n\xi^m} \tag{2.2}$$

e quindi anche:

$$\mid G(\xi') \mid < \gamma_2 \mid a \mid^{n\xi^m} \text{ per } \xi' \leqq \xi \tag{2.3}$$

da cui

$$\gamma_3 + n(\xi-1)^m \log \mid a \mid < \log \mid G(\xi) \mid < \gamma_4 + n\xi^m \log \mid a \mid \tag{2.4}$$

e

$$\log \mid G(\xi') \mid < \gamma_4 + n\xi^m \log \mid a \mid, \ (\xi' \leqq \xi). \tag{2.5}$$

Poniamo (per $\xi \geqq \xi_0$)

$$\Phi(\xi) = \log \Pi(\xi) = \sum_{1 \leqq u \leqq \xi} \log \mid G(u) \mid = \sum_{1 \leqq u \leqq \xi_0} \ldots + \sum_{\xi_0 < u \leqq \xi}$$

$$= \Phi(\xi_0) + \sum_{\xi_0 < u \leqq \xi} \log \mid G(u) \mid .$$

Dalla (2.4) segue:

$$\Phi(\xi) > \sum_{\xi_0 < u \leqq \xi} \mid \gamma_3 + n(\xi-1)^m \log \mid a \mid \mid > \gamma\xi^{m+1}. \tag{2.6}$$

Denotiamo con $l(p)$ l'esponente della massima potenza di p (la lettera p indicherà sempre numeri primi) che divide $\Pi(\xi)$. Risulta:

$$\log \Pi(\xi) = \sum_p l(p) \log p.$$

Dobbiamo procedere alla maggiorazione di $l(p)$. A questo scopo, e per il seguito della dimostrazione, premettiamo alcuni lemmi.

3. Lemma 1. - Siano z_0, a, m interi, $\mid a \mid \geqq 2$, $m \geqq 1$; sia inoltre:

$$\text{gs}\, p^i = (\text{gs}\, p) p^s = \beta \cdot p^i \Big(\beta \mid p-1;\ s = 0 \text{ per } i < \alpha,\ s = i - \alpha$$

$$\text{per } i \leqq \alpha;\ \alpha < \log \mid 2a \mid \frac{p}{\log p}\Big)$$

il gaussiano di p^t nella base a. Il numero $N(\xi)$ delle soluzioni $0 < x \leqq \xi$ della congruenza

$$x^m \equiv z_0 (\text{mod gs } p^s) \tag{3.1}$$

verifica la disuguaglianza

$$N(\xi) \leqq 2m \left(\frac{\xi}{p^{s/m}} + \nu(\beta) + 1 \right)$$

dove $\nu(\beta)$ è il numero delle soluzioni distinte (mod β) della congruenza $x^m \equiv z_0 (\text{mod } \beta)$.

Dimostrazione. - La (3.1) si può scrivere:

$$x^m \equiv z_0 (\text{mod } \beta \cdot p^s). \tag{3.1'}$$

Possono presentarsi due casi:

1°) $(p, z_0) = 1$, 2°) $p \mid z_0$.

Nel primo caso il numero delle soluzioni della (3.1') è dato dal prodotto dei numeri delle soluzioni delle due seguenti congruenze:

$$x^m \equiv z_0 (\text{mod } p^s); \qquad x^m \equiv z_0 (\text{mod } \beta).$$

Come é noto dagli elementi della Teoria dei numeri, la prima ammette al più $2m$ soluzioni. Se indichiamo con $\nu(\beta)$ il numero delle soluzioni della seconda, il numero delle soluzioni della (3.1') in interi positivi x, con $0 < x \leqq \xi$, non può superare (essendo $\nu(\beta) \leqq \beta$):

$$2m \cdot \nu(\beta) \left(\left[\frac{\xi}{\beta \cdot p^s} \right] + 1 \right) \leqq 2m \left(\frac{\xi}{p^s} + \nu(\beta) \right)$$
$$\leqq 2m \left(\frac{\xi}{p^{s/m}} + \nu(\beta) \right), \quad (p, z_0) = 1.$$

Nel secondo caso l'analogo numero non supera: [5]

$$2m \left(\frac{\xi}{p^{s/m}} + 1 \right)$$

[5] M. CUGIANI [1]. Lemma II pag. 39.

