Umberto Gasapina

Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 476–484.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_476_0>

Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari. NOTA II.

Nota di UMBERTO GASAPINA (a Milano) (*)

Sunto. - *A complemento di un lavoro dallo stesso titolo apparso in un precedente fascicolo di questo Bollettino, si espongono alcune proprietà delle varietà algebriche a curva sezione aritmeticamente normale, con particolare riguardo alle varietà sottocanoniche totalmente regolari. Si estende tra l'altro un teorema di* G. GHERARDELLI *relativo alle curve intersezioni complete di due superficie dello spazio ordinario.*

§ 9. Sopra una varietà algebrica V_d non singolare, appartenente ad uno spazio proiettivo complesso S_r, consideriamo una generica sezione iperpiana E ed il sistema canonico impuro $|K|$.

Indichiamo inoltre con $|lE|$ il sistema completo individuato dall'ipersuperficie E contata l volte, con E_l una generica ipersuperficie di detto sistema e con $\sigma^n(E_l)$ l'n-esimo indice d'irregolarità del divisore E_l $(n < d)$.

Per gli sviluppi successivi è essenziale il fatto che si abbia

$$\sigma^i(E_l) = \sigma^{d-i}(K - E_l)$$

(ciò segue dal teorema di dualità di SERRE-HODGE (1)); sarà inoltre molto utile la seguente proprietà (MARCHIONNA, [10], pag. 191):

TEOREMA 11. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la sezione* V_{d-h} *di una* V_d *aritmeticamente normale non singolare* (di dimensione $d \geq 2$) *con un generico spazio* S_{r-h} $(h \leq d-1)$ *risulti anch'essa aritmeticamente normale è che, per qualunque* $l \geq 0$ (e di conseguenza per ogni intero relativo l), *si abbia*

$$(1_9) \qquad \sigma^1(E_l) = \sigma^2(E_l) = \ldots = \sigma^h(E_l) = 0.$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 15 dicembre 1961.

Questo lavoro - come le precedenti note [2], [3], [4], [5] - è stato eseguito nell'ambito di uno dei Gruppi di Ricerca del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) Cfr. HODGE, [7], pag. 296.

In particolare, la condizione caratteristica affinchè la curva V_1, *sezione di* V_d *con un generico* S_{r-i+1}, *risulti aritmeticamente normale è che – per ogni* $l \geqq 0$ *– siano nulli tutti gli indici d'irregolarità* $\sigma^1(E_l)$, $\sigma^2(E_l), \ldots, \sigma^{d-1}(E_l)$ *del divisore* E_l.

Ciò posto, consideriamo due varietà non singolari V_d e V'_d le quali abbiano dimensione $d > 2$ e siano *complementari l'una dell'altra;* supponiamo inoltre che V_d e V'_d si intersechino lungo una sottovarietà non singolare D avente dimensione $d-1$. Sussiste il

TEOREMA 12. – *Se* h *è il massimo intero contenuto in* $\frac{d-1}{2}$ *e se le sottovarietà* V_{d-h} *e* V'_{d-h} – sezioni rispettive delle varietà complementari V_d e V'_d con un determinato S_{r-h} – *sono aritmeticamente normali, allora anche le curve* V_1 *e* V'_1 – sezioni rispettive di V_d e V'_d con un generico S_{r-i+1} – *sono aritmeticamente normali.*

Infatti, poichè la sezione di V_d con S_{r-h} è aritmeticamente normale, la V_d stessa e le sue sezioni con generici S_{r-i} $(i \leqq h)$ risultano aritmeticamente normali ([2]); sicchè per il teorema 11, sussistono le (1_9) per qualunque $l \geqq 0$. Inoltre, essendo anche V'_{d-h} aritmeticamente normale, sulla varietà V_d si ha, per ogni $l \geqq 0$,

$$\sigma^{d-1}(E_l) = \sigma^{d-2}(E_l) = \ldots = \sigma^{d-h-1}(E_l) = 0 \quad (^3)$$

Pertanto se $h = \left[\frac{d-1}{2}\right]$, sulla varietà aritmeticamente normale V_d sono nulli (per ogni $l \geqq 0$) tutti gli indici di irregolarità del divisore E_l e di conseguenza la curva V_1, sezione di V_d con un generico S_{r-i+1}, è aritmeticamente normale (teorema 11). Ciò implica, per un noto teorema di GAETA ([1], pag. 195) che anche la curva V'_1 (complementare di V_1) risulta aritmeticamente normale.

