Recensioni.

* P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin, Lecons d'algèbre moderne, Dunod, Paris, 1961 (Enrico Bompiani)
* L. M. Blumenthal, A modern view of Geometry, W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, (Enrico Bompiani)
* Proceedings of Symposia in pure Mathematics, Vol. III: Differential Geometry, American Mathical Society, 1961 (Enrico Bompiani)
* P. R. Stoll, Sets. Logic and Axiomatic Theories, W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, 1961 (Enrico Bompiani)
* Ernest Nagel, James R. Newman, La prova di Gödel, Boringhieri, Torino, 1961 (Ettore Carruccio)
* E. Lucas, Recherches sur l'Analyse indeterminée et l'Arithémtique de Diophante, A. Blanchard, Paris, 1961 (Marco Cugiani)
* A. O. Gelfond, The solution of equations in integers, W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, 1961
* Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. V, Princeton University Press, 1960 (Roberto Conti)
* W. H. Gottschalk, G. A: Hedlund, Topological dynamics, American Mathical Society, 1955 (Antonio Pignedoli)
* O. Borůvka, Grundlagen der Gruppoid-und Gruppentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960 (Guido Zappa)
* D. Barbilian, Gruppuri cu operatori, Editura Academiei Republici Populare Romine, 1960 (Guido Zappa)
* Ettore Carruccio, Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo, Gheroni, Torino, 1958 (Guido Zappa)
* B. Segre, Lectures on modern Geometry, Edizioni Cremonese, Roma, 1961 (Errmanno Marchionna)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **16** (1961), n.4, p. 485–499.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1961_3_16_4_485_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1961.

RECENSIONI

P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin, *Leçons d'algèbre moderne*, Dunod, Paris, 1961, p. 406.

Il riconoscimento dell'importanza che l'algebra (detta moderna per distinguerla da alcune soprastrutture abbarbicatesi a quella classica) ha per tutti i rami della matematica, e quindi della necessità d'insegnarla, ha dato origine a queste Lezioni redatte da due eminenti specialisti. Esse svolgono il programma massimo richiesto dalla « option algèbre » per la « licence d'enseignement » in Francia, e si collocano quindi ad un livello intermedio che presuppone alcune nozioni d'algebra e precede, per chi voglia continuare, la ricerca personale (per questa ragione non vi sono indicazioni bibliografiche). Tuttavia il volume è completamente autonomo perchè anche le nozioni che possono ritenersi già acquisite sono riprese con tutto rigore alla luce di alcune idee direttrici di valore generale.

Il Cap. I è dedicato alle leggi di composizione: qui è presentata subito l'idea di *famiglia di Moore* (di parti di un insieme E) e di *chiusura di Moore* (parte minima di una famiglia di Moore contenente una parte di E) che hanno un ruolo fondamentale in tutte le strutture algebriche. Anche essenziale è la nozione di compatibilità di una relazione d'equivalenza con una legge di composizione interna.

Il Cap. II tratta dei semigruppi, dei gruppi, dei sottogruppi, dei gruppi associati ad uno o più gruppi, degli omomorfismi nella teoria dei gruppi, dei gruppi con operatori, degli spazi omogenei; il capitolo si chiude col teorema di Sylow. Alla generazione dei gruppi è dedicato il Cap. III: data la famiglia di Moore dei sottogruppi di un gruppo G, ad ogni parte non vuota M di G si associa la chiusura di Moore che è il più piccolo sottogruppo di G contenente M (di cui M è un generatore) che si può costruire come prodotto di un numero finito di elementi di M o di loro inversi. Trovano qui posto le nozioni di gruppo simmetrico, di gruppi monogeni, ciclici, di tipo finito, liberi, etc.

Anelli, corpi, domini d'integrità, anelli fattoriali e euclidei, ideali di un anello, ideali massimali e primi formano oggetto del Cap. IV.

