BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GERASSIMOS G. LEGATOS

Sulla limitatezza delle soluzioni di certe equazioni differenziali del secondo ordine non lineari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 439–444.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_439_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Sulla limitatezza delle soluzioni di certe equazioni differenziali del secondo ordine non lineari.

Nota di Gerassimos G. Legatos (a Firenze) (*)

Sunto. - *Si generalizzano due teoremi noti di H. A. An*[illegible]*icz e Z. Opial sulle equazioni differenziali della forma:* $\ddot{x}+(f(x)+$[illegible]$+h(x)=p(t)$ *considerando una classe di equazioni più generale.*

Résumé. - *On généralise deux théoremes dus à H. A. Antosiewicz et Z. Opial sur les équations différentielles de la forme:* $\ddot{x}+(f(x)+g(x)x)\dot{x}+$ $+h(x)=p(t)$ *en considérent de plus une classe dès équations différentielles plus générale.*

1. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\ddot{x}+(f(x)+g(x)\dot{x})\dot{x}+h(x)=p(t) \tag{1.1}$$

con le funzioni f, g, h di x, $x \in (-\infty, +\infty)$ reali continue e lipschitziane in ogni intervallo finito e la funzione $p(t)$, $t \in [t_0, +\infty) \equiv I$, reale, continua e tale che:

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\, p(t) \,|\, dt < +\infty \tag{1.2}$$

Posto:

$$a(x) = \exp \int_0^x g(u)du\,;\ b(x) \equiv \int_0^x a(u)f(u)du\,;\ H(x) \equiv \int_0^x a^2(u)h(u)du$$

supponiamo che valgano le condizioni:

i) $a(x) \leq A$, A cost. positiva, per ogni x.

ii) $b(x)h(x) \geq 0$ per ogni x e

iii) $H(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e $\lim\limits_{|x| \to +\infty} H(x) = +\infty$

oppure le condizioni:

i), *ii* bis) $xh(x) > 0$ e $xb(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e

iii) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} H(x) = +\infty$.

(*) Pervenuta alla Ssgreteria dell'U. M. I. il 28 ottobre 1961.

Dalle condizioni *i*), *ii*) e *iii*), secondo un teorema noto di ANTOSIEWICZ [1, Teor. 2, p. 66] (1), segue che ogni soluzione di (1.1), insieme con la sua derivata prima, è limitata per $t \to +\infty$.

Dalle *i*), *ii* bis) e *iii* bis), secondo un teorema noto di OPIAL [2, Teor. III, pp. 68-69], segue che vale la tesi del teorema di ANTOSIEWICZ e, di più, che per ogni soluzione $x(t)$, $t \in I$ di (1.1) si ha: $\lim_{t \to +\infty} (x^2(t) + \dot{x}^2(t)) = 0$.

Consideriamo ora l'equazione:

$$\ddot{x} + \left(x^2 - \frac{2x}{1+x^2}\dot{x}\right)\dot{x} + x = p(t) \tag{1.3}$$

cioè una equazione del tipo di (1.1), ove si è posto:

$$f(x) \equiv x^2; \quad g(x) \equiv -\frac{2x}{1+x^2}; \quad h(x) \equiv x.$$

Si ha in questo caso:

$$a(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}\,(0 < a(x) \leq 1); \quad b(x) \equiv x - \operatorname{Arctg} x \ (^2)$$

e

$$H(x) \equiv \int_0^x \frac{u\,du}{(1+u^2)^2};$$

quindi la funzione $H(x)$ resta finita per $|x| \to +\infty$ e per conseguenza i teoremi di cui sopra non si applicano all'equazione (1.3), mentre le altre condizioni (*i*, *ii*, *ii* bis) sono soddisfatte.

In questa nota si generalizzano i ricordati teoremi di ANTOSIEWICZ e OPIAL in modo che essi sussistano anche per altre classi di equazioni differenziali che comprendono anche l'equazione (1.3).

2. TEOREMA 1. - *Si consideri l'equazione differenziale* (1.1), *ove le funzioni* f, g, h *di* x, $x \in (-\infty, +\infty)$ *sono reali continue e in ogni intervallo finito lipschitziane*, p(t) *reale, continua in* $[t_0, +\infty) \equiv I$ *e soddisfa la relazione* (1.2). *Posto:*

$$a(x) \equiv \exp \int_0^x g(u)du$$

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla Bibliografia posta al termine della presente nota.

