Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Venini

Principio variazionale riguardante il moto periodico di sistemi olonomi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 428–438.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_428_0>

Principio variazionale riguardante il moto periodico di sistemi olonomi.

Nota di Carlo Venini (a Pavia) (*)

Sunto. - *Si stabilisce un principio variazionale riguardante il moto di sistemi olonomi e periodici, soggetti a vincoli lisci e fissi e ad una sollecitazione attiva posizionale e conservativa Tale principio viene applicato a due particolari sistemi.*

In un lavoro assai recente [1] Luttinger e Thomas, considerando un sistema olonomo periodico, ad un solo grado di libertà. soggetto a vincoli lisci e fissi e ad una sollecitazione attiva posizionale, hanno mostrato che, in corrispondenza a variazioni piccole del primo ordine della coordinata libera q^0 (soluzione esatta dell'equazione di moto) e del suo periodo T^0, si mantiene stazionario l'integrale, esteso a un periodo, della somma della funzione lagrangiana L e dell'energia totale esatta E^0. Risulta quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo:

$$\int_0^T [L(q, \dot{q}) + E^0]dt - \int_0^{T^0} [L(q^0, \dot{q}^0) + E^0]dt = 0,$$

dove q è la coordinata libera approssimata, di periodo T ed il punto sovrapposto è simbolo di derivazione rispetto al tempo.

Scopo della presente Nota è l'estensione della ricerca a Luttinger e Thomas a sistemi materiali aventi due o più gradi di libertà, nell'ipotesi che tutte le coordinate lagrangiane siano funzioni periodiche del tempo e scegliendo, naturalmente, come intervallo di integrazione il maggiore dei loro periodi Precisamente detto n il numero dei gradi di libertà, q_1^0, q_2^0, $q_3^0, \ldots, q_n^0$ le coordinate esatte, $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ quelle approssimate, supposto T_1^0 il maggiore dei periodi esatti (T_1 è quindi il maggiore dei periodi approssimati), dimostro che la differenza

$$\int_0^{T_1} [L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) + E^0]dt -$$
$$- \int_0^{T_1^0} [L(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \ldots, \dot{q}_n^0) + E^0]dt$$

(*) Pervenuta alla segreteria dell'U. M. I. il 25 ottobre 1961.

non risulta in generale uguale a zero. Tale differenza è però nulla, a meno di termini piccoli di ordine superiore al primo, nel caso particolarmente significativo in cui T_1^0 si [illegible] lo di ciascuno dei rimanenti periodi T_h^0 e T_1 di ciascuno dei [illegible] nenti periodi T_h.

Applico infine il risultato ottenuto a due particolari sistemi meccanici.

1. Consideriamo un sistema materiale olonomo, avente n gradi di libertà, soggetto a vincoli lisci e fissi e a forze attive posizionali e conservative. Siano $q_1^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_n^0$ le coordinate libere, soluzioni esatte delle equazioni di moto e funzioni periodiche del tempo t, $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ funzioni periodiche del medesimo tempo che differiscono dalle precedenti perquantità $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ piccole del primo ordine. Risulta allora

$$q_s - q_s^0 = \delta q_s \qquad (s = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Riteniamo inoltre piccole del primo ordine anche le differenze fra i periodi T_s delle coordinate approssimate ed i periodi T_s^0, di quelle esatte.

Sia infine T_1 il maggiore dei periodi T_s.

Ciò premesso, introduciamo la quantità

$$Z = \int_0^{T_1} [L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) + E^0] dt, \tag{2}$$

dove L rappresenta la funzione di LAGRANGE, differenza fra l'energia cinetica e l'energia potenziale, e la costante E^0 è l'energia totale esatta, che si determina assegnando in un particolare istante la posizione e l'atto di moto del sistema materiale.

Tenendo conto delle (1) e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo si ottiene:

$$Z = \int_0^{T_1} \left[L^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L^0}{\partial q_k^0} \delta q_k + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_k^0} \delta \dot{q}_k \right) \right] dt + E^0 T_1, \tag{3}$$

avendo posto $L(q_1^0, \dots, q_n^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_n^0) = L^0$.