Il Cap. V tratta degli insiemi ordinati: la discussione degli elementi notevoli che possono appartenere ad un tale insieme porta alle nozioni di semireticolo e di reticolo, di filtro, di reticoli distributivi (e in particolare di quelli di Boole), di reticoli modulari, di reticolo moltiplicativo degli ideali di un anello commutativo.

La discussione dell'assioma di Zorn e delle sue applicazioni (Cap. VI) è basata sulla nozione di insieme induttivo, insieme ordinato tale che ogni sua catena ammetta un più piccolo maggiorante e di famiglia U-induttiva (la U indica l'unione secondo la teoria degli insiemi), cioè una famiglia di parti dell'insieme ordinato E che sia un insieme induttivo tale che il più piccolo maggiorante di una catena della famiglia sia l'unione delle parti della catena. L'assioma di Zorn è che ogni insieme induttivo ammetta almeno un elemento massimale (superiore ad ogni altro elemento); lo scopo principale della trattazione è la dimostrazione dell'equivalenza dell'assioma di Zorn con quello di Zermelo (ogni insieme ordinato più essere bene ordinato) e con quello della scelta.

Il Cap. VII tratta degli anelli noetheriani fino al teorema di decomposizione dei suoi ideali, e il Cap. VIII dà vari complementi alla teoria dei gruppi (gruppi con operatori, teoremi d'isomorfismo, successioni normali, prodotti diretti di gruppi, gruppi abeliani di tipo finito).

Gli spazi vettoriali sono introdotti (Cap. IX) come gruppi con operatori: vi sono discusse le applicazioni lineari e le loro matrici (regolari o singolari), i cambiamenti di base, l'equazione minima e quella caratteristica.

L'ultimo capitolo (X) tratta dei corpi e delle loro estensioni, della chiusura algebrica di un corpo e della teoria di Galois.

Ho cercato di dare un'idea del contenuto, molto ricco, del volume: ma trattandosi di un volume propedeutico occorre ancora segnalare i suoi pregi espositivi. La trattazione è estremamente chiara e precisa, con richiami frequenti per agevolare la lettura; gli esempi, atti ad illustrare la generalità e la potenza o delle nozioni introdotte o dei risultati conseguiti, appropriati e numerosi; e infine un prezioso indice analitico che serve di vocabolario per le molte denominazioni introdotte.

Ora che finalmene è stato introdotto anche in Italia l'insegnamento per i matematici dell'algebra (moderna) questo volume sarà certo di grande aiuto sia ai docenti che debbono fissare un programma per il loro corso sia agli studenti.

ENRICO BOMPIANI

L. M. BLUMENTHAL, *A modern view of Geometry*, W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, p. VII + 191.

Questo volumetto — il cui contenuto è accennato dal titolo — ha un orizzonte molto più vasto di quanto il titolo stesso prometta: esso si propone di mettere in rilievo il valore del metodo postulazionale (o assiomatico), cioè il valore costruttivo dei postulati nella matematica. Come ben dice l'A., la parola *geometria* indica piuttosto un atteggiamento dell'intelletto che non una parte della matematica: è storicamente un fatto che questo atteggiamento ha mostrato la sua potenza esplosiva — e poi costruttiva — anzitutto nella costruzione delle Geometrie Non-Euclidee. Il lungo travaglio — che si inizia con Euclide stesso — ha condotto a precisare il significato della parola « verità » in matematica: e una volta enucleato questo era inevitabile che il metodo postulazionale permeasse di sè ogni ramo di essa.

Il valore delle Geometrie Non-Euclidee in questo processo essenziale di chiarificazione è efficacemente indicato nel Cap. I, al quale segue, direi di necessità, un capitolo sugli oggetti e sui mezzi del pensiero matematico: cioè sulla teoria degli insiemi e sulla logica delle proposizioni. Col Cap. III si entra nel vivo dei sistemi postulazionali: se ne analizzano i caratteri di compatibilità, di indipendenza, di completezza e se ne danno esempi (nei quali si esaminano questi caratteri) che per il modo in cui sono presentati (schemi letterali) ne pongono in evidenza il carattere « astratto » cioè indipendente da una determinata specificazione visiva dei termini indefiniti che vi figurano.