(2) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

si supponga che i) $0 < a(x) \leq A$, A *cost. positiva, per ogni* x *e* ii) *esista una funzione* $b \equiv b(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, *derivabile e tale che*: ii$_1$) $b'(x) \leq a(x)f(x)$ (3), $b(x)h(x) \geq 0$ *per ogni* x *e* ii$_2$) *posto*:

$$H^*(x) \equiv \int_0^x (a^2h + b(af - b'))_{(u)}du$$

si abbia: $H^*(x) > 0$ *per ogni* $x \neq 0$ *e* $\lim\limits_{|x| \to +\infty} H^*(x) = +\infty$.

In queste ipotesi segue che ogni soluzione x(t), $t \in I$ *di* (1.1), *insieme con la sua derivata prima, è limitata per* $t \to +\infty$.

Dimostrazione: Posto $\dot{x} = \dfrac{y - b}{a}$ si ha il sistema:

$$\dot{x} = \frac{y - b}{a}, \quad \dot{y} = -ah - (af - b')\frac{y - b}{a} + ap \tag{2.1}$$

Consideriamo ora la funzione:

$$U(x, y) \equiv (y^2 + 2H^*(x))^{1/2} \tag{2.2}$$

lungo una soluzione qualunque $\{x(t), y(t)\}$, $t \in I$ di (2.1); derivandola rispetto a t si ha:

$$U\dot{U} = -abh - (af - b')\frac{(y - b)^2}{a} + apy \tag{2.3}$$

e, per le ipotesi premesse:

$$U\dot{U} \leq apy \leq A \cdot |p| \cdot |y|;$$

di qui segue:

$$\dot{U} \leq A\,|p(t)|, \quad t \in I$$

e per l'ipotesi (1.2) sulla funzione $p(t)$, secondo un ragionamento noto [1, p. 65], si ha la tesi del teorema.

Come un'applicazione consideriamo l'equazione (1.3) e prendiamo:

$$b(x) \equiv \frac{1}{2}(x - \operatorname{Arctg} x);$$

(3) Nel Teorema 2. di ANTOSIEWICZ si prende come $b(x)$ la funzione $b(x) = \int_0^x a(u)f(u)du$, cioè $b'(x) = a(x)f(x)$ con $b(0) = 0$.

si ha allora:

$$b'(x) = \frac{x^2}{2(1+x^2)} \leqq \frac{x^2}{1+x^2} = a(x)f(x), \; b(x)h(x) \geqq 0$$

per ogni x e:

$$a^2h + b(af - b') = \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{1+x^2}(x - \operatorname{Arctg} x),$$

quindi $H^*(x) > 0$ per $x \neq 0$ e $\lim\limits_{|x| \to +\infty} H^*(x) = +\infty$, donde vale per la (1.3) la tesi del teorema già dimostrato.

3. Il teorema precedente si può generalizzare in seguente modo:

TEOREMA 2. - *Data l'equazione differenziale:*

$$\ddot{x} + (f(x) + g(x)\dot{x} + \varphi(t, x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = p(t) \tag{3.1}$$

valgano per le funzioni f, g, h, a, b, p, H* *le definizioni e ipotesi poste nel Teor.* 1 *e, inoltre, la funzione* $\varphi \equiv \varphi(t, x, z)$, $(t, x, z) \in I \times R^2$ *sia continua e lipschitziana (in* (x, z)) *ed abbia la forma:*

$$\varphi(t, x, z) \equiv P(t, x, z) \cdot (a(x)z + b(x))z$$

dove $P(t, x, z) \geqq 0$ *nel* $I \times R^2$.

In queste ipotesi vale la tesi del Teorema 1.

DIMOSTRAZIONE. - Posto $\dot{x} = \dfrac{y-b}{a}$ si ha il sistema:

$$\dot{x} = \frac{y-b}{a}, \tag{3.2}$$

$$\dot{y} = -ah - (af - b')\frac{y-b}{a} - P\left(t, x, \frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{(y-b)^2}{a} \cdot y + ap.$$

Per la funzione U, già considerata nel Teorema 1. si ha (⁴):

$$U\dot{U} = -abh - (af - b')\frac{(y-b)^2}{a} - P\left(t, x, \frac{y-b}{a}\right)\frac{(y-b)^2}{a}y^2 + apy \tag{3.3}$$

e per l'ipotesi poste: $U\dot{U} \leqq apy$; dunque la dimostrazione va come quella del Teorema 1.

(⁴) Lungo una soluzione qualunque $\{x(t), y(t)\}$, $t \in I$ del sistema (3.2).

È da osservare che nel caso particolare: $f \equiv b \equiv g \equiv 0$ (dunque $a \equiv 1$), $\varphi(t, x, z) \equiv \varphi^*(x, z) \equiv P^*(x, z)z^2$, $P^*(x, z) \geq 0$ si tratta dell'equazione:

$$\ddot{x} + \omega(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = p(t)$$

con $\omega(x, \dot{x}) = P^*(x, \dot{x})\dot{x}^2 \geqq 0$ e il nostro teorema si riduce al Teorema 1 di ANTOSIEWICZ [1, p. 64] (5) nel caso particolare $\omega(x, \dot{x}) \equiv \equiv P^*(\dot{x})\dot{x}^2$.