Quindi $N(\xi)$ verifica comunque la seguente disuguaglianza:

$$N(\xi) \leqq 2m\left(\frac{\xi}{p^{s/m}} + \nu(\beta) + 1\right).$$

Fissiamo l'intero a, alla successione $\{p_l\}$ dei numeri primi, corrisponde la successione $\{\beta_l\}$ dei gassiani di p_l.
Il numero $\nu(\beta_l) = \nu(z_0, \beta_l)$ dipende da l e da z_0. Vale il seguente

Lemma II. - $\nu(\beta_l) = o(p_l)$(per $l \rightarrow +\infty$).
Cioè: esiste una successione $\varepsilon_l \rightarrow 0$ tale che

$$\nu(\beta_l) = \nu(z_0, \beta_l) \leqq \varepsilon_l \cdot p_l$$

per z_0 qualunque e ε_l indipendente da z_0.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che ad ogni $\eta > 0$ si può coordinare un $p_0 = p_0(\eta)$ tale che per ogni $p_l \geqq p_0$ si abbia: $\nu(\beta_l) \leqq \eta \cdot p_l$ (Per semplicità di scrittura d'ora in avanti, in luogo di β_l e p_l, scriveremo β e p, rispettivamente.)

Ad ogni coppia (z_0, β) coordiniamo $d = (z_0, \beta)$ e poniamo $\beta = d \cdot \beta'$. Sia inoltre q^γ la massima fra tutte le potenze q^j che figurano nella scomposizione canonica $\beta' = \prod_{q \mid \beta'} q^j$ di β'. Fissato un numero $K > 0$, ripartiamo le coppie (z_0, β) nelle seguenti quattro classi, tali classi potendo risultare vuote o anche avere eventualmente elementi in comune:

1) (z_0, β) con $\beta \leqq p/K$

2) » » $\beta \geqq p/K$ e $d > K$

3) » » $\beta \geqq p/K$ e $q^\gamma > K$

4) » » $\beta \geqq p/K$. $d \leqq K$, $q^\gamma \leqq K$.

(Osserviamo che la classe 1) non dipende da z_0).
Il nostro problema consiste nel maggiorare convenientemente $\nu(\beta)$ nei quattro casi.

1) Se $\beta \leqq p/K$, essendo $\nu(\beta) \leqq \beta$, si deduce che $\nu(\beta) \leqq p/K$.

2) $\beta \geqq p/K$ e $d > K$. Ad ogni soluzione x_1 di $x^m \equiv z_0 (\mathrm{mod}\ \beta)$ si coordina una soluzione y_1 di $(\delta^m/d) y^m \equiv z_0' (\mathrm{mod}\ \beta')$ nel modo seguente: sia δ^m la minima potenza m-esima perfetta che è divisibile per d. Poichè $d \mid x^m$ allora $\delta^m \mid x^m$; ne segue che $\delta \mid x$. Posto $x_1 = \delta y_1$, la congruenza si può scrivere:

$$\delta^m y_1^m \equiv z_0 (\mathrm{mod}\ \beta);$$

dividendo per d e ponendo $\delta^m = d \cdot d'$, si ha:

$$d' \cdot y_1^m \equiv z'_0 (\mathrm{mod}\ \beta') \tag{3.2}$$

essendo: $(d', z_0) = 1$, $(d', \beta') = 1$, $(z_0', \beta') = 1$, $(y_1, \beta') = 1$.

Inversamente un numero $y_1, (0 < y_1 < \beta')$ proviene, come si verifica immediatamente, da d/δ interi del tipo x_1. Ne segue:

$$\nu(\beta) \leqq \varphi(\beta') \frac{d}{\delta} \leqq \beta' \frac{d}{\delta} = \frac{\beta}{\delta} \leqq \frac{\beta}{d^{1/m}} \leqq \frac{\beta}{K^{1/m}} \leqq \frac{1}{K^{1/m}} \cdot p$$

3) Veniamo al caso in cui $\beta \geqq p/K$ e $q\gamma > K$.

Da $x^m \equiv z_0 (\mathrm{mod}\ \beta)$, segue come sopra

$$(\delta^m/d) y_1^m \equiv z'_0 (\mathrm{mod}\ \beta');\ (y_1, \beta') = 1.$$

Si considerino le congruenze:

$$(\delta^m/d) y_1^m \equiv z_0' (\mathrm{mod}\ q\gamma)\ (q, z_0') = 1$$

$$(\delta^m/d) y_1^m \equiv z_0' (\mathrm{mod}\ \beta'/q\gamma).$$

Il numero delle soluzioni, (mod β'), di questo sistema non supera (v. Lemma I) $2m \cdot \beta'/q\gamma$. Segue che il numero $\nu(\beta)$ delle soluzioni (mod β) di $x^m \equiv z_0 (\mathrm{mod}\ \beta)$ verifica la seguente disuguaglianza:

$$\nu(\beta) \leqq d \cdot 2m \cdot \frac{\beta'}{q\gamma} = 2m \frac{\beta}{q\gamma} \leqq 2m \frac{p}{K}$$

