Natalia Berruti Onesti

A proposito delle estremali relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 465–475.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_465_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

A proposito delle estremali relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica. (*)

Nota di NATALIA BERRUTI ONESTI (a Pavia) (**)

Sunto. - *La presente Nota contiene due risultati che riguardano l'uno le estremali relative all' integrale*

$$\mathfrak{I}_C = \int_C F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')ds,$$

l'altro le estremali relative agli integrali

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ u_2,\ v_2,\ w_2)ds,$$

$$\mathfrak{I}^{(3)}_{C^{(3)}} = \int_{C^{(3)}} F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ u_2,\ v_2,\ w_2;\ u_3,\ v_3,\ w_3)ds,$$

dove il parametro s è la lunghezza dell'arco rettificato ed è $u_2 = x'y'' - x''y'$, $v_2 = y'z'' - y''z'$, $w_2 = z'x'' - z''x'$, $u_3 = x'y''' - x'''y'$, $v_3 = y'z''' - y'''z'$, $w_3 = z'x''' - z'''x'$. *Vale a dire, considerate le equazioni delle estremali relative all'integrale* $\mathfrak{I}_C$, *si ottiene da queste un'unica equazione analoga a quella di Weierstrass per il caso parametrico piano; d'altra parte si fanno alcune considerazioni in merito all'esistenza delle derivate successive per le estremali relative agli integrali* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *e* $\mathfrak{I}^{(3)}_{C^{(3)}}$.

Résumé. - *Des équations des extremales relatives à l'intégrale*

$$\mathfrak{I}_C = \int_C F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')ds$$

on déduit un'unique équation analogue à celle de Weierstrass pour le cas parametrique plan. D'ailleurs on remarque quelques considérations par rapport au théoreme d'existence des dérivées successives pour les extremales relatives aux integrales

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ u_2,\ v_2,\ w_2)ds,$$

$$\mathfrak{I}^{(3)}_{C^{(3)}} = \int_{C^{(3)}} F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ u_2,\ v_2,\ w_2;\ u_3,\ v_3,\ w_3)ds.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 19 del Comitato per la Matematica del CNR per l'anno accademico 1961-62.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 13 novembre 1961.

La presente Nota, che si collega ad una nostra precedente ricerca [1], contiene due risultati, di natura diversa l'uno dall'altro, riguardanti l'uno le estremali relative all'integrale

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{I}_C = \int_C F(x,\ y,\ z\,;\ x',\ y',\ z')ds,$$

l'altro le estremali relative agli integrali

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x,\ y,\ z\,;\ x',\ y',\ z'\,;\ u_2,\ v_2,\ w_2)ds$$

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{I}^{(3)}_{C^{(3)}} = \int_{C^{(3)}} F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ u_2,\ v_2,\ w_2;\ u_3,\ v_3,\ w_3)ds,$$

dove, essendo s la lunghezza dell'arco rettificato, è

$$u_2 = x'y'' - x''y', \qquad v_2 = y'z'' - y''z', \qquad w_2 = z'x'' - z''x',$$
$$u_3 = x'y''' - x'''y', \qquad v_3 = y'z''' - y'''z', \qquad w_3 = z'x''' - z'''x'.$$

Nel § 1 si rileva, in merito alle equazioni delle estremali relative alla funzione $F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')$, come da queste si può ottenere un'unica equazione (che, salvo in un caso particolare [2], non ci risulta sia stata rilevata) analoga a quella di WEIERSTRASS nota per il caso parametrico piano [3], mediante l'introduzione della funzione F_1 [4] che interviene in alcuni problemi variazionali relativi all'integrale (I).

(1) N. BERRUTI ONESTI, *Sopra le estremali relative ad integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica*, « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV, T. LII, (1960), pp. 79-106.

(2) Cfr. n. 2, b).

(3) Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Due volumi (N. Zanichelli, Bologna, 1921-1923). Cfr. Vol. II, Cap. II, § 2, n. 33, a) e n. 35, a).

(4) Per quanto riguarda il modo in cui è definita la funzione F_1 relativa a problemi variazionali dello spazio, cfr. la (2) del n. 1 della presente Nota; le identità che vi figurano seguono, come è facile verificare, dalla considerazione del sistema (8) dello stesso n. 1.

In merito a tale funzione vedi, per es.,: M. MASON e G. BLISS, *The properties of curves in space whit minimize a definite integral*, « Transactions of the American Mathematical Society », vol. 9, (1908), pp. 440-466; cfr. § 1. L. TONELLI, *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », T. XXXV, (1913), pp. 49-73; cfr. § IV, n. 21.

