Bollettino
Unione Matematica Italiana

Cesarina Marchionna Tibiletti

Ampliamenti di automorfismi in prodotti di gruppi permutabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 449–464.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_449_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

Ampliamenti di automorfismi in prodotti di gruppi permutabili.

Nota di CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI (a Milano) (*)

Sunto. - *Si considerano gruppi* $G = AB$ *che siano prodotto di due gruppi permutabili* A *e* B *(con* $A \cap B = 1$*) e si determinano condizioni necessarie e sufficienti perchè, dato un automorfismo* α *su* A *ed un automorfismo* β *su* B *esista un automorfismo* γ *su* G *che muti in sè rispettivamente i gruppi* A *e* B *operando su di essi come* α *e* β. *Si tratta anche una questione analoga per il caso in cui sia fissato a priori uno solo degli automorfismi su* A *e* B *e si considerano alcune altre generalizzazioni.*

Le risposte al problema in esame sono date usando sostanzialmente due trattazioni diverse: una risulta del tipo Schreier e l'altra fa uso dei prodotti completi di gruppi.

INTRODUZIONE

1. In questo lavoro si considerano gruppi $G = AB$ che siano prodotto di due gruppi permutabili A e B (¹) con $A \cap B = 1$ (²) e si determinano condizioni necessarie e sufficienti perchè, dati un automorfismo α su A ed un automorfismo β su B, esista un automorfismo γ su G che muti in sè rispettivamente i gruppi A e B, operando su di essi come α e β.

Si considera poi anche il caso in cui è dato un automorfismo su uno solo dei due gruppi A e B, per esempio β su B, e si determinano condizioni necessarie e sufficienti perchè esista un automorfismo su G che muti in sè il sottogruppo B, operando su di esso come β.

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. l'8 novembre 1961.

Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 13 del C. N. R. (1960-61).

(¹) Cfr., ad es., G. ZAPPA, *Gruppi, corpi, equazioni,* Liguori, Napoli, 1954, cap. III, § 24, pag. 61.

(²) Tale scrittura: $A \cap B = 1$, come di solito, significa che i due gruppi A e B hanno in comune solo l'unità.

Nel presente lavoro si trattano questi problemi insieme ad alcuni casi particolari ed a qualche generalizzazione.

Al quesito fondamentale posto si dà una prima risposta (teorema 1, n. 3), che si riattacca ad un'impostazione della teoria dei prodotti di gruppi permutabili iniziata da G. ZAPPA (3) e continuata da vari altri autori (4), ed è una risposta che possiamo dire del tipo SCHREIER.

In questa trattazione si presentano anche un caso particolare (teorema 2, n. 4) in cui A è sottogruppo normale di $G = AB$, ed una generalizzazione (teorema 3, n. 5).

Nella seconda parte del lavoro si considera la stessa questione, caratterizzando dapprima gli automorfismi di G che mutano rispettivamente in sè i gruppi A e B (teorema 6, n. 9) e poi quelli che mutano in sè uno solo dei sottogruppi A e B (teorema 7, n. 10), e ciò con l'uso dei prodotti completi di KRASNER e KALOUJNINE (5).

Questa trattazione si riattacca alla caratterizzazione dei prodotti di gruppi permutabili come sottogruppi di certi prodotti completi (6).

Notiamo infine che il problema trattato nel presente lavoro rientra in quello, più generale, di un analogo ampliamento di automorfismi per gruppi composti (in base a qualche legge) con due o più gruppi.

In quest'ultimo problema si inquadra anche, per esempio, quello dell'ampliamento di automorfismi di gruppi in relazione a sottogruppi normali in essi contenuti, problema trattato, nel caso generale, da G. ZAPPA (7).

PRIMA PARTE

2. Sia $G = AB$ un gruppo prodotto di due gruppi permutabili A e B, con $A \cap B = 1$.

È noto (8) che gli elementi g del gruppo G si rappresentano, in modo unico, nella forma

$$g = ab,$$

(3) Cfr. [7].
(4) Cfr., ad es. [5], anche per la bibliografia.
(5) Cfr. [1].
(6) Cfr. [2] e [4].
(7) Cfr. [6].
(8) Cfr. [7], n. 1.

con $a \in A$ e $b \in B$ e che si ha

(1) $$g = ab = b_a a_b$$

con $b_a \in B$ ed $a_b \in A$.

Chiamiamo con α_b l'applicazione su A per cui

$$a \to a_b,$$

applicazione definita da (1) quando si considerano b fisso ed a variabile; chiamiamo con β_a l'applicazione su B per cui

$$b \to b_a$$

pure definita da (1), quando, invece, si considerano a fisso e b variabile.

Si userà anche, perchè in qualche caso più significativa, la seguente nomenclatura:

$$a_b = \alpha_b(a) \quad \text{e} \quad b_a = \beta_a(b)$$

(indicando, cioè con $\alpha_b(a)$ il corrispondente di $a \in A$ per α_b ed, analogamente, con $\beta_a(b)$ il corrispondente di $b \in B$ per β_a).