§ 10. Il teorema 12 può essere dimostrato in modo diverso. A tale scopo premettiamo la seguente proposizione che presenta qualche interesse di per se stessa.

LEMMA 13. – *Sia* V_d *una varietà non singolare sottocanonica avente dimensione* $d > 2$ *e si indichi con* h *il massimo intero con-*

([2]) Cfr. ad es. [10], pag. 185.
([3]) Si veda il teorema 7 contenuto in [5].

tenuto in $\frac{d}{2}$. *Se la sezione di* V_d *con un determinato* S_{r-h} *è aritmeticamente normale, allora anche la curva* V_1 *sezione di* V_d *con un generico* S_{r-d+1} *risulta aritmeticamente normale.*

Come abbiamo verificato nella dimostrazione del teorema 12 possiamo subito affermare che V_d risulta aritmeticamente normale e che su di essa sussistono le (1_9) per ogni intero relativo l.

Inoltre, poichè V_d è una varietà sottocanonica, si ha per definizione $K \equiv \nu E$ (ν intero positivo, negativo o nullo); il teorema di dualità porge allora la relazione

$$(1_{10}) \qquad \sigma^i(E_l) = \sigma^{d-i}(E_{\nu-l}) \qquad (i = 1, 2, \dots, d-1).$$

Dalla (1_{10}), tenendo conto delle (1_9), si ottiene (qualunque sia l'intero relativo l):

$$\sigma^{d-h}(E_l) = \sigma^{d-h+1}(E_l) = \dots = \sigma^{d-1}(E_l) = 0.$$

Pertanto, se $h = \left[\frac{d}{2}\right]$, sulla varietà aritmeticamente normale V_d sono nulli, per ogni $l \geqq 0$, tutti gli indici d'irregolarità del divisore E_l, sicchè la curva V_1 dell'enunciato risulta aritmeticamente normale (teorema 11).

Veniamo ora alla nuova dimostrazione del teorema 12 ed a tale scopo fissiamo l'attenzione sulla varietà non singolare $(d-1)$-dimensionale $D = V_d \cap V'_d$, notoriamente sottocanonica [4]. Poichè entrambe le sottovarietà V_{d-h} e V'_{d-h} sono aritmeticamente normali risulta aritmeticamente normale anche la sottovarietà $D \cap S_{r-h} = V_{d-h} \cap V'_{d-h}$ [5]. Allora per il lemma 13 è aritmeticamente normale la curva sezione della D con un generico S_{r-d+2}; risultano perciò aritmeticamente normali le due superficie complementari V_2 e V'_2 sezioni rispettive di V_d e V'_d con un generico S_{r-d+2} [6]. Da questo ultimo fatto segue che le curve V_1 e V'_1 sezioni di V_2 e V'_2 con un generico iperpiano, sono entrambe aritmeticamente normali [7].

(4) Cfr. ad es. [10], pag. 173.
(5) GAETA, [1], pag. 191, n. 7.
(6) Si veda loc. cit. in nota (5)
(7) MARCHIONNA, [8], teorema 2.

§ 11. TEOREMA 14. - *Sia V_d una varietà non singolare di dimensione* $d \geqq 2$ *la quale appartenga ad uno spazio S_r* (e non ad uno spazio di dimensione inferiore). *Si supponga che V_d sia sottocanonica, aritmeticamente normale, totalmente regolare ed abbia genere geometrico* $P_g \leqq r+1$. *Allora la curva V_1 sezione di V_d con un generico S_{r-d+1} risulta aritmeticamente normale.*

Cominciamo col supporre che il genere geometrico di V_d sia superiore ad 1 e quindi che il sistema canonico di V_d sia effettivo e diverso dallo zero Z dell'equivalenza ipersuperficiale. Per definizione di varietà sottocanonica si ha $K \equiv \nu E$, essendo nel caso in esame $\nu > 0$. Verifichiamo che in queste ipotesi V_d è una varietà canonica, cioè che $\nu = 1$.