Nel § 2, in merito al problema dell'esistenza delle derivate successive per le estremali relative agli integrali (II) e (III) [5], si pone in rilievo come l'esistenza di tali derivate è assicurata sotto ipotesi analoghe a quelle che si trovano in altri casi (relativi sia alla forma parametrica che a quella ordinaria) precedentemente considerati da altri autori [6].

Tale rilievo è basato sul teorema, che forma oggetto del n. 4, riguardante le estremali di ordine 2 relative alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$, il quale si può estendere (n. 5) al caso delle estremali di ordine 3 relative alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$. Peraltro, per quanto la condizione rilevata nella presente Nota sia più espressiva, quella che figura nel n. 6 (e così pure l'analoga del n. 15) della Memoria citata in [1] presenta, come si osserva al n. 3, maggiore generalità.

§ 1.

1. Dimostriamo come dalle equazioni delle estremali relative alla funzione $F(x, y, z; x'. y', z')$ [7]

$$\left\{\begin{aligned} & F_x - \frac{dF_{x'}}{ds} = 0 \\ & F_y - \frac{dF_{y'}}{ds} = 0 \\ & F_z - \frac{dF_{z'}}{ds} = 0 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

si può ottenere, sotto opportune ipotesi, una equazione analoga a quella di WEIERSTRASS [8] relativa al caso parametrico piano.

[5] Cfr. luogo cit. in [1], § 1, n. 6 e § , n. 15.

[6] Cfr. nota a piè di pag. [14].

[7] Ricordiamo che, chiamando campo A un insieme di punti dello spazio (x, y, z) contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito, la funzione F si suppone definita e continua in ogni punto (x, y, z) di un campo A e per ogni terna di numeri reali non tutti nulli (x', y', z') assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine, positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x', y', z', e tale che sia $F(x, y, z; 0, 0, 0) = 0$. Si intende, nel presente numero, che tali ipotesi siano soddisfatte.

Altre generalità si possono facilmente dedurre da quelle analoghe relative al caso parametrico piano. Vedi L. TONELLI, opera cit. in [3], Vol. I, Cap. V, § 1, n. 73, e § 2, n. 80, Vol. II, Cap. II, § 2, n. 32, *b*) e n. 35, a).

[8] Vedi luogo cit. in [3].

Supponiamo, a tale scopo, che *in ogni punto* (x, y, z) *di* A *e per ogni terna di numeri reali non tutti nulli* (x', y', z') *esistano finite e continue le derivate parziali del primo ordine delle funzioni* $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$. *Allora, considerata la funzione*

$$(2)\quad F_1(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{z'^2}\begin{vmatrix} F_{x'x'} & F_{x'y'} \\ F_{y'x'} & F_{y'y'} \end{vmatrix} = \frac{1}{x'^2}\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{y'^2}\begin{vmatrix} F_{z'z'} & F_{z'x'} \\ F_{x'z'} & F_{x'x'} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x'y'}\begin{vmatrix} F_{z'z'} & F_{z'x'} \\ F_{z'y'} & F_{x'y'} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{y'z'}\begin{vmatrix} F_{x'x'} & F_{x'y'} \\ F_{x'z'} & F_{y'z'} \end{vmatrix} = -\frac{1}{z'x'}\begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{y'x'} & F_{z'x'} \end{vmatrix},$$

se

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s), \qquad (0 \leq s \leq L)$$

(dove s è la lunghezza dell'arco rettificato) è un'estremale relativa alla funzione F, per ogni valore s di $(0, L)$ *in cui è*

$$(3)\qquad F_1(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s)) \neq 0,$$

si ha (⁹)

$$(4)\qquad \frac{1}{R^2} = \frac{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 + \Sigma_3^2}{F_1^2},$$

dove $\frac{1}{R}$ *è la flessione e dove, posto per brevità* (¹⁰)

$$5)\qquad A = F_{yz'} - F_{y'z}, \qquad B = F_{zx'} - F_{z'x}, \qquad C = F_{xy'} - F_{x'y}$$

(⁹) Sotto tali ipotesi esistono finite e continue, per ogni valore s di $(0, L)$ in cui è soddisfatta la (3), le derivate $x''(s)$, $y''(s)$, $z''(s)$. Cfr. luogo cit. in (¹), § 1, n. 7, Oss. I.