Notiamo ancora che, in generale, α_b e β_a *non* sono degli automorfismi rispettivamente su A e B [9].

3. Sia α un'automorfismo sul gruppo A: indicheremo con $\alpha(a)$ il corrispondente dell'elemento $a \in A$ per α.
Analogamente, essendo β un automorfismo sul gruppo B, indicheremo con $\beta(b)$ il corrispondente di $b \in B$ per β ed essendo γ un automorfismo su G sarà $\gamma(g)$ il corrispondente di $g \in G$ per γ.

Notiamo inoltre che, in generale, le lettere a, b, g, dotate eventualmente di indici od apici contrassegneranno elementi appartenenti, rispettivamente, ai gruppi A, B, G.

Tenendo conto della precedente nomenclatura (nn. 2, 3) enunciamo il seguente

[9] Questo fatto si verifica facilmente su casi particolari (per esempio su G_{24}, gruppo totale su 4 elementi, considerato con. prodotto di un G_3 con un G_8).

TEOREMA 1. - *Sia* $G = AB$, *con* $A \cap B = 1$ *un gruppo prodotto dei due gruppi permutabili* A *e* B *e siano assegnati un automorfismo* α *su* A *ed un automorfismo* β *su* B.

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un automorfismo γ *su* G *che, rispettivamente, muti in sè i gruppi* A *e* B, *operando sugli stessi come gli automorfismi* α *e* β *è che valgano le seguenti relazioni*

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_b \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha_{\beta(b)} \\ \beta_a \cdot \beta = \beta \cdot \beta_{\alpha(a)} \end{cases} \quad ({}^{10})$$

qualunque sia $b \in B$ *ed* $a \in A$.

La condizione è necessaria.

Esista un automorfismo γ su G che subordini rispettivamente su A e su B gli automorfismi, dati, α e β, cioè

$$\gamma(a) = \alpha(a) \quad \text{per} \quad a \in A, \quad \text{qualsiasi;}$$
$$\gamma(b) = \beta(b) \quad \text{per} \quad b \in B, \quad \text{qualsiasi.}$$

In particolare (cfr. n. 2) sarà

$$\gamma(ab) = \gamma(b_a a_b), \qquad \text{cioè}$$
$$\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(b_a)\gamma(a_b), \text{ vale a dire}$$
$$\alpha(a)\beta(b) = \beta(b_a)\alpha(a_b).$$

Di qui, per (1) si ha

$$(\beta(b))_{\alpha(a)}(\alpha(a))_{\beta(b)} = \beta(b_a)\,\alpha(a_b)$$

e quindi

$$(2') \qquad \begin{cases} \alpha(a_b) = (\alpha(a))_{\beta(b)} \\ \beta(b_a) = (\beta(b))_{\alpha(a)} \end{cases}$$

Tenuto conto di quanto è detto alla fine del n. 2, queste ultime relazioni si possono scrivere nella forma

$$(2'') \qquad \begin{cases} \alpha \cdot \alpha_b(a) = \alpha_{\beta(b)} \cdot \alpha(a) \\ \beta \cdot \beta_a(b) = \beta_{\alpha(a)} \cdot \beta(b), \end{cases} \quad ({}^{11})$$

[10] Notiamo che tali relazioni esprimono rispettivamente che $\alpha_{\beta(b)}$ è trasformata di α_b per α e $\beta_{\alpha(a)}$ è trasformata di β_a per β.

[11] Ovviamente la scrittura $\alpha \cdot \alpha_b$ (a) indica — in accordo con l'uso corrente — l'elemento (di A) che si ottiene trasformando a con l'applicazione α_b ed il risultato con l'automorfismo α. Le altre scritture simili hanno un significato analogo.

la quale è equivalente alla (2) (essendo a e b elementi qualsiansi, rispettivamente di A e B).

La condizione è sufficiente.

Valgano le (2) che possiamo pensare scritte nella forma (2').

Consideriamo l'applicazione γ per cui

$$g = ab \rightarrow \alpha(a)\beta(b).$$

Tale γ subordina α su A e β su B; infatti

$$\gamma(a) = \gamma(a \cdot e) = \alpha(a) \cdot \beta(e) = \alpha(a) \cdot e = \alpha(a)$$

$$\gamma(b) = \gamma(e \cdot b) = \alpha(e) \cdot \beta(b) = e \cdot \beta(b) = \beta(b).$$

Dobbiamo verificare che γ è proprio un automorfismo su G.

Intanto ogni elemento $g = ab$ è corrispondente (in γ) di un elemento $\bar{g} = \bar{a}\,\bar{b}$, essendo $a = \alpha(\bar{a})$ e $b = \beta(\bar{b})$, in quanto α e β sono automorfismi rispettivamente su A e B.

Siano ora

$$g_1 = a_1 b_1 \quad \text{e} \quad g_2 = a_2 b_2$$

due elementi di G.