Integrando per parti abbiamo:

$$\int_0^{T_1} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0} \delta \dot{q}_k dt = \left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0} \delta q_k \right]_0^{T_1} - \int_0^{T_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0} \right) \delta q_k dt.$$

La (3), ricordando la forma delle equazioni lagrangiane che reggono il movimento del sistema olonomo considerato, diventa allora:

$$(4)\quad Z=\int_0^{T_1} L^0 dt+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{T_1}\left(\frac{\partial L^0}{\partial q_k^0}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\right)\delta q_k dt+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\partial q_k\right]_0^{T_1}+E^0 T_1=$$

$$=\int_0^{T_1^0}(L^0+E^0)dt+\int_{T_1^0}^{T_1} L^0 dt+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\delta q_k\right]_0^{T_1}+E^0(T_1-T_1^0)=$$

$$=Z^0+\int_{T_1^0}^{T_1} L^0 dt+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\delta q_k\right]_0^{T_1}+E^0(T_1-T_1^0).$$

Poniamo $F(t)=\int L^0 dt$, da cui:

$$\int_{T_1^0}^{T_1} L^0 dt=F(T_1)-F(T_1^0)=F(T_1^0)+(T_1-T_1^0)\dot{F}(T_1^0)+\ldots-F(T_1^0)=$$

$$=(T_1-T_1^0)L^0(T_1^0)+\ldots,$$

dove i puntini indicano termini di ordine superiore al primo.

Osserviamo inoltre che, nella approssimazione considerata, risulta pure:

$$\left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\delta q_k\right]_0^{T_1}=\left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\delta q_k\right]_0^{T_1^0}.$$

La (4), diviene così:

$$Z=Z^0+(T_1-T_1^0)L^0(T_1^0)+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\delta q_k\right]_0^{T_1^0}+E^0(T_1-T_1^0).$$

Quest'ultima relazione può essere trasformata se si ritiene il periodo T_1 multiplo di ciascuno dei rimanenti periodi T_h e T_1^0 multiplo dei rimanenti T_h^0. Sia dunque:

$$(5)\qquad T_1=m_h T_h;\qquad T_1^0=m_h T_h^0\qquad (h=2,3,\ldots,n),$$

con $m_2, m_3, \ldots, m_n$ numeri interi. Si ha in tal caso:

$$\left|\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\delta q_k\right]_0^{T_1^0} = \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\right)_{T_1^0} \delta q_k(T_1^0) - \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\right)_0 \delta q_k(0) =$$

$$= \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\right)_{T_1^0} [\delta q_k(T_1^0) - \delta q_k(0)],$$

da cui:

$$Z = Z^0 + (T_1 - T_1^0)L^0(T_1^0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\right)_{T_1^0} [\delta q_k(T_1^0) - \delta q_k(0)] + E^0(T_1 - T_1^0) =$$

$$(6) \qquad = Z^0 + (T_1 - T_1^0)L^0(T_1^0) + \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_1^0}\right)_{T_1^0} [\delta q_1(T_1^0) - \delta q_1(0)] +$$

$$+ \sum_{h=2}^{n} \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_h^0}\right)_{T_1^0} [\delta q_h(T_1^0) - \delta q_h(0)] + E^0(T_1 - T_1^0).$$

Risulta evidentemente

$$\delta q_1(T_1^0) = q_1(T_1^0) - q_1^0(T_1^0) = q_1[T_1 + (T_1^0 - T_1)] - q_1^0(T_1^0) =$$

$$= q_1(T_1) + \dot{q}_1(T_1)(T_1^0 - T_1) - q_1^0(T_1^0) + \ldots =$$

$$= q_1(0) + \dot{q}_1^0(T_1^0)(T_1^0 - T_1) + \ldots - q_1^0(0) + \ldots =$$

$$= \delta q_1(0) + \dot{q}_1^0(T_1^0)(T_1^0 - T_1) + \ldots .$$

In base alle ipotesi (5) abbiamo inoltre:

$$(7) \quad \delta q_h(T_1^0) = q_h(T_1^0) - q_h^0(T_1^0) = q_h[T_1 + (T_1^0 - T_1)] - q_h^0(T_1^0) =$$