Infatti, essendo V_d aritmeticamente normale, se fosse $\nu > 1$ si avrebbe

$$P_g = \dim |K| + 1 > \dim |E| + 1;$$

cioè

$$P_g > r + 1$$

contro l'ipotesi che sia $P_g \leqq r+1$.

Si ha dunque $K \equiv E$, ed il teorema di dualità porge la relazione

$$(1_{11}) \qquad \sigma^i(E_l) = \sigma^{d-i}(E_{1-l}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, d-1)$$

Ma è noto che l'indice d'irregolarità $\sigma^{d-i}(E_{1-l})$ è nullo quando $1 - l < 0$ [8]; quindi per $l > 1$ si ha

$$\sigma^i(E_l) = 0.$$

Se $l = 0$ la ipersuperficie E_l si riduce allo zero Z dell'equivalenza ipersuperficiale; in tal caso, detta $q_i(V_d)$ d'irregolarità i-dimensionale di V_d, si ha

$$(2_{11}) \qquad \sigma^i(Z) = q_i(V_d) + q_{i+1}(V_d) \qquad (i = 1, 2, \ldots, d-1) \text{ [9]}$$

D'altra parte poichè V_d è totalmente regolare per ipotesi, le (2_{11}) porgono $\sigma^i(Z) = 0$ per ogni $i < d$; sicchè, ponendo $l = 1$ nelle (1_{11}) si deduce:

$$\sigma^i(E) = \sigma^{d-i}(Z) = 0$$

per ogni $i \leqq d-1$.

[8] Cfr. ad es. [10], pag. 164, osservazione III.
[9] Cfr. [7], ed anche [9], pag. 433.

Concludendo, poichè per ogni $l \geq 0$ sulla varietà aritmeticamente normale V_d sono nulli tutti gli indici di irregolarità del divisore E_l, la curva V_1 dell'enunciato risulta aritmeticamente normale (teorema 11).

Supponiamo ora $P_g = 1$. In questo caso il sistema canonico $|K|$ della nostra V_d sottocanonica si riduce allo zero Z dell'equivalenza; il teorema di dualità porge allora la relazione

$$\sigma^i(E_l) = \sigma^{d-i}(E_{-l}) \qquad (i = 1, 2, \dots\, d-1)$$

da cui si ricava $\sigma^i(E_l) = 0$ per $l > 0$, poichè - come abbiamo ricordato dianzi - $\sigma^{d-i}(E_{-l}) = 0$.

Inoltre, essendo V_d totalmente regolare, si ha ancora $\sigma^i(Z) = 0$ per ogni $i \leq d-1$.

Pertanto, come nel caso precedente, possiamo concludere che V_1 è aritmeticamente normale.

Infine se $P_g = 0$ il sistema canonico della nostra varietà sottocanonica V_d è un multiplo negativo del sistema delle sezioni iperpiane, e quindi V_d è una varietà dotata di sistema anticanonico ampio; applicando il teorema 5 contenuto in [4] deduciamo ancora che la curva V_1 è aritmeticamente normale ([10]).

§ 12. Si consideri in S_r una varietà V_d, non singolare, la quale sia l'intersezione completa di $r-d$ forme del suo spazio ambiente. Come è noto, la V_d è aritmeticamente normale ed è sottocanonica ([11]). G. GHERARDELLI ha dimostrato in [6] che, quando V è una curva gobba non singolare dello spazio ordinario, queste due proprietà sono caratteristiche affinchè essa sia l'intersezione completa di due superficie.

Il teorema di GHERARDELLI è esteso alle V_d non singolari appartenenti ad un S_{d+2} dalla seguente proposizione:

TEOREMA 15. - *Sia* V_d *una varietà non singolare di* S_{d+2} *avente dimensione* $d \geq 2$; *si indichino, come al solito, con* E *e con* K *una generica sezione iperpiana ed una generica ipersuperficie canonica* (effettiva o virtuale) *della varietà* V_d.