(¹⁰) Si intende, qui e per il seguito del presente numero, che le derivate parziali del primo e del secondo ordine della funzione F sono calcolate in $(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s))$. Inoltre, per brevità, indicheremo semplicemente con x', y', z', x'', y'', z'' le derivate dei primi due ordini delle funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$.

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_1 &= AF_{x'x'} + BF_{x'y'} + CF_{x'z'} \\ \Sigma_2 &= AF_{y'x'} + BF_{y'y'} + CF_{y'z'} \\ \Sigma_3 &= AF_{z'x'} + BF_{z'y'} + CF_{z'z'} \,. \end{aligned} \right.$$

Infatti dalle (1), eseguendo le derivazioni e tenendo presente che dalla positiva omogeneità di grado 1 della funzione F rispetto a x', y', z' seguono le identità

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= x'F_{xx'} + y'F_{xy'} + z'F_{xz'} \\ F_y &= x'F_{yx'} + y'F_{yy'} + z'F_{yz'} \\ F_z &= x'F_{zx'} + y'F_{zy'} + z'F_{zz'} \,, \end{aligned} \right.$$

si ha, ricordando le (5),

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} F_{x'x'}x'' + F_{x'y'}y'' + F_{x'z'}z'' &= y'C - z'B \\ F_{y'x'}x'' + F_{y'y'}y'' + F_{y'z'}z'' &= z'A - x'C \\ F_{z'x'}x'' + F_{z'y'}y'' + F_{z'z'}z'' &= x'B - y'A \end{aligned} \right. \text{[11].}$$

Tenendo presente che, in virtù della positiva omogeneità di grado 1 della funzione F rispetto a x', y', z', valgono le identità

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'F_{x'x'} + y'F_{x'y'} + z'F_{x'z'} &= 0 \\ x'F_{y'x'} + y'F_{y'y'} + z'F_{y'z'} &= 0 \\ x'F_{z'x'} + y'F_{z'y'} + z'F_{z'z'} &= 0, \end{aligned} \right.$$

il sistema (7), considerato come un sistema algebrico lineare nelle incognite x'', y'', z'', per qualunque valore s di $(0, L)$ ha il determinante dei coefficienti nullo, e, come si può verificare tenendo presenti le (2), sono nulli anche gli altri tre minori di ordine 3 estratti dalla matrice dei coefficienti e dei termini noti. Inoltre, se s è un valore di $(0, L)$ in cui è soddisfatta la (3), dalle (2) segue

[11] A partire da questo punto si potrebbe procedere in modo diverso da quello seguito, considerando, assieme alle (7), la identità $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$, valida quando il parametro che interviene nella rappresentazione parametrica dell'estremale considerata è la lunghezza dell'arco rettificato. La dimostrazione riportata nel testo offre però il vantaggio di procedere in modo indipendente dalla scelta del parametro, cosicchè si giunge direttamente anche alla equazione che figura nel n. 2, a) della presente Nota.

che per tale valore s, poichè almeno una delle tre derivate x', y', z' è diversa da zero, la matrice dei coefficienti ha caratteristica 2. Allora, supposto che per il valore s considerato sia, per fissare le idee, $z' \neq 0$, risolvendo il sistema formato dalle prime due delle (7) rispetto a x'' e y'', tenendo presenti le (8) e tenuto conto delle (2) e delle (6), otteniamo

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= z'' \frac{x'}{z'} - \frac{\Sigma_2}{z' F_1} \\ y'' &= z'' \frac{y'}{z'} + \frac{\Sigma_1}{z' F_1}, \end{aligned} \right.$$

da cui segue

$$\text{(10)} \qquad \left\{ \begin{aligned} z'x'' - z''x' &= -\frac{\Sigma_2}{F_1} \\ y'z'' - y''z' &= -\frac{\Sigma_1}{F_1}. \end{aligned} \right.$$

Inoltre, moltiplicando ambo i membri della prima e seconda delle (9) rispettivamente per y' e x', sottraendo membro a membro la prima dalla seconda, e tenendo presente che dalle (6), in virtù delle (8), segue

$$x' \Sigma_1 + y' \Sigma_2 + z' \Sigma_3 = 0,$$

si ottiene

$$\text{(11)} \qquad x'y'' - x''y' = -\frac{\Sigma_3}{F_1}.$$

Allo stesso risultato si perviene nel caso in cui, per il valore s considerato, sia $x' \neq 0$, oppure $y' \neq 0$.