$$= q_h(T_1) + \dot{q}_h(T_1)(T_1^0 - T_1) - q_h^0(T_1^0) + \ldots =$$

$$= q_h(m_h T_h) + \dot{q}_h^0(T_1^0)(T_1^0 - T_1) + \ldots - q_h^0(m_h T_h^0) + \ldots =$$

$$= q_h(0) + \dot{q}_h^0(T_1^0)(T_1^0 - T_1) - q_h^0(0) + \ldots =$$

$$= \delta q_h(0) + \dot{q}_h^0(T_1^0)(T_1^0 - T_1) + \ldots .$$

La (6), nell'approssimazione considerata, assume così la seguente forma:

$$(8) \qquad Z = Z^0 + \left[L^0(T_1^0) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0}\right)_{T_1^0} \dot{q}_k^0(T_1^0) + E^0\right](T_1 - T_1^0).$$

Osserviamo che l'espressione $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}_k^0} \dot{q}_k^0 - L^0$ è la ben nota funzione di HAMILTON (costruita con le coordinate esatte q_s^0) la quale, allorchè i vincoli sono fissi, si conserva e si identifica in ogni istante con l'energia totale E^0 [2]. Dalla (8) si ricava allora:

$$\delta Z \equiv Z - Z^0 = 0. \tag{9}$$

Se il maggiore dei periodi delle coordinate libere è multiplo dei rimanenti, la quantità Z si mantiene dunque stazionaria, in coorrispondenza a variazioni del primo ordine delle coordinate libere stesse.

Per una determinazione approssimata del moto è in tal modo lecito far uso del principio variazionale (9), che viene applicato nel modo seguente. Scelte n funzioni periodiche di prova $q_1(t)$, $q_2(t), \ldots, q_n(t)$, la funzione integranda al secondo membro della (2) risulta espressa in funzione del tempo: il suo integrale definito, noto E^0, fornisce il valore Z. Tale valore dipenderà in generale dal massimo periodo T_1 (o dalla corrispondente pulsazione ω_1) e dalle ampiezze A_s delle coordinate assunte. Affinchè tali coordinate siano prossime il più possibile a quelle esatte, è necessario scegliere la pulsazione e le ampiezze in modo che Z soddisfi alla (9), ossia alle seguenti relazioni:

$$\frac{\partial Z}{\partial A_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,; \qquad \frac{\partial Z}{\partial \omega_1} = 0 \tag{9'}$$

Il risultato verrà ora applicato a due particolari sistemi meccanici.

2. *Oscillatore armonico spaziale.* Consideriamo un punto libero P, di massa M, soggetto alle tre forze elastiche attrattive $-K_1(P-C_1)$, $-K_2(P-C_2)$, $-K_3(P-C_3)$, essendo K_1, K_2, K_3 costanti positive e C_1, C_2, C_3 i piedi delle perpendicolari calate dal punto mobile sui tre piani coordinati x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 rispettivamente.

Assunte come coordinate libere le cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 di P, la funzione lagrangiana è la seguente:

$$L = \frac{1}{2} M\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_2 x_2^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} K_3 x_3^2.$$

Ritenendo il punto inizialmente nell'origine, scegliamo quali funzioni di prova

(10) $$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t);\quad x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t);\quad x_3 = A_3 \operatorname{sen}(\omega_3 t),$$

le quali riassumono il valore iniziale agli istanti $\frac{\pi}{\omega_1}, \frac{\pi}{\omega_2}, \frac{\pi}{\omega_3}$ rispettivamente. Imponiamo inoltre al periodo della prima funzione di essere multiplo dei due rimanenti, cioè

(11) $$\omega_2 = m_2\omega_1;\qquad \omega_3 = m_3\omega_1,$$

con m_2 e m_3 numeri interi.