Si ha

$$\gamma(g_1) = \alpha(a_1)\beta(b_1) \quad \text{e} \quad \gamma(g_2) = \alpha(a_2)\beta(b_2).$$

Inoltre è

$$g_1 g_2 = a_1 b_1 a_2 b_2 = a_1 a_2' b_1' b_2 = (a_1 a_2')(b_1' b_2)$$

ove

$$a_2 = (a_2')_{b_1'} \quad \text{e} \quad b_1 = (b_1')_{a_2'}. \tag{3}$$

Sempre per definizione di γ si ha

$$\gamma(g_1 g_2) = \alpha(a_1 a_2')\beta(b_1' b_2) = \alpha(a_1)\alpha(a_2')\beta(b_1')\beta(b_2). \tag{4}$$

Ora

$$\gamma(g_1)\gamma(g_2) = \alpha(a_1)\beta(b_1)\alpha(a_2)\beta(b_2) =$$

$$= \alpha(a_1)\beta((b_1')_{a_2'})\alpha((a_2')_{b_1'})\beta(b_2) =$$

$$= \alpha(a_1) \cdot (\beta(b_1'))_{\alpha(a_2')} \cdot (\alpha(a_2'))_{\beta(b_1')} \cdot \beta(b_2) =$$

$$= \alpha(a_1)\alpha(a_2')\beta(b_1')\beta(b_2) = \gamma(g_1 g_2),$$

e ciò applicando rispettivamente, le (3), le (2') e la (4).

Quindi l'applicazione γ è proprio un automorfismo su G.

4. Dal precedente teorema 1 scende (usando sempre la stessa nomenclatura) il seguente

TEOREMA 2. – *Sia* G = AB *un gruppo prodotto di due gruppi permutabili* A *e* B *con* $A \cap B = 1$, *ed* A *normale in* G. *Siano assegnati due automorfismi* α *e* β *rispettivamente su* A *e* B. *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un automorfismo* γ *su* G *che, rispettivamente, muti in sè i gruppi* A *e* B *operando sugli stessi come gli automorfismi* α *e* β, *è che valga la relazione*

$$\alpha_b \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha_{\beta(b)} \tag{5}$$

qualunque sia $b \in B$.

Notiamo che per un gruppo G del tipo in questione gli elementi si scrivono (in modo unico) nella forma

$$g = ab = ba_b .$$

Ne viene ora che (cfr. nn. 2, 3) l'applicazione β_a (qualunque sia $a \in A$) è l'automorfismo identico su B e l'applicazione α_b per cui

$$a \rightarrow a_b = b^{-1}ab$$

è un automorfismo su A (subordinato dall'automorfismo interno su G che si ottiene trasformando gli elementi di G con l'elemento b).

Le (2) si riducono allora alla sola

$$\alpha_b \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha_{\beta(b)}$$

in quanto la seconda delle stesse relazioni (2) è identicamente soddisfatta.

NOTA. – Nei due teoremi precedenti le relazioni (2) e (5) si semplificano assai se uno dei due automorfismi α e β è l'automorfismo identico.

Se poi α e β sono entrambi l'automorfismo identico l'unico automorfismo γ su G che subordini tali α e β su A e B è l'automorfismo identico su G stesso.

5. Si può estendere il precedente teorema 1 nel modo che ora indicheremo.

Ricordiamo che uno stesso gruppo $G = AB$ con $A \cap B = 1$ prodotto di due gruppi permutabili A e B può essere prodotto di due gruppi A^* e B^* pure permutabili, con A^* isomorfo ad A e B^* isomorfo a B, e ciò eventualmente in più modi ([12]).

Per $G = A^*B^*$ definiamo su A^* e B^*, rispettivamente, delle applicazioni $\overset{*}{\alpha}_{b^*}$ e $\overset{*}{\beta}_{a^*}$ ($b^* \in B^*$, $a^* \in A^*$) nella stessa maniera in cui sono state definite le α_b e β_a in relazione ad A e B.

Vale allora il seguente

Teorema 3. - *Sia dato un gruppo* $\mathrm{G} = \mathrm{AB}$ *con* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = 1$; G *sia anche prodotto dei due gruppi permutabili* A^* *e* B^* (*con* $\mathrm{A}^* \cap \mathrm{B}^* = 1$) *ove* A *è isomorfo ad* A^* *nell'isomorfismo* σ *e* B *è isomorfo a* B^* *nell'isomorfismo* τ. *Condizione necessaria e sufficiente perché esista un automorfismo* γ *su* G *che muti* A *in* A^* *come* σ *e* B *in* B^* *come* τ *è che valgano le relazioni*

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma \cdot \overset{*}{\alpha}_{\tau(b)} = \alpha_b \cdot \sigma \\ \tau \cdot \overset{*}{\beta}_{\sigma(a)} = \beta_a \cdot \sigma \end{cases}$$

qualunque siano $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ *e* $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$.

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teorema 1, che si può considerare un suo caso particolare notevole, e pertanto la esponiamo brevemente.

La condizione è necessaria.

Sia γ un automorfismo su G per cui

$$\gamma(a) = \sigma(a) \quad \text{e} \quad \gamma(b) = \tau(b)$$

ove $a \in A$ e $b \in B$.