Allora, elevando al quadrato ambo i membri delle (10) e (11), sommando membro a membro, e tenendo presente che, poichè s è la lunghezza dell'arco rettificato, si ha

$$\frac{1}{R^2} = (x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2,$$

si ottiene la (4).

2. Osservazioni. – *a*) Dalla dimostrazione del n. 1 segue immediatamente che, se il parametro che interviene nella rappresentazione parametrica dell'estremale considerata non è la lunghezza

dell'arco rettificato, si perviene, in luogo della (4), all'equazione

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\Sigma_1^2+\Sigma_2^2+\Sigma_3^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3F_1^2}.$$

b) Nel caso particolare in cui la funzione $F(x, y, z; x', y', z')$ ha la forma $F=\varphi(x, y, z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}+\varphi_1(x, y, z)x'+$ $+\varphi_2(x, y, z)y'+\varphi_3(x, y, z)z'$, A. CHIELLINI era pervenuto ad una equazione che rientra, come caso particolare, nella (4) ([12]).

§ 2.

3. Nel n. 6 della Memoria citata in ([1]) si dimostra, sotto opportune ipotesi, l'esistenza delle derivate successive per un'estremale

$$x=x(s),\qquad y=y(s),\qquad z=z(s),\qquad (0\leq s\leq L)$$

(dove s è la lunghezza dell'arco rettificato) di ordine 2 relativa alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$, per ogni valore s di $(0, L)$ in cui è

$$D=x'^2\begin{vmatrix}F_{u_2u_2} & F_{u_2w_2}\\ F_{w_2u_2} & F_{w_2w_2}\end{vmatrix}+y'^2\begin{vmatrix}F_{v_2v_2} & F_{v_2u_2}\\ F_{u_2v_2} & F_{u_2u_2}\end{vmatrix}+ \tag{12}$$
$$+z'^2\begin{vmatrix}F_{w_2w_2} & F_{w_2v_2}\\ F_{v_2w_2} & F_{v_2v_2}\end{vmatrix}+2x'y'\begin{vmatrix}F_{u_2v_2} & F_{u_2u_2}\\ F_{v_2w_2} & F_{u_2w_2}\end{vmatrix}+$$
$$+2y'z'\begin{vmatrix}F_{v_2w_2} & F_{v_2v_2}\\ F_{w_2u_2} & F_{v_2u_2}\end{vmatrix}+2x'z'\begin{vmatrix}F_{w_2u_2} & F_{w_2w_2}\\ F_{u_2v_2} & F_{w_2v_2}\end{vmatrix}\neq 0$$

(dove le derivate parziali della funzione F si intendono calcolate in $(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s); u_2(s), v_2(s), w_2(s))$ e con x', y', z' si sono brevemente indicate le derivate $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$), ed una analoga condizione interviene nel teorema di esistenza delle derivate successive per un'estremale di ordine 3 relativa alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2. v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$ ([13]).

([12]) A. CHIELLINI, *Ricerche di Calcolo delle Variazioni*, « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV, T. XIII, (1935), pp. 41-54; cfr. § IV, n. 13.

([13]) Vedi luogo cit. in ([1]), § 1, n. 6 e § 2, n. 15. Per le generalità rinviamo alla Memoria citata in ([1]), § 1, n. 1 e n. 3, § 2, n. 11 e n. 13. Ci

D'altra parte nel caso piano, parametrico e ordinario, ed in quello parametrico del primo ordine nello spazio ([14]), l'esistenza delle derivate successive è assicurata in ogni punto dell'estremale in cui è soddisfatta, in luogo della (12), la disuguaglianza che interviene nella definizione di integrale regolare ([15]).

Ora, tenuta presente la definizione di integrale regolare rela-

limitiamo a ricordare che le ipotesi relative alle funzioni $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$ e $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$ sono analoghe a quelle esposte in ([7]) a proposito della funzione $F(x, y, z; x', y', z')$, e che si considerano gli integrali

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)ds,$$

$$\mathfrak{J}^{(3)}_{C^{(3)}} = \int_{C^{(3)}} F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)ds,$$

dove, essendo $C^{(2)}$ e $C^{(3)}$ curve ordinarie e s la lunghezza dell'arco rettificato, è

$$u_2 = x'y'' - x''y', \quad v_2 = y'z'' - y''z', \quad w_2 = z'x'' - z''x',$$

$$u_3 = x'y''' - x'''y', \quad v_3 = y'z''' - y'''z', \quad w_3 = z'x''' - z'''x'.$$

([14]) Per quanto riguarda il caso piano vedi: L. TONELLI, opera cit. in ([3]), vol. II, Cap. II, § 2, n. 33, b) e Cap. VI, § 2, n. 96, a). S. CINQUINI, *Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali*, « Rend Accademia Nazionale dei Lincei », S. VIII, vol. XXIII, (1957), pp. 22-28; cfr. n. 3, b). S. CINQUINI, *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine n*, « Annali di Matematica pura ed applicata,» S. IV, T. XVI, (1937), pp. 61-100; cfr. § 2, n. 4.