Ciò premesso, la (2) prende la forma:

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} \left[\frac{1}{2} MA_1^2\omega_1^2 \cos^2(\omega_1 t) - \frac{1}{2} K_1 A_1^2 \operatorname{sen}^2(\omega_1 t) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} MA_2^2\omega_2^2 \cos^2(\omega_2 t) - \frac{1}{2} K_2 A_2^2 \operatorname{sen}^2(\omega_2 t) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} MA_3^2\omega_3^2 \cos^2(\omega_3 t) - \frac{1}{2} K_3 A_3^2 \operatorname{sen}^2(\omega_3 t) + E^0\right]dt.$$

Tenendo conto delle ipotesi (11), integrando si ottiene:

(12) $$Z = \frac{\pi}{4} MA_1^2\omega_1 - \frac{\pi}{4} K_1 A_1^2 \frac{1}{\omega_1} + \frac{\pi}{4} MA_2^2 m_2^2\omega_1 - \frac{\pi}{4} K_2 A_2^2 \frac{1}{\omega_1} +$$

$$+ \frac{\pi}{4} MA_3^2 m_3^2\omega_1 - \frac{\pi}{4} K_3 A_3^2 \frac{1}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1} E^0.$$

Applicando la prima delle (9′) abbiamo:

$$\frac{\partial Z}{\partial A_1} = \frac{\pi}{2} MA_1\omega_1 - \frac{\pi}{2} K_1 A_1 \frac{1}{\omega_1} = 0,$$

da cui

(13) $$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{M}};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial A_2} = \frac{\pi}{2} MA_2 m_2^2\omega_1 - \frac{\pi}{2} K_2 A_2 \frac{1}{\omega_1} = 0,\quad \frac{\partial Z}{\partial A_3} = \frac{\pi}{2} MA_3 m_3^2\omega_1 - \frac{\pi}{2} K_3 A_3 \frac{1}{\omega_1} = 0,$$

ossia:

$$\omega_1 = \frac{1}{m_2}\sqrt{\frac{K_2}{M}} = \frac{1}{m_3}\sqrt{\frac{K_3}{M}}.$$

Confrontando con le (11) si ricava:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{M}}; \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{K_3}{M}}, \tag{14}$$

Per le (11), (13) e (14) le costanti elastiche debbono in definitiva soddisfare alle relazioni:

$$\frac{K_2}{K_1} = m_2^2; \qquad \frac{K_3}{K_1} = m_3^2, \tag{15}$$

ossia i rapporti $\frac{K_2}{K_1}$ e $\frac{K_3}{K_1}$ debbono essere rispettivamente i quadrati di un numero intero.

Applicando alla (12) la seconda delle (9′) si trae:

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega_1} = \frac{\pi}{4} MA_1^2 + \frac{\pi}{4} K_1 A_1^2 \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{\pi}{4} MA_2^2 m_2^2 + \frac{\pi}{4} K_2 A_2^2 \frac{1}{\omega_1^2} +$$
$$+ \frac{\pi}{4} MA_3^2 m_3^2 + \frac{\pi}{4} K_3 A_3^2 \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{\pi E^0}{\omega_1^2} = 0. \tag{16}$$

Ricordando la (13) e le (15), dalla (16) deduciamo:

$$\frac{1}{2}(K_1 A_1^2 + K_2 A_2^2 + K_3 A_3^2) = E^0. \tag{17}$$

Osserviamo che le funzioni di prova (10) posseggono la medesima forma delle funzioni soluzioni esatte delle equazioni di moto del punto materiale. Come è quindi ben naturale, le pulsazioni (13) e (14) non differiscono dalle note pulsazioni rigorose, mentre la (17) coincide con la esatta relazione che intercede fra le ampiezze e l'energia totale.

Scegliamo ora come funzioni di prova le seguenti funzioni approssimate:

$$x_1 = A_1\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1^2 t^2}{\pi}\right); \qquad x_2 = A_2\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2^2 t^2}{\pi}\right);$$
$$x_3 = A_3\left(\omega_3 t - \frac{\omega_3^2 t^2}{\pi}\right), \tag{18}$$

le quali hanno la stessa forma della funzione usata da LUTTINGER e THOMAS nel problema dell'oscillatore armonico lineare e, come le (10), si annullano nell'istante iniziale.

Esse però, a differenza delle (10), tornano ad annullarsi solo negli istanti $\frac{\pi}{\omega_1}$, $\frac{\pi}{\omega_2}$, $\frac{\pi}{\omega_3}$ rispettivamente; di conseguenza la (7) non perde la sua validità soltanto se i periodi risultano uguali, ossia se $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \equiv \omega$. Per la seconda delle (5) il principio variazionale (9) è applicabile se anche le pulsazioni rigorose (13) e (14) coincidono il che comporta $K_1 = K_2 = K_3 \equiv K$.