Ora

$$\gamma(g) = \gamma(ab) = \sigma(a)\,\tau(b) = \gamma(b_a a_b) = \tau(b_a)\sigma(a_b)$$

Di qui

$$\overset{*}{\beta}_{\sigma(a)}(\tau(b)) \cdot \overset{*}{\alpha}_{\tau(b)}(\sigma(a)) = \tau(b_a) \cdot \sigma(a_b) =$$

$$= \tau(\beta_a(b)) \cdot \sigma(\alpha_b(a))$$

([12]) Cfr. ad es. [3], n. 3.

da cui si ha

$$(6') \qquad \begin{cases} \alpha^*_{\tau(b)}(\sigma(a)) = \sigma(\alpha_b(a)) \\ \beta^*_{\sigma(a)}(\tau(b)) = \tau(\beta_a(b)) \end{cases}$$

che sono appunto le (6).

La condizione è sufficiente.

Consideriamo un'applicazione γ per cui

$$\gamma(g) = \gamma(ab) = \sigma(a)\tau(b).$$

Questa γ, ovviamente, subordina σ fra A ed A^* e τ fra B e B^*; inoltre ogni $g^* = a^*b^*$ è corrispondente di un g, precisamente del $g = ab$ ove $a^* = \sigma(a)$ e $b^* = \tau(b)$.

Siano ora

$$g_1 = a_1 b_1 \quad \text{e} \quad g_2 = a_2 b_2 .$$

Si ha:

$$\gamma(g_1) = \sigma(a_1)\tau(b_1), \qquad \gamma(g_2) = \sigma(a_2)\tau(b_2)$$

$$g_1 g_2 = a_1 b_1 a_2 b_2 = (a_1 a_2')(b_1' b_2)$$

ove

$$a_2 = (a_2')_{b_1'}, \qquad b_1 = (b_1')_{a_2'};$$

$$\gamma(g_1 g_2) = \sigma(a_1)\sigma(a_2')\tau(b_1')\tau(b_2);$$

ed infine

$$\gamma(g_1)\cdot\gamma(g_2) = \sigma(a_1)\cdot\tau(b_1)\cdot\sigma(a_2)\cdot\tau(b_2) = \sigma(a_1)\cdot\tau((b_1')_{a_2'})\cdot\sigma((a_2')_{b_1'})\cdot\tau(b_2) =$$

$$= \sigma(a_1)\cdot\beta^*_{\sigma(a_2')}(\tau(b_1'))\cdot\alpha^*_{\tau(b_1')}(\sigma(a_2'))\cdot\tau(b_2) =$$

$$= \sigma(a_1)\cdot\sigma(a_2')\cdot\tau(b_1')\cdot\tau(b_2) = \gamma(g_1 g_2)$$

e ciò appunto per (6).

Quindi γ è un automorfismo su G.

6. Premettiamo il seguente

LEMMA 4. - *Dato il solito gruppo* $G = AB$ *prodotto dei due gruppi permutabili* A *e* B *con* $A \cap B = 1$, *tutti e soli i gruppi* B^* *per cui* G *risulta prodotto dei due gruppi permutabili* A *e* B^* (*con* $A \cap B^* = 1$) *sono i sistemi di rappresentanti dei laterali (sinistri e destri) di* A *in* G *che formano gruppo.*

Sia B^* un sottogruppo di G per cui $G = A \cdot B^*$ con $A \cap B^* = 1$. Gli elementi di B^* saranno del tipo $a_{r_i} b_r$ con $a_{r_i} \in A$ e $b_r \in B$. Non vi possono essere in B^* due elementi distinti del tipo

$$b_i^* = a_{r_i} b_r \quad e \quad b_j^* = a_{r_j} b_r .$$

Se ciò fosse si avrebbe

$$b_i^* (b_j^*)^{-1} = a_{r_i} b_r b_r^{-1} a_{r_j}^{-1} = a_{r_i} a_{r_j}^{-1}$$

e siccome $A \cap B^* = 1$, sarebbe

$$b_i^* (b_j^*)^{-1} = 1$$

e quindi $b_i^* = b_j^*$ (ed $a_{r_i} = a_{r_j}$).

Consideriamo poi un qualsiasi $b_r \in B$, diverso dall'unita; sarà $b_r = a_h b_h^*$ (con $a_h \in A$ e $b_h^* \in B^*$) e quindi

$$b_h^* = a_h^{-1} b_r .$$

Quindi gli elementi di B^* che sono del tipo $a_{r_i} b_r$ (con b_r sempre diverso e tale che per ogni $b_r \in B$ vi è un $b_h^* = a_h b_r \in B$) formano un sistema di rappresentanti dei laterali destri di A in G.

Si può ripetere una dimostrazione analoga scrivendo $b_l^* = b_l a_r$ ($b_l^* \in B^*$) e vedere che gli elementi di B^* formano anche un sistema di rappresentanti dei laterali sinistri di A in G.