Il Cap. IV è dedicato al piano affine π come insieme di elementi (punti) e di sottoinsiemi (rette) soddisfacenti a tre postulati: unicità della retta per due elementi distinti; unicità della retta (parallela) per un punto non incidente un'altra a cui il punto non appartenga; esistenza di almeno quattro punti (a coppie distinti) tali che non mai tre di essi appartengano ad una retta. Dato un insieme Γ che abbia la stessa cardinalità della retta di π è possibile, in base ai soli tre postulati, introdurre coordinate in (o coordinatizzare) π facendo corrispondere in modo ben definito ad ogni punto di π una coppia ordinata di elementi di Γ. L'operazione ternaria che associa ad ogni terna ordinata di elementi di Γ un unico elemento di Γ permette in sostanza di trovare la seconda coordinata di un punto di una retta del quale sia nota la prima Viceversa un anello ternario su Γ (soddisfacente ai postulati di Marshall Hall) definisce un piano affine π. Ma è soltanto (Cap V) con l'aggiunta della prima proprietà di Desargues (validità del teorema sui triangoli omologici quando le congiungenti vertici omologhi siano parallele a coppie e due coppie di lati omologhi siano paralleli) che tutte le rette si rapresentano con equazioni lineari (cioè l'anello ternario è lineare) e viceversa Con ciò non è ancora assicurata la possibilità di assumere come Γ l'insieme dei reali; l'assunzione in π della proprietà affine di Pappo (cioè la validità del teorema di Pappo quando due coppie di lati opposti siano paralleli) porta che ogni anello ternario in Γ è un campo: e se questo è ordinato e continuo esso è quello dei reali (o isomorfo ad esso).

Una costruzione analoga, cioè sulla base di postulati in cui figurano come enti non definiti sia i punti che le rette e la nozione di incidenza come nozione primitiva e con l'introduzione di coordinate è fatta nel Cap. VI per il piano proiettivo.

Il Cap. VII, che porta più direttamente traccia di contributi personali dell'A., ritorna al piano euclideo ma con visione arricchita dalle esperienze precedenti Esso viene caratterizzato dalle proprietà di essere uno spazio metrico (nel senso di Frechet), metricamente ed esternamente convesso, completo ed inoltre avente le due seguenti proprietà: ch'esso contiene tre punti tali che nessuna delle loro mutue distanze è uguale alla somma delle altre due (esistenza di terne di punti non collineari); e che un conveniente determinante costruito con i quadrati delle distanze di quattro punti è sempre nullo (che equivale alla determinazione del piano per mezzo di tre punti non collineari). E infine il Cap. VIII esaurisce lo stesso programma per le Geometrie Non-Euclidee da cui l'A. ha preso le mosse.

L'esposizione è eccellente: senza appesantimenti di citazioni essa è sempre storicamente motivata e visibilmente sostenuta dallo scopo da raggiungere. Ritengo che questo volumetto possa essere adoperato con molta utilità sia in corsi sui fondamenti della geometria e di matematiche complementari, sia in corsi di aggiornamento per insegnanti di scuola media.

ENRICO BOMPIANI

Proceedings of Symposia in pure Mathematics, vol III: Differential Geometry (American Mathematical Society, 1961; p. VII+200).