4) Sia ora $d \leq K$ e $q' \geq K$ essendo $\beta \geq p/K$. Detto ω il numero dei fattori primi distinti di β' risulta: $\beta' = \beta/d \geq p/K^2$ e $\beta' < K^\omega$, da cui: $K^\omega \geq p/K^2$, cioè:

$$\omega \geq \frac{\log(p/K^2)}{\log K} = \frac{\log p}{\log K} - 2. \tag{3.3}$$

Sappiamo che il numero delle soluzioni della (3.2) non supera $\varphi(\beta') = \beta' \prod_{q/\beta'} (1 - 1/q)$. Osserviamo che $q' \leq K$ e quindi:

$$\prod_{q|\beta'} (1 - 1/q) \leq \prod_{q|\beta'} (1 - 1/q') \leq \prod_{q|\beta'} (1 - 1/K) = (1 - 1/K)^\omega$$

da cui, per la (3.3):

$$\prod_{q|\beta'} (1 - 1/q) \leq (1 - 1/K)^{(\log p/\log K) - 2},$$

che, assunto $K > 2$, non supera:

$$4 \exp\{(\log p/\log K) \log(1 - 1/K)\} < 4 \exp\{-1/(K \log K) \cdot \log p\}$$
$$< 4p^{-1/(K \log K)}$$

Dunque:

$$\nu(\beta) \leq d \cdot \varphi(\beta') \leq d \cdot \beta' \cdot 4p^{-1/(K \log K)} \leq (4/p^{1/(K \log K)}) \cdot p$$

Riepilogando: $\nu(\beta)$ è, nei quattro casi, maggiorato rispettivamente da: p/K, $p/K^{1/m}$, $2mp/K$, $(4/p^{1/(K \log K)}) \cdot p$ (per $K > 2$). Allora, fissato η, si determini K così grande da avere $2m/K < \eta$ e $1/K^{1/m} < \eta$, e poi $p_0 = p_0(\eta, K)$ così grande da avere $4/p_0^{1/(K \log K)} < \eta$. In tal modo, per $p \geq p_0$, risulta $\nu(\beta) < \eta \cdot p$ e pertanto esiste una successione $\varepsilon(p) \to 0$, per $p \to +\infty$, tale che $\nu(\beta) < \varepsilon(p) \cdot p$.

È sempre possibile scegliere $\varepsilon(p)$ in guisa che risulti $\varepsilon(p) \cdot p \to +\infty$, per $p \to +\infty$.

LEMMA III. - Se $\varepsilon(p) \to 0$, vale la limitazione

$$\sum_{p \leq x} \varepsilon(p) \cdot p = o(x^2/\log x), \ (\text{per } p \to +\infty).$$

Dimostrazione. - È noto che, scelti convenientemente k' e k, $k' < k$, risulta:

$$k'n \log n < p_n < kn \log n,$$

avendo indicato con p_n l'n-esimo numero primo.

Posto $\bar{\varepsilon}(n) = \sup\limits_{p \geqq p_n} \varepsilon(p)$, abbiamo, per $2 < p_{n_0} \leqq p_{r-1} \leqq x < p_r$,:

$$S = \sum_{p \leqq x} \varepsilon(p) \cdot p = \sum_{p \leqq p_{n_0}} \varepsilon(p) \cdot p + \sum_{p_{n_0} < p \leqq x} \varepsilon(p) \cdot p \leqq \bar{\varepsilon}(1) \sum_{p \leqq p_{n_0}} p + \bar{\varepsilon}(n_0) \sum_{p_{n_0} < p \leqq x} p$$

$$\leqq \bar{\varepsilon}(1) \left\{ 2 + k \int_2^{n_0} t \log t dt \right\} + \bar{\varepsilon}(n_0) k \int_{n_0}^{r} t \log t dt.$$

Osserviamo che per n_0 fisso e $r \to +\infty$, risulta:

$$\int_2^{n_0} t \log t dt = o\left(\int_{n_0}^{r} t \log t dt \right)$$

e quindi:

$$S \leqq \bar{\varepsilon}(n_0) k (1 + o(1)) \int_{n_0}^{r} t \log t dt \leqq \bar{\varepsilon}(n_0) O(x^2/\log x)$$

e poiché $\bar{\varepsilon}(n_0) \to 0$ per $p \to +\infty$, si deduce che:

$$S/(x^2/\log x) \to 0.$$

4. *Maggiorazione dell'esponente* $l(p)$.