Sia ora un sistema S^* di rappresentanti dei laterali destri di A in G; sarà dato da elementi del tipo $a_{r_i} b_r$ (ove i b_r sono tutti diversi fra loro e tutti compaiono in tali $a_{r_i} b_r$).

Sia $g = a_r b_r$ un elemento di G; si può sempre scrivere

$$g = a_r b_r = (a_r a_{r_i}^{-1})(a_{r_i} b_r).$$

Quando l'insieme S^* è un gruppo B^* la presente scrittura di g dice che G è prodotto dei due gruppi permutabili A e B^* ove, ovviamente $A \cap B^* = 1$.

Osservazione. – Fra i sistemi di rappresentanti dei laterali di A in G che formano gruppo, indicati nel precedente lemma, vi sono gli eventuali trasformati di B in G (cioè i trasformati di B per gli elementi di A) diversi da B stesso ([13]).

([13]) Cfr. [3], n. 3.

Dal teorema 3 si può ora dedurre il seguente

COROLLARIO 5. - *Dati il solito gruppo* $G = AB$ *con* $A \cap B = 1$ *ed un automorfismo* α *di* A, *condizione necessaria e sufficiente perchè esista un automorfismo* γ *su* G *che muti* A *in sè, operando su* A *come* α, *è che esista un sistema* B^* *di rappresentanti dei laterali di* A *in* G, *il quale sia isomorfo a* B *secondo un isomorfismo* τ *per cui valgano le relazioni*

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot \alpha_{\tau(b)} = \alpha_b \cdot \alpha \\ \tau \cdot \beta^*_{\alpha(a)} = \beta_a \cdot \tau \end{array} \right.$$

qualunque siano $a \in A$, $b \in B$ (ove $\alpha_{\tau(b)}$ e $\beta^*_{\alpha(a)}$ sono definite come in precedenza, in relazione però al prodotto $G = AB^*$).

È ovvio, per il teorema 3 ed il lemma 4, che la condizione è sufficiente.

Infatti: il sistema B^*, in quanto è isomorfo al gruppo B, è un gruppo; risulta $G = AB^*$; ed A è automorfo ad A secondo α, B è isomorfo a B^* secondo τ, ove α e τ, verificano le (6) — in cui si ponga $\sigma = \alpha$ —.

La condizione suddetta è anche necessaria in quanto, se esiste l'automorfismo γ indicato nell'enunciato, per tale γ il gruppo B si muterà in un certo gruppo B^* per cui $G = AB^*$ poichè per ogni $g \in G$ si ha

$$\gamma(g) = \gamma(ab) = \alpha(a)\gamma(b)$$

ove gli elementi $\gamma(b)$ formano il gruppo B^* isomorfo a B.

Per il lemma 4 tale gruppo B^* è appunto un sistema di rappresentanti di laterali (sinistri o destri) di A in G.

Ciò detto, per completare la dimostrazione della condizione necessaria basta usare ancora il teorema 3 (chiamando τ l'isomorfismo subordinato da γ fra B e B^*).

SECONDA PARTE

7. Richiamiamo alcune proposizioni sui gruppi prodotto di due gruppi permutabili che ci saranno utili in seguito.

Consideriamo un gruppo $G = AB$ prodotto dei due gruppi permutabili A e B con $A \cap B = 1$; pensiamo i suoi elementi g scritti nella forma (univocamente determinata [14]) $g = ab$ (con $a \in A$ e $b \in B$) e consideriamo il Cayleyano sinistro $\smile C_G$ di G.

[14] Cfr. n. 2

Tale Cayleyano risulta essere un gruppo di sostituzioni sulle coppie (ordinate) (a, b).

Diciamo ora M_a l'insieme degli elementi di A ed M_b l'insieme degli elementi di B; sia poi $M = M_a \times M_b$ l'insieme prodotto di M_a per M_b, cioè l'insieme delle coppie $m = (a, b)$ ove $a \in M_a$ e $b \in M_b$.

Siano Γ_a il gruppo formato da tutte [15] le sostituzioni su M_a e Γ_b il gruppo formato da tutte [16] le sostituzioni su M_b; A_S il Cayleyano sinistro di A e B_S il Cayleyano sinistro di B.

Indichiamo con $\Gamma_{ab} = \Gamma_a \circ B_S$ il prodotto completo [17] di Γ_a e B_S operante appunto su M e con $\Sigma_{ab} = \Gamma_a \circ \Gamma_b$ il prodotto completo di Γ_a e Γ_b, pure operante su M.

Si ha, ovviamente,

$$\Sigma_{ab} \supseteq \Gamma_{ab}.$$

Ora, il *Cayleyano* C_G *suddetto è un sottogruppo del prodotto completo* Γ_{ab} avente certi determinati caratteri [18] e quindi è anche sottogruppo del prodotto completo Σ_{ab}.

In seguito ogni $G = AB$ lo penseremo, in generale, rappresentato dal suo Cayleyano sinistro e quindi immerso in Γ_{ab} o in Σ_{ab}.