4. Generalizzeremo ora e nel n. 5 il teorema già ricordato di OPIAL.

TEOREMA 3. - *Si consideri l'equazione differenziale* (1.1) *e le funzioni* f, g, h, p *ed* a *soddisfino le ipotesi del Teorema* 1 *e* $xh(x) > 0$ *per ogni* $x \neq 0$. *Si supponga di più che esista una funzione* $b \equiv b(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ *derivabile e roddisfacente le condizioni:*

$b'(x) \leqq a(x)f(x)$ (6), $xb(x) > 0$ *per ogni* $x \neq 0$

$\lim_{|x| \to +\infty} H^*(x) = +\infty$, *dove la funzione* $H^*(x)$ *è definita come al Teorema* 1.

In queste ipotesi segue che ogni soluzione $x(t)$, $t \in I$ *di* (1.1), *insieme con la sua derivata prima, è limitata per* $t \to +\infty$ *e, di più, si ha* $\lim_{t \to +\infty} (\dot{x}^2(t) + x^2(t)) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. - Consideriamo al posto di (1.1) il sistema (2.1); perchè per $xh(x) > 0$, $xb(x) > 0$ segue $b(x)h(x) > 0$ (per ogni $x \neq 0$), risulta la tesi del Teorema 1, cioè se $\{x(t), y(t)\}$, $y(t) \equiv a(x(t))\dot{x}(t) + b(x(t))$, $t \in I$ è una soluzione del sistema (2.1), allora le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$ sono limitate per $t \to +\infty$.

Per la funzione U (relazione (2.2)) lungo una soluzione $\{x(t), y(t)\}$ $t \in I$ del sistema (2.1) si ha:

$$U^2(x(t), y(t)) = U^2(x(t_0), y(t_0)) - 2\int_{t_0}^{t} (abh)_{(x(u))}du - \tag{4.1}$$

$$- 2\int_{t_0}^{t} a(x(u)) \cdot (af - b')_{(x(u))}x^2(u)du + 2\int_{t_0}^{t} a(x(u))p(u)y(u)du \quad (7).$$

(5) Una generalizzazione di questo teorema fu fatta da P. SANTORO [3].

(6) Nel Teorema 3 di OPIAL si prende $b(x) = \int_0^x a(u)f(u)du$; vede anche (3) p. 3.

(7) Vede la relazione (2.3) p. 3.

Si osservi ora che per la limitazione delle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $t \in I$ e per le ipotesi fatte sulle funzioni a, b, h, p segue che:

$$\int_{t_0}^{t} (abh)_{(x(u))} du < + \infty$$

e esiste finito il $\lim\limits_{t \to +\infty} U^2(x(t), y(t))$, dunque, per un ragionamento noto [2, p. 68] si ha che $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Per la definizione della funzione U segue ora che esiste anche il $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ uguale al $\lim\limits_{t \to +\infty} U(x(t), y(t))$ (che è finito); ma $\lim\limits_{t \to +\infty} a(x(t)) = 1$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} b(x(t)) = b(0) = 0$ [8].

Quindi anche il $\lim\limits_{t \to +\infty} \dot{x}(t)$ esiste finito e questo è possibile solo nel caso che è uguale a zero.

5. È evidente ora che vale anche l'analogo del Teorema 2, cioè il

Teorema 4. - *Data l'equazione differenziale* (3.1) *valgano le ipotesi del Teorema* 3 *e per la funzione* $\varphi(t, x, z)$ *l'ipotesi del Teorema* 2. *In queste ipotesi segue la tesi del Teorema* 3.

Per la dimostrazione basta osservare che al secondo membro della relazione (4.1) del Teorema 3 si avrà di più l'addendo:

$$-\int_{t_0}^{t} G(u) du,$$

dove:

$$G(u) \equiv P(u, x(u), \dot{x}(u)) \cdot a(x(u)) \cdot \dot{x}^2(u) \cdot (a(x(u)) \cdot \dot{x}(u) + b(x(u)))^2 \geq 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Antosiewicz H. A., *On non-linear differentials equations of the second order with integrable forcing term*, « Jour. London Math. Soc. », XXX (1955), p. 64-67.

[2] Opial Z., *Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre*, « Ann. Polon. Math. », VIII (1960), p. 65-69.

[3] Santoro P., *Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare*, « Boll. Un. Math. Ital. », Serie III, XI (1956), p. 432.

(8) Perchè $xb(x) > 0$ per $x \neq 0$ e b continua.