Per valutare l'esponente della massima potenza di p che divide il prodotto $\Pi(\xi)$, fissato $p (\geq 2)$, distinguiamo i due casi:

1°) $p \mid a$; 2°) $(p, a) = 1$.

Supponiamo dapprima che $p \mid a$ e siano: p^{α} la massima potenza di p che divide a e p^{γ_h} la massima potenza di p che divide il coefficiente c_h; per indicare ciò scriveremo:

$$p^{\alpha} \| a;\ p^{\gamma_h} \| c_h (h = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Allora gli esponenti delle massime potenze di p, che dividono i termini di $G(x)$, sono ordinatamente:

$$\gamma_0 + nx^m\alpha,\ \gamma_1 + (n-1)x^m \cdot \alpha, \dots,\ \gamma_{n-1} + x^m \cdot \alpha,\ \gamma_n .$$

Ed essendo $\alpha > 0$, per $x \geqq x_0(p)$ conveniente, risulta:

$$\gamma_0 + nx^m\alpha > \gamma_1 + (n-1)x^m\alpha > \dots > \gamma_n .$$

Perciò, se $(a, c_n) > 1$, sarà: $p^{\gamma_n} \| G(x)$ (per $x \geqq x_0(p)$); se invece $(a, c_n) = 1$, $G(x)$ non è divisibile per alcun $p \mid a$.

Quindi:

se $(a, c_n) = 1$ è $l(p) = 0$, per ogni $p \mid a$;

se $(a, c_n) > 1$, $p^{\gamma_n} \| c_n$, è $l(p) \leqq C_p + \gamma_n\xi$

(essendo C_p una costante indipendente da ξ).

In ogni caso:

$$\sum_{p \mid a} l(p) \leqq \xi \sum_{p \mid a} \gamma_n + O(1) = O(\xi). \tag{4.1}$$

Veniamo al secondo caso: p non è un divisore di a.

Consideriamo la congruenza

$$G(x) = F(a^{x^m}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^i) \tag{4.2}$$

e determiniamo il numero degli interi x, con $0 < x \leqq \xi$, che ne sono le soluzioni.

Si osservi che ad ogni soluzione $y_0 (\mathrm{mod}\ p^i)$ di

$$F(y) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^i) \tag{4.3}$$

corrispondono tutte e sole le soluzioni distinte (mod gs p^i) della congruenza:

$$x^m \equiv z_0 (\text{mod gs } p^i) \tag{4.4}$$

dove z_0 è tale che

$$a^{z_0} \equiv y_0 (\text{mod } p^i).$$

È noto che il numero delle soluzioni distinte (mod p^i) della (4.3) non supera la costante nD^2, dove D è il discriminante di $F(y)$ ([6]). Per i lemmi I e II (n. 3), possiamo affermare che il numero $\nu(p^i)$ degli interi $0 < x \leq \xi$ che sono soluzioni di (4.2), verifica la disuguaglianza:

$$\nu(p^i) \leq 2m \cdot nD^2(\xi/p^{s/m} + \varepsilon(p) \cdot p) \text{ quando } (z_0, p) = 1,$$

$$\nu(p^i) \leq 2m \cdot nD^2(\xi/p^{s/m} + 1) \text{ quando } p \mid z_0 .$$

In ogni caso vale:

$$\nu(p^i) \leq \gamma \left(\frac{\xi}{p^{s/m}} + \varepsilon(p) \cdot p\right). \tag{4.5}$$

D'altra parte se $p^k \| G(u)$ $(\xi_0 \leq u \leq \xi)$

$$k = \frac{\log \mid G(u) \mid}{\log p} < \frac{n\xi^m \log \mid a \mid + \gamma_4}{\log p} \leq \frac{\gamma\xi^m}{\log p} \tag{4.6}$$

per la (2.5). Segue che:

$$l(p) \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma \{ \xi/p^{(i-\alpha)/m} + \varepsilon(p) \cdot p \}. \tag{4.7}$$

Valutiamo la sommatoria precedente. Tenendo conto della (4.6), abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma \{ \xi/p^{(i-\alpha)/m} + \varepsilon(p) \cdot p \} = \gamma \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(p) \cdot p + \gamma \sum_{i=1}^{k} \xi/p^{(i-\alpha)/m}$$

$$\leq \frac{\gamma\xi^m}{\log p} \varepsilon(p) \cdot p + \gamma \sum_{i=1}^{k} \xi/p^{(i-\alpha)/m} .$$

([6]) T. NAGELL [2].