Riguardo al caso parametrico del primo ordine nello spazio vedi N. BERRUTI ONESTI, luogo cit. in ([1]), § 1, n. 7, Oss. I.

([15]) Per quanto si riferisce al caso piano vedi: L. TONELLI, opera cit. in ([3]), vol. I, Cap. V, § 2, n. 81 e Cap. IX, § 2, n. 139, b). S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » S. II, vol. XIII, (1944), [1947], pp. 19-49; cfr. § 1, n. 4. S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. V, (1936), pp. 169-90; cfr. n. 1, ε).

Per quanto riguarda il caso parametrico del primo ordine nello spazio, vedi, per es., L. TONELLI, luogo cit. per secondo in ([4]), n. 21, p. 71.

tiva agli integrali $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ e $\mathfrak{J}^{(3)}_{C^{(3)}}$ ([16]), ci proponiamo di dimostrare come anche per tali integrali la condizione di regolarità assicura l'esistenza delle derivate successive per un'estremale.

Rileviamo che la condizione sufficiente contenuta nel seguente numero e riguardante la (13) non è necessaria, come facilmente si può verificare, affinchè sia soddisfatta la (12) del presente numero. Pertanto, per quanto riguarda il teorema di esistenza delle derivate successive per un'estremale di ordine 2 relativa alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$, l'ipotesi espressa dalla (12) presenta, rispetto a quella relativa alla (13) contenuta nel numero seguente, una maggiore generalità.

Analogo rilievo si può fare in merito al caso riguardante le estremali di ordine 3 relative alla funzione
$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$.

4. *Supposto che in ogni punto* (x, y, z) *di* A. *per ogni terna di numeri reali non tutti nulli* (x', y', z') *e per ogni terna di numeri reali* (u_2, v_2, w_2) *esistano finite e continue le derivate del secondo ordine della funzione* $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$ *rispetto a* u_2, v_2, w_2, *e considerata un'estremale*

$$C^{(2)}: \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s), \qquad (0 \leq s \leq L)$$

di ordine 2 relativa alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$, *per ogni valore* s *di* $(0, L)$ *in cui la forma quadratica*

$$(13) \qquad \alpha^2 F_{u_2u_2}(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s); u_2(s), v_2(s), w_2(s)) +$$
$$+ \beta^2 F_{v_2v_2}(\ldots) + \gamma^2 F_{w_2w_2}(\ldots) + 2\alpha\beta F_{u_2v_2}(\ldots) + 2\beta\gamma F_{v_2w_2}(\ldots) + 2\alpha\gamma F_{u_2w_2}(\ldots)$$

([16]) Vedi S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica*, « Annali di Matematica pura ed applicata », S. IV, T. XLIX, (1960), pp 25-71; cfr. Cap. I, § 1, n. 4, b) e Cap. II, § 1, n. 24, b).

Rileviamo che si può definire l'integrale regolare $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ anche in modo indipendente dalla esistenza della derivate parziali del secondo ordine della funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$ rispetto a u_2, v_2, w_2, mediante la funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS relativa a tale funzione; una analoga osservazione vale riguardo alla definizione di integrale regolare $\mathfrak{J}^{(3)}_{C^{(3)}}$.