8. Consideriamo un assegnato gruppo astratto $G = AB$ del tipo suddetto. Come in precedenza indicheremo gli elementi del gruppo A con a (minuscolo) dotato eventualmente di un indice o di un apice o altro contrassegno.

Analogamente indicheremo gli elementi di B con la lettera b, eventualmente dotata di un indice od un apice o altro contrassegno.

Supponiamo ora che il gruppo $G = AB$ sia immerso in Γ_{ab} (o Σ_{ab}) nel modo indicato al n. 7 e chiamiamo con $\tilde{G}$ tale immagine di G in Γ_{ab} (o Σ_{ab}). Indichiamo con $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ le immagini (in Γ_{ab} o Σ_{ab}), dei gruppi A e B, contenute in $\tilde{G}$.

L'elemento $a_i b_j$ di G risulta rappresentato in $\tilde{G}$ dalla sostitu-

(15) Naturalmente si potrà parlare di un tale Γ_a solo quando questo « *tutte* » ha un significato. Cfr. la nota (4) di [2].

(16) Vale anche qui un'osservazione analoga a quella contenuta in (15).

(17) Cfr. [2], n. 2.

(18) Cfr. [2], nn. 3, 4, ove si trovano notizie più dettagliate in proposito.

zione $S_{a_i b_j}$ per cui, ponendo $a_i b_j a_h b_k = \bar{a}_h \bar{b}_k$, si ha

$$(a_h, b_k) \to (\bar{a}_h, \bar{b}_k),$$

qualunque sia $(a_h, b_k) \in M$.

In particolare l'elemento a_i di A è rappresentato in $\tilde{A}$ dalla sostituzione S_{a_i} per cui

$$(a_h, b_k) \to (a_i a_h, b_k)$$

qualunque sia $(a_h, b_k) \in \mathrm{M}$.

9. Si può ora dimostrare il seguente

Teorema 6. - *Sia dato un gruppo, astratto,* $\mathrm{G} = \mathrm{AB}$ *prodotto dei due gruppi permutabili* A *e* B *con* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = 1$; *consideriamo l'immagine* $\tilde{\mathrm{G}} = \tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}$ *di* G, *immersa in* Σ_{ab}. *Vale allora la proprietà: «tutti e soli gli automorfismi di* $\tilde{\mathrm{G}}$ *che lasciano fermi rispettivamente i gruppi* $\tilde{\mathrm{A}}$ e $\tilde{\mathrm{B}}$ *si ottengono operando su* $\tilde{\mathrm{G}}$ *con gli automorfismi interni di* Σ_{ab} *realizzati trasformando* Σ_{ab} *con tutti gli elementi del sottogruppo* $\mathrm{N}_\Sigma(\tilde{\mathrm{A}}, \tilde{\mathrm{B}})$ *di* Σ_{ab} *che è l'intersezione dei normalizzanti di* $\tilde{\mathrm{A}}$ *e* $\tilde{\mathrm{B}}$ *in* Σ_{ab} *stesso.*

Sia ora γ un automorfismo di G che muta rispettivamente in sè i due gruppi A e B.

Tale γ operando sugli elementi $g = a_h b_k$ dà luogo alla sostituzione

$$a_h b_k \to a_h' b_k'$$

ove a_h' e b_k' sono rispettivamente i trasformati di a_h e b_k per γ (gli apici aggiunti ai simboli a_h e b_k indicano ora rispettivamente i trasformati per γ di a_h e b_k). Tale sostituzione, che opera sulle coppie (a_h, b_k), risulta essere un elemento S_γ di Σ_{ab} (19).

Calcoliamo $S_\gamma^{-1} S_{a_i b_j} S_\gamma$; per S_γ^{-1} si ha

$$(a_h', b_k') \to (a_h, b_k);$$

per $S_{a_i b_j}$ si ha

$$(a_h, b_k) \to (\bar{a}_h, \bar{b}_k)$$

(19) Infatti la sostituzione sulle sole a_k subordinata da S_γ appartiene a Γ_a, ed, a parità di a_k, quella sulle b_k appartiene a Γ_b. Cfr. [1], § 1.

ove $\bar{a}_h\bar{b}_k = a_i b_j a_k b_k$ (cfr. n. 8) ed infine per S_γ

$$(\bar{a}_h, \bar{b}_k) \rightarrow (\bar{a}_k', \bar{b}_k')$$

ove $\bar{a}_h'\bar{b}_k' = a_i'b_j'a_h'b_k'$

Quindi (cfr. n. 8) si ha

$$S_\gamma^{-1} S_{a_i b_j} S_\gamma = S_{a_i' b_j'},$$

in quanto (a_h', b'_k) percorre tutto M (essendo γ un automorfismo su G) ed $a_i'b_j'$ è il corrispondente di $a_i b_j$ per γ.

Allora ogni automorfismo γ di G che muta A e B in sè rispettivamente, è realizzato su $\tilde{G}$ (qualora si ritengano corrispondenti gli elementi $a_i b_j \in G$ ed $S_{a_i b_j} \in \tilde{G}$) operando su $\tilde{G}$ stesso, con un certo automorfismo interno di Σ_{ab}, che si ottiene trasformando gli elementi di Σ_{ab} con la precedente sostituzione S_γ (che appunto appartiene a Σ_{ab}).