([10]) In quest'ultimo caso l'ipotesi che V_d sia totalmente regolare è sovrabbondante perchè - come si è mostrato in [4] - (lemma 4) - una V_d non singolare dotata di sistema anticanonico ampio è necessariamente totalmente regolare.

([11]) Cfr. ad es. SEVERI, [11], pag. 405.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè V_d *sia l'intersezione completa di due forme di* S_{d+2} è che:

a) V_d *sia aritmeticamente normale,*

b) *esista un intero relativo* ν *tale che sia* $K \equiv \nu E$(cioè V_d sia sottocanonica)

c) *se l'intero* ν *è non negativo, siano nulli tutti gli indici d'irregolarità del divisore* E_l *per* $0 \leq l < \nu$ (12).

Sappiamo già che le condizioni a) e b) sono necessarie; la necessità della c) segue dal teorema 11 in quanto la curva V_1 sezione di V_d con un generico S_3 - essendo intersezione completa di due superficie di S_3 (perchè V_d è supposta intersezione completa di due forme di S_{d+2}) - risulta aritmeticamente normale.

Dimostriamo ora che le condizioni a), b) e c) sono sufficienti. Se l'intero ν che compare nelle ipotesi è negativo la V_d è dotata di sistema anticanonico ampio e perciò risultano nulli tutti gli indici d'irregolarità del divisore E_l per qualunque l (13).

Nel caso $\nu \geq 0$ l'ipotesi che sia $\sigma^i(E_l) = 0$ per $0 \leq l < \nu$ - unita al fatto che per $l < 0$ si ha $\sigma^i(E_l) = 0$ indipendentemente dalle ipotesi - implica (per il teorema di dualità) che sono ancora nulli tutti gli indici di irregolarità del divisore E_l per qualunque l. Pertanto la sezione V_1 di V_d con un generico S_3 è una curva aritmeticamente normale (teorema 11). D'altra parte V_1 è sottocanonica (perchè abbiamo supposto che sia tale V_d); ne segue che V_1 è intersezione completa di due forme del suo S_3 (teorema di GHERARDELLI).

Di qui si deduce, con una tecnica ormai nota, che V_d è la intersezione completa di due forme di S_{d+2} (14).

OSSERVAZIONE I. - Il teorema 15 è già stato enunciato da GAETA in [1] (pag. 212) sotto una forma lievemente diversa ma equivalente alla nostra. Infatti GAETA sostituisce la condizione c) con la condizione che la curva sezione di V_d con un generico S_3 sia aritmeticamente normale.

(12) Facendo perno sul teorema di dualità e sul fatto che V_d è sottocanonica si potrebbero sostituire le condizioni espresse dalla proprietà c) con altre più deboli, usando una tecnica analoga a quella adoperata nella dimostrazione del lemma 13.

(13) Cfr. [4], lemma 4.

(14) Cfr. ad es. [1], pag. 212.

OSSERVAZIONE II. - Nel caso delle superficie il teorema 15 si può enunciare nella seguente forma

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie non singolare V_2 *di* S_4 *sia la intersezione completa di due forme di* S_4 *è che* V_2 *sia:*

I) *aritmeticamente normale,*

II) *sottocanonica,*

III) *regolare,*

IV) *aritmeticamente regolare.*

Infatti sulle superficie il sistema $|lE|$ - come ogni sistema lineare - possiede un solo indice di irregolarità, e la sua sovrabbondanza $s\,|lE|$ è data dalla relazione

$$s\,|lE| = \sigma^1({}'El).\quad (^{15})$$

Inoltre dalla (2_{11}) si ricava

$$\sigma^1(Z) = q_2(V_2)\quad (^{16})$$

La condizione III) $(q_2(V_2) = 0)$ e la condizione IV) $(s\,|lE| = 0$ per $l > 0)$ sono pertanto equivalenti alla c) del teorema 11.