Per l'ultima sommatoria abbiamo (si ricordi che per $i < \alpha$ è da porre $i - \alpha = 0$):

$$\sum_{i=1}^{k} 1/p^{(i-\alpha)/m} = \alpha + \sum_{u=1}^{k-\alpha} 1/p^{u/m} \leqq \alpha + \sum_{u=1}^{\infty} 1/p^{u/m}$$

$$\leqq \alpha + \gamma \cdot 1/p^{1/m};$$

e quindi:

$$l(p) \leqq \frac{\varepsilon(p) \cdot p}{\log p} \gamma \xi^m + \gamma\alpha\xi + \gamma\xi \frac{1}{p^{1/m}} \tag{4.8}$$

$$\leqq \frac{\varepsilon(p) \cdot p}{\log p} \gamma \xi^m + (\alpha + \gamma)\xi$$

$$\leqq \frac{\varepsilon(p) \cdot p}{\log p} \gamma \xi^m + \gamma\xi \frac{p}{\log p}.$$

Ricordando a questo punto che, per $p \mid a$, è $l(p) = O(\xi) = O(\xi)/\log p$ si vede che (4.8) vale per $p \mid a$ e per $(p, a) = 1$.

5. *Dimostrazione delle proposizioni* (C) *e* (D).

Dalla (4.8) si deduce che

$$\Phi(\xi) = \log \Pi(\xi) = \sum_{p \mid \Pi(\xi)} l(p) \cdot \log p \leqq \sum_{p \mid \Pi(\xi)} \{ \gamma \xi^m \varepsilon \quad) \cdot p + O(\xi) \}, \tag{5.1}$$

Sia ora $\psi = K\sqrt{x \log x}$. Risulta:

$$\Phi(x) = \log \Pi(x) = \sum_{p \mid \Pi(x)} l(p) \cdot \log p = \sum_{\substack{p \leq \psi \\ p \mid \Pi(x)}} \ldots + \sum_{\substack{p > \psi \\ p \mid \Pi(x)}} \ldots$$

$$= \Sigma' l(p) \log p + \Sigma'' l(p) \log p.$$

D'altra parte, per la definizione di $Q_K(x)$;

$$\Phi(x) \qquad) \log p + \log Q_K(x) =$$

$$\cdot \varepsilon(p) \cdot p + O(x) \} + \log Q_K(x) =$$

$$= \gamma x^m \cdot o(x) + O(x)o(\psi) + \log Q_K(x)$$

$$= o(x^{m+1}) + \log Q_K(x).$$

E tenendo conto della (2.6), si ricava la relazione (D):

$$\log Q_K(x) \backsim \log \Pi(x).$$

Osserviamo che è:

$$\log \Pi(x) = o(x^{m+1}) + \sum_{\substack{p>\psi \\ p|\Pi(x)}} l(p) \log p =$$

$$= o(x^{m+1}) + \sum_{\substack{p>\psi \\ p|\Pi(x)}} \{ \gamma x^m \cdot \varepsilon(p) \cdot p + O(x) \}.$$

Ricordando che si può fissare $\varepsilon(p)$ in guisa che $\varepsilon(p) \cdot p \to +\infty$ per $p \to +\infty$, risulta:

$$\log \Pi(x) = o(x^{m+1}) + \sum_{p>\psi} \gamma x^m \varepsilon(p) \cdot p =$$

$$\leqq o(x^{m+1}) + \gamma x^m \bar{\varepsilon}(\psi) S_K(x)$$

e, per la (2.6):

$$\gamma x^m \bar{\varepsilon}(\psi) \cdot S_K(x) \geqq \gamma x^{m+1}$$

cioè:

$$S_K(x)/x \geqq \gamma/\bar{\varepsilon}(\psi) \to +\infty,$$

e questa è la proposizione (C).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Cugiani, *Sull'aritmetica dei polinomi di esponenziali a valori interi*, «Boll. U. M. I.», (3), 7, (1952), pp. 38-43.

[2] T. Nagell, *Généralisation d'un théorème de Tchebychef*, «Journal de Mathématiques» (8), 4, (1921), pp. 343-356.

[3] G. Pólya, *Arithmetische Eigenschaften...*, «Journal f. Mathematik», Bd. 151, 1920, pp. 19-21.

[4] G. Ricci, *Sull'aritmetica dei polinomi in* a^x..., «Boll. U. M. I.», 12, (1933), pp. 222-228.