La (2) assume allora la seguente forma:

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left[\frac{1}{2} M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \left(\omega^2 - \frac{4\omega^3 t}{\pi} + \frac{4\omega^4 t^2}{\pi^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} K(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \left(\omega^2 t^2 - \frac{2\omega^3 t^3}{\pi} + \frac{\omega^4 t^4}{\pi^2} \right) + E^0 \right] dt.$$

Integrando si ottiene:

$$Z = \frac{\pi}{6} M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\,\omega - \frac{\pi^3}{60} K(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \frac{1}{\omega} + \frac{\pi E^0}{\omega}. \tag{19}$$

Applicando la prima delle (9′) si ha:

$$\frac{\partial Z}{\partial A_1} = \frac{\partial Z}{\partial A_2} = \frac{\partial Z}{\partial A_3} = \frac{\pi}{3} M A_1 \omega - \frac{\pi^3}{30} K A_1 \frac{1}{\omega} = 0,$$

ossia

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{K}{M}} \cong 0.993 \sqrt{\frac{K}{M}}. \tag{20}$$

Dalla seconda delle (9′) si trae infine:

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = \frac{\pi}{6} M(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + \frac{\pi^3}{60} K(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \frac{1}{\omega^2} - \frac{\pi E^0}{\omega^2} = 0,$$

da cui, in virtù della (20),

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \frac{30}{\pi^2 K} E^0 \cong 1{,}521 \cdot \frac{2E^0}{K}. \tag{21}$$

Osserviamo che la pulsazione (20) è molto prossima alla pulsazione esatta $\sqrt{\frac{K}{M}}$, mentre la somma dei quadrati delle ampiezze fornita dalla (21) si scosta dal suo valore rigoroso $\frac{2E^0}{K}$.

3. *Bipendolo.* Come secondo esempio, consideriamo un bipendolo costituito da due gravi puntiformi P_1 e P_2 di egual massa, mobili in un piano verticale; i due gravi sono collegati da un filo di lunghezza a, mentre P_1 è collegato ad un centro fisso O da un filo di lunghezza b.

Assumiamo come coordinate libere gli angoli θ e φ che OP_1 e P_1P_2 formano con la verticale discendente; questi angoli sono quindi valutati a partire dalla posizione di equilibrio stabile.

Ci proponiamo lo studio delle piccole oscillazioni attorno a tale posizione.

Se M è la massa di ognuno dei due gravi e g l'accelerazione di gravità, la funzione di LAGRANGE è:

$$L = Mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Ma^2\dot{\varphi}^2 + Mab\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi) + 2Mgb\cos\theta + Mga\cos\varphi.$$

Trascurando nella precedente i termini piccoli di ordine superiore al secondo, si ottiene:

$$L = Mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Ma^2\dot{\varphi}^2 + Mab\dot{\theta}\dot{\varphi} - Mgb\theta^2 - \frac{1}{2} Mga\varphi^2. \tag{22}$$

Si constata con facili calcoli che, mediante la sostituzione lineare ed omogenea

$$\theta = \frac{b - a + \sqrt{b^2 + a^2}}{2b} x_1 + x_2; \quad \varphi = x_1 - \frac{b - a + \sqrt{b^2 + a^2}}{a} x_2, \tag{23}$$

la (22) diviene:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} M(b^2 + a^2 + b\sqrt{b^2 + a^2})\dot{x}_1^2 - \\ & - \frac{1}{2} Mg\left(b + \frac{a^2}{b} + \sqrt{b^2 + a^2} - \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + a^2}\right) x_1^2 + \\ & + M(b^2 + a^2 - a\sqrt{b^2 + a^2})\dot{x}_2^2 - Mg\left(\frac{b^2}{a} + a + \frac{b}{a}\sqrt{b^2 + a^2} - \sqrt{b^2 + a^2}\right) x_2^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Con l'introduzione delle due variabili x_1 e x_2, che sono puri numeri come θ e φ, la funzione L assume in tal modo la medesima forma che ad essa compete nel problema dell'oscillatore armonico piano, al quale è così ricondotto il presente problema.