Anche questo teorema è stato enunciato da GAETA nell'interessante memoria [1] (pag. 212), ma ivi è sottaciuta la condizione IV) la quale è invece indispensabile, assieme alla III), per garantire la normalità aritmetica della generica curva sezione di una V_2 non singolare aritmeticamente normale (17).

(15) HODGE [7], oppure MARCHIONNA [9], pag.418.

(16) Si ricordi che la irregolarità unidimensionale di una varietà non singolare è sempre uguale a zero.

(17) A base della trattazione di GAETA stanno i teoremi di pag. 196 e pag. 198 (nn. 9, 10) della memoria [1] dello stesso Autore; nelle relative dimostrazioni si suppone ancora *tacitamente* che le superficie regolari in questione siano pure aritmeticamente regolari, ma queste ipotesi, purtroppo, non figurano esplicitamente negli enunciati come sarebbe stato invece necessario. I teoremi di GAETA sono stati successivamente precisati (e generalizzati a varietà di dimensione superiore, anche irregolari) nei lavori [8] e [10] di E. MARCHIONNA.

§ 13. Concludiamo con una condizione sufficiente affinchè una V_d di S_{d+2} sia la completa intersezione di due forme del suo spazio ambiente.

TEOREMA 16. - *Sia* V_d *una varietà non singolare di* S_{d+2} *avente dimensione* $d \geq 2$ *la quale abbia genere geometrico* $P_g \leq d+3$.

Se V_d *è sottocanonica, aritmeticamente normale e totalmente regolare, essa risulta la intersezione completa di due forme di* S_{d+2}.

Infatti, per il teorema 14, la curva sezione di V_d con un generico S_3 risulta aritmeticamente normale e ciò prova l'asserto per quanto abbiamo ricordato nel § precedente ([18]).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. GAETA, *Sulle curve algebriche sghembe di residuale finito*. « Annali di Matematica» serie IV, t. XXVII (1948).

[2] U. GASAPINA, *Sul genere aritmetico di una varietà algebrica non singolare*, « Rend. Sem. Univ. e Polit. Torino », vol. 19 (1959-60).

[3] — —, *Sulle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari*, « Rend. Sem. Univ. e Polit. Torino », vol. 19 (1959-60).

[4] — —, *Sulle varietà a curva sezione aritmeticamente normale*, « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », vol. 95 (1960-61).

[5] — —, *Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali ed aritmeticamente regolari*, « Bollettino dell'Un. Mat. Ital. », serie III, anno XVI, n. 3 (1961).

[6] G. GHERARDELLI, *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie*, « Atti della R. Accad. d'Italia », vol. IV (1942).

[7] W. V. HODGE, *A note on the* RIEMANN-ROCH *theorem*, «Journal London Math. Soc. », 30 (1955).

[8] E. MARCHIONNA, *Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali*, « Rend. Acc. Lincei », serie VIII, vol. XXIV (1958).

[9] — —, *Il teorema di* RIEMANN-ROCH *sulle varietà algebriche e questioni collegate con la teoria delle irregolarità*, Appendice VI al Trattato di F. SEVERI, citato in [11].

[10] — —, *Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica non singolare*. «Annali di Matematica», serie IV, t. LIV (1961).

[11] F. SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*. vol. III, Ed. Cremonese, Roma (1959).

([18]) Cfr. ad es. loc. cit. in nota ([14]).

ERRATA CORRIGE

Nella nota [5] citata nella bibliografia si correggano i seguenti errori di stampa.

Nelle formule in fondo alla pag. 311 cambiare gli esponenti $d-1$ con gli esponenti $d-i$.

A pag. 314, formula (2_6), in luogo di:

$$s \mid D \mid = \sum_{h=1}^{-1} (-1)^{h+1} \sigma^h(D)$$

leggere:

$$s \mid D \mid = \sum_{h=1}^{d-1} (-1)^{h+1} \sigma^h(D).$$

A pag. 316, righe 7 e 8, in luogo di:

V_d *risulta aritmeticamente regolare nel relativo spazioambiente* S_R.

leggere:

V_d *risulta aritmeticamente normale ed aritmeticamente regolare nel relativo spazioambiente* S_R.