Ovviamente, le S_γ considerate mutano in sè l'insieme delle sostituzioni S_{a_i} che (al variare di $a_i \in A$) formano il gruppo $\tilde{A}$ e l'insieme delle sostituzioni S_{b_j} che (al variare di $b_j \in B$) formano il gruppo $\tilde{B}$.

Quindi S_γ appartiene al normalizzante $N_\Sigma(\tilde{A})$ di $\tilde{A}$ in Σ_{ab} ed al normalizzante $N_\Sigma(\tilde{B})$ di $\tilde{B}$ in Σ_{ab} e pertanto al sottogruppo $N_\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}) = N_\Sigma(\tilde{A}) \cap N_\Sigma(\tilde{B})$.

Sia ora S una qualsiasi sostituzione appartenente ad $N_\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Una tale S trasforma in sè il gruppo $\tilde{A}$ e trasforma in sè il gruppo $\tilde{B}$; quindi essa trasforma in sè anche $\tilde{G} = \tilde{A}\tilde{B}$ prodotto dei due gruppi permutabili $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ (con $\tilde{A} \cap \tilde{B}) = 1$).

Pertanto la S subordina su $\tilde{G}$ un automorfismo, trasformandolo in sè.

Con ciò il teorema è dimostrato.

Nota. - Aggiungiamo due semplici osservazioni immediatamente suggerite dal precedente teorema 5.

I) Dato il solito gruppo $G = AB$, il gruppo $N_\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$ può anche appartenere al centralizzante di $\tilde{G}$ in Σ_{ab}. In tal caso non vi è alcun automorfismo γ diverso da quello identico che muti in sè rispettivamente i gruppi A e B. Anzi: « *condizione necessaria e sufficiente perchè non vi sia alcun automorfismo di* G *diverso da quello identico, che muti in sè i sottogruppi* A *e* B *è che il gruppo* $N_\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$ *sia contenuto nel centralizzante di* $\tilde{G}$ *in* Σ_{ab} ».

II) Siano dati il gruppo $G = AB$ (con le solite condizioni), un automorfismo α di A ed un automorfismo β di B: « *la condi-*

zione necessaria e sufficiente perchè esista un automorfismo γ *di* G *che muti in sè rispettivamente i sottogruppi* A *e* B *operando su essi come gli automorfismi* α *e* β *è che esista in* $N_\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$ *una sostituzione la quale trasformi, rispettivamente, in sè* $\tilde{A}$ *e* $\tilde{B}$ *operando come la* α *e la* β *stessa* ([20]).

10. Vale infine il seguente

TEOREMA 7. - *Sia dato il gruppo astratto* $G = AB$ *prodotto dei due gruppi permutabili* A *e* B *con* $A \cap B = 1$; *consideriamo l'immagine* $\tilde{G} = \tilde{A}\tilde{B}$ *di* G *immersa in* Σ_{ab}. *Vale allora la seguente proprietà: «tutti e soli gli automorfismi di* $\tilde{G}$ *che lasciano fermo il gruppo* $\tilde{B}$ *si ottengono operando su* $\tilde{G}$ *con gli automorfismi interni di* Σ_{ab} *realizzati trasformando* Σ_{ab} *con gli elementi del sottogruppo* $N_\Sigma(\tilde{G}, \tilde{B})$, *di* Σ_{ab}, *che è l'intersezione dei normalizzanti di* $\tilde{G}$ *e di* $\tilde{B}$ *in* Σ_{ab} *stesso».*

Sia γ un automorfismo su G che muta in sé B secondo un certo automorfismo β e muta A in un sottogruppo A^* di G, in generale diverso da A.

Si avrà per $g = a_h b_k \in G$ ($a_h \in A$ e $b_k \in B$):

$$\gamma(g) = \gamma(a_h b_k) = \gamma(a_h)\beta(b_k).$$

Sia

$$\gamma(a_h) = a_h^* \in A^* \quad \text{e} \quad \beta(b_k) = b_k' \in B.$$

Scriviamo

$$a_h^{*\prime} = a_h'' b_h'' \qquad (\text{con } a_h'' \in A \quad \text{e} \quad b_h'' \in B);$$

allora sarà

$$\gamma(a_h b_k) = a_h''(b_h'' b_k').$$

Applichiamo ora il lemma 4 (scambiando l'ufficio che ivi ha B con quello di A e viceversa); al variare di $a_h \in A$ le corrispondenti a_h^*, descrivono un sistema di rappresentanti dei laterali di B in G e quindi le a_h'' (per cui $a_h^{*\prime} = a_h'' b_h''$) sono tutte diverse fra di loro.

([20]) Una volta fissate le solite corrispondenze fra gli elementi di G e $\tilde{G}$ e di conseguenza di A ed $\tilde{A}$, di B e $\tilde{B}$.