è definita positiva (o negativa), la forma quadratica

$$\xi^2 \begin{vmatrix} F_{u_2u_2} & F_{u_2w_2} \\ F_{w_2u_2} & F_{w_2w_2} \end{vmatrix} + \eta^2 \begin{vmatrix} F_{v_2v_2} & F_{v_2u_2} \\ F_{u_2v_2} & F_{u_2u_2} \end{vmatrix} + \zeta^2 \begin{vmatrix} F_{w_2w_2} & F_{w_2v_2} \\ F_{v_2w_2} & F_{v_2v_2} \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\xi\eta \begin{vmatrix} F_{u_2v_2} & F_{u_2u_2} \\ F_{v_2w_2} & F_{u_2w_2} \end{vmatrix} + 2\eta\zeta \begin{vmatrix} F_{v_2w_2} & F_{v_2v_2} \\ F_{w_2u_2} & F_{v_2u_2} \end{vmatrix} + 2\xi\zeta \begin{vmatrix} F_{w_2u_2} & F_{w_2w_2} \\ F_{u_2v_2} & F_{w_2v_2} \end{vmatrix},$$

nella quale le derivate parziali si intendono calcolate in $(x(s), y(s)\ z(s);\ x'(s), y'(s), z'(s);\ u_2(s), v_2(s), w_2(s))$, *è definita positiva, e quindi la* (12) *è senz'altro verificata.*

Infatti sia s_0 un valore di $(0, L)$ in cui la suddetta ipotesi è soddisfatta; cioè, posto per brevità

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} F_{u_2u_2}(x(s_0), y(s_0), z(s_0); x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0); u_2(s_0), v_2(s_0), w_2(s_0)) = P \\ F_{v_2v_2}(\ldots) = Q, F_{w_2w_2}(\ldots) = R, F_{u_2v_2}(\ldots) = R', F_{v_2w_2}(\ldots) = P', F_{u_2w_2}(\ldots) = Q', \end{cases}$$

la forma quadratica

$$\text{(15)} \qquad \alpha^2 P + \beta^2 Q + \gamma^2 R + 2\alpha\beta R' + 2\beta\gamma P' + 2\alpha\gamma Q'$$

sia definita positiva (o negativa). Allora il discriminante della (15)

$$\Delta = \begin{vmatrix} P & R' & Q' \\ R' & Q & P' \\ Q' & P' & R \end{vmatrix}$$

è tale che le espressioni

$$\text{(16)} \qquad 1,\ \Delta_1 = P,\ \Delta_2 = PQ - R'^2,\ \Delta = PQR + 2P'Q'R' - PP'^2 - QQ'^2 - RR'^2,$$

considerate nell'ordine scritto, presentano soltanto permanenze (o soltanto variazioni). Da ciò segue che il discriminante della forma quadratica

$$\text{(17)} \qquad \xi^2 \begin{vmatrix} P & Q' \\ Q' & R \end{vmatrix} + \eta^2 \begin{vmatrix} Q & R' \\ R' & P \end{vmatrix} + \zeta^2 \begin{vmatrix} R & P' \\ P' & Q \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\xi\eta \begin{vmatrix} R' & P \\ P' & Q' \end{vmatrix} + 2\eta\zeta \begin{vmatrix} P' & Q \\ Q' & R' \end{vmatrix} + 2\xi\zeta \begin{vmatrix} Q' & R \\ R' & P' \end{vmatrix}$$

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} PR - Q'^2 & R'Q' - PP' & Q'P' - RR' \\ R'Q' - PP' & QP - R'^2 & P'R' - QQ' \\ Q'P' - RR' & P'R' - QQ' & RQ - P'^2 \end{vmatrix}$$

è tale che le espressioni

$$1, \quad \Delta_1^* = PR - Q'^2, \quad \Delta_2^* = (PR - Q'^2)(QP - R'^2) - (R'Q' - PP')^2, \quad \Delta^*,$$

considerate nell'ordine scritto, presentano soltanto permanenze.

Infatti, a calcoli eseguiti, risulta

$$\Delta_2^* = P \cdot \Delta,$$

e pertanto, ricordando quanto si è detto a proposito delle (16), è

$$\Delta_2^* > 0;$$

quindi, tenendo presente l'espressione di Δ_1^* e Δ_2^* ed essendo $PQ - R'^2 > 0$, è anche

$$\Delta_1^* > 0.$$

Infine, a calcoli fatti, risulta

$$\Delta^* = \Delta^2.$$

Dunque la forma quadratica (17) è definita positiva e pertanto, tenendo presenti le (14), per il valore s_0 di $(0, L)$ considerato, l'espressione (12) è positiva.

5. Il teorema del numero precedente si può estendere in forma del tutto analoga al caso di un' estremale di ordine 3 relativa alla funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$ considerando, in luogo della espressione (13), la espressione che da questa si ottiene sostituendo alle derivate parziali del secondo ordine della funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$ rispetto a u_2, v_2, w_2 quelle della funzione $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$ rispetto a u_3, v_3, w_3.