Osserviamo però che il rapporto positivo

$$\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} = \sqrt{c \cdot \frac{\sqrt{1+c^2}+c}{\sqrt{1+c^2}-1}} \qquad \left(c = \frac{b}{a}\right)$$

fra le pulsazioni esatte risulta, per qualunque valore reale e positivo di c, maggiore di $1+\sqrt{2}$; di conseguenza l'intero m_2 non può essere minore di 3 e anche il rapporto fra eventuali pulsazioni approssimate deve godere di questa proprietà. Non è quindi lecito assumere funzioni di prova aventi la forma delle (18), le cui pulsazioni, per quanto detto, devono coincidere.

Ritenendo, ad esempio,

$$\frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} = 3, \tag{25}$$

operiamo invece con le seguenti funzioni:

$$x_1 = A_1\left(\omega_1 t - \frac{11}{6}\frac{\omega_1^2 t^2}{\pi} + \frac{\omega_1^3 t^3}{\pi^2} - \frac{1}{6}\frac{\omega_1^4 t^4}{\pi^3}\right); \tag{26}$$

$$x_2 = A_2\left(\omega_2 t - \frac{11}{6}\frac{\omega_2^2 t^2}{\pi} + \frac{\omega_2^3 t^3}{\pi^2} - \frac{1}{6}\frac{\omega_2^4 t^4}{\pi^3}\right),$$

la prima delle quali assume il medesimo valore agli istanti O, $\frac{\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{3\pi}{\omega_1}$, la seconda agli istanti O, $\frac{\pi}{\omega_2}, \frac{2\pi}{\omega_2}, \frac{3\pi}{\omega_2}$. Ponendo per brevità

$$M(b^2+a^2+b\sqrt{b^2+a^2}) = \alpha; \quad Mg\left(\frac{a^2}{b}+b+\sqrt{b^2+a^2}-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+a^2}\right) = \beta;$$

$$M(b^2+a^2-a\sqrt{b^2+a^2}) = \frac{1}{2}\gamma; \quad Mg\left(\frac{b^2}{a}+a+\frac{b}{a}\sqrt{b^2+a^2}-\sqrt{b^2+a^2}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon,$$

la (24) e la (25) divengono:

$$L = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}\beta x_1^2 + \frac{1}{2}\gamma\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x_2^2, \tag{24'}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} = 3\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{25'}$$

Imponiamo infine la condizione:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3. \tag{27}$$

Si ottiene allora, dopo qualche calcolo,

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} (L + E^0)dt = \frac{59\pi}{756}\alpha A_1^2\omega_1 - \frac{313\pi^3}{45360}\beta A_1^2\frac{1}{\omega_1} + \frac{15\pi}{28}\gamma A_2^2\omega_1 - \\ - \frac{3\pi^3}{560}\varepsilon A_2^2\frac{1}{\omega_1} + \frac{\pi E^0}{\omega_1}. \tag{28}$$

Annullando le derivate parziali della (28) rispetto ad A_1 e ad A_2 si ricava:

$$\omega_1 = \pi\sqrt{\frac{313}{3540}}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{29}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{10}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}. \tag{29'}$$

Dalla (29′) e dalla (27) si trae inoltre:

$$\omega_2 = \frac{3\pi}{10}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}, \tag{30}$$

mentre dalla (29) e dalla (29′) si deduce:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} \cong 2{,}98\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{31}$$

La lieve discrepanza fra la (31) e la (25′) va naturalmente attribuita al fatto che le differenze (1), pure essendo prossime a zero nell'intervallo di integrazione assunto, non sono in pratica infinitesime.

Osserviamo infine che il quoziente fra il periodo T_1 della prima delle (26) ed il periodo esatto T_1^0 è $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3540}{313}} \cong 1{,}070$, mentre il quoziente fra T_2 e T_2^0 ha il valore $\frac{10}{3\pi} \cong 1{,}060$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. M. Luttinger, R. B. Thomas, *Variational Method for Studyng the Motion of classical Vibrating Systems*, « Journ. of Math. Phys. », I (1960) p. 121.

[2] Cfr. B. Finzi, *Meccanica Razionale*, II, Bologna 1950, p. 268.