Ne viene che la sostituzione S_γ, per cui

$$(a_h, b_k) \rightarrow (a_h'', b_h''b_k')$$

appartiene a Σ_{ab}; infatti la sostituzione $a_h \rightarrow a_h''$ appartiene a Γ_a ed a parità di a_h la sostituzione

$$b_k \rightarrow b_h''b_k'$$

appartiene a Γ_b.

Calcoliamo ora $S_\gamma^{-1} S_{a_i b_j} S_\gamma$: per la S_γ^{-1} si ha

$$(a_h'', b_h''b_k') \rightarrow (a_h, b_k)$$

ove $(a_h'', b_h''b_k')$ descrive tutto l'insieme $M = M_a \times M_b$; per la $S_{a_i b_j}$ si ha

$$(a_h, b_k) \rightarrow (\bar{a}_h, \bar{b}_k)$$

ove

$$\bar{a}_h \bar{b}_k = a_i b_j a_h b_k$$

ed infine per S_γ

$$(\bar{a}_h, \bar{b}_k) \rightarrow (\bar{a}_h'', \bar{b}_h''\bar{b}_k')$$

ove

$$\bar{a}_h''\bar{b}_h''\bar{b}_k' = a_i''b_i''b_j'a_h''b_h''b_k'.$$

Ciò dice che

$$S_\gamma^{-1} S_{a_i b_j} S_\gamma = S_{a_i''(b_i''b_j')} = S_{\gamma(a_i b_j)}.$$

Allora ogni automorfismo γ di G che muta B in sè è realizzato su $\tilde{G}$ (qualora si ritengano corrispondenti gli elementi $a_i b_j \in G$ ed $S_{a_i b_j} \in \tilde{G}$) operando su $\tilde{G}$ stesso con un certo automorfismo interno di Σ_{ab}, che si ottiene trasformando gli elementi di Σ_{ab} con la precedente sostituzione S_γ.

Ovviamente, le S_γ considerate mutano in sé l'insieme delle sostituzioni S_{b_j} che (al variare di $b_j \in B$) formano il gruppo $\tilde{B}$.

Quindi S_γ appartiene al normalizzante $N_\Sigma(\tilde{G})$ di $\tilde{G}$ in Σ_{ab} ed al normalizzante $N_\Sigma(\tilde{B})$ di $\tilde{B}$ in Σ_{ab} e pertanto al sottogruppo $N_\Sigma(\tilde{G}, \tilde{B}) = N_\Sigma(\tilde{G}) \cap N_\Sigma(\tilde{B})$.

Sia ora S una sostituzione qualsiasi appartenente ad $N_\Sigma(\tilde{G}, \tilde{B})$.

Una tale S trasforma in sè il gruppo $\tilde{G}$ e trasforma in sè il gruppo $\tilde{B}$ e quindi soddisfa alle condizioni del teorema che così risulta completamente dimostrato.

NOTA. – Si possono qui fare osservazioni analoghe a quelle poste alla fine del n. 9. Vi acceniamo brevemente.

I « *Condizione necessaria e sufficiente perchè non vi sia alcun automorfismo di* G *diverso da quello identico che muti in sè il sottogruppo* B *è che il gruppo* $N_\Sigma(\tilde{G}, \tilde{B})$ *appartenga al centralizzante di* $\tilde{G}$ *in* Σ_{ab} ».

II) « *La condizione necessaria e sufficiente perchè esista un automorfismo* γ *di* G *che muti in sè il sottogruppo* B *operando su di esso con un automorfismo assegnato* β *è che esista in* $N_\Sigma(\tilde{G}, \tilde{B})$ *una sostituzione la quale trasformi in sè* $\tilde{B}$, *operando come la* β *stessa* (una volta fissata la solita corrispondenza fra B e $\tilde{B}$ ([21])).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. KRASNER e L. KALOUJNINE, *Produit complet des groupes de permutation et problème d'extension de groupes*, I, II, III, « Acta scientiarum mathematicarum », Szeged, **13** (1949-50), pag. 208, **14** (1951-52) pag. 39 e pag. 69.

[2] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Sul prodotto di gruppi permutabili*, « Annali di Matematica », **43** (1957), pag 341.

[3] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Sui prodotti ordinati di gruppi finiti*, « Bollettino dell'U. M. I. », (3) vol. **13**, pag. 46.

[4] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Prodotti completi e prodotti di gruppi permutabili*, « Atti del Convegno della teoria dei gruppi finiti », Firenze 1960, pag. 31.

[5] J. SZÉP, *Sui gruppi fattorizzabili*, « Atti del Convegno della teoria dei gruppi finiti », Firenze 1960, pag. 20.

[6] G. ZAPPA, *Sull'ampliamento degli automorfismi*, « Rend. Sem. Matem. Univ. Roma », (4) **3**, (1939), pag. 134.

[7] G. ZAPPA, *Sulla costruzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili fra loro*, « Atti del 2° Congresso dell'U. M. I. », Bologna, 1940

([21]) Cfr. ([20]).