Questo Symposium (1960) sulla Geometria Differenziale ha avuto lo scopo di mettere a fuoco i nuovi indirizzi di ricerca che hanno condotto alla creazione di ciò che oggi chiamasi Topologia Differenziale. Una succinta ed estremamente efficace introduzione di C. B. Allendoerfer, organizzatore del Symposium, traccia il passaggio dall'una all'altra disciplina. Per il contenuto basterà dare qui di seguito i nomi dei conferenzieri, tutti di primissimo piano, e i temi di cui si sono occupati: R. Bott, sul gruppo unitario; M. F. Atiyah e F. Hirzebruch, sugli spazi omogenei; J. Milnor, sui gruppi d'omotopia di Killing delle varietà differenziabili; D. C. Spencer, sull'analisi omologica e le strutture; A. Nijenhuis, sulla deformazione delle strutture complesse; A. G. Walker, sulle strutture di quasi-prodotto; E. Dyer e R. K. Lashof, sull'omologia; J. Eells, sulla dualità di Alexander-Pontrjagin;

R. S. Palais, sulla coomologia degli anelli di Lie; L. Auslander, su varietà collegate a gruppi di Lie risolubili; A. M. Boothby, sulle varietà omogenee complesse di contatto; E. Calabi, sulle varietà riemanniane compatte a curvatura costante; L. Nirenberg, sulle superficie a curvatura di segno costante; S. Kobayashi, sulla teoria dei « getti » di Ehresmann; H. Samelson, sui problemi d'immersione di varietà.

ENRICO BOMPIANI

P. R. STOLL, *Sets. Logic and Axiomatic Theories*, (Golden Gate Books, W. H, Freeman and Co., San Francisco and London, 1961, p. VII + 206).

Questo volumetto è dedicato ai fondamenti della matematica nel senso preciso risultante dagli argomenti indicati nel titolo, che costituiscono l'oggetto dei primi tre capitoli; il quarto è dedicato alle algebre di Boole. Ogni capitolo si apre con una introduzione (non numerata) che ne illustra il contenuto in via discorsiva e dà brevi indicazioni sulla genesi storica di quanto in esso esposto. L'esposizione è eccellente; questo volumetto può servire sia a chi voglia approfondire la propria culturua, sia p.es. per l'insegnamento delle matematiche complementari o per corsi d'aggiornamento di insegnamenti medi.

ENRICO BOMPIANI

ERNEST NAGEI e JAMES R. NEWMAN, *La prova di Gödel*, (Biblioteca di cultura scientifica, Paolo Boringhieri, Torino 1961, pp. 1 8).

Il volumetto in esame mira a diffondere la conoscenza della struttura dei ragionamenti e la sostanza delle conclusioni, nel campo della metamatematica, contenute nella fondamentale memoria di Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der « Principia mathematica » und verwandter Systeme* (« Monatshefte für Mathematik und Physik » Leipzig, 1931).

All'esposizione dei risultati del Gödel gli Autori premettono una rapida rassegna degli sviluppi della matematica e della logica nella storia, per chiarire le esigenze concettuali che hanno dominato le ricerche in questione, e precisare le basi di detti risultati.

Il panorama storico che ne risulta, è vivo ed efficace, ben tracciato nelle grandi linee, anche se non sempre si accorda esattamente con quanto si ricava da un esame dei testi originali (specialmente greci) e dalle ricostruzioni più attendibili della scienza antica (1).

(1) Per esempio, a proposito dei problemi classici della geometria, si dice (pag. 15) che « per più di duemila anni furono fatti tentativi infruttuosi per risolvere questi problemi ». Ora questa frase è esatta per quanto concerne le soluzioni con riga e compasso (alle quali effettivamente si fa riferimento nel libro), ma sarebbe invece inesatta se si considerassero quelle soluzioni rigorose ottenute con mezzi adeguati, già raggiunte dai geometri antichi.
Così (a pag. 16) in nota, si prendono in esame figure attualmente infinite come considerate da Euclide, mentre le figure euclidee sono per definizione finite: tutt'al più Euclide considera un infinito potenziale (d'accordo con le vedute aristoteliche in proposito). Inoltre non direi che prima della

Per quanto si riferisce agli assiomi delle geometrie non euclidee non direi (pag. 21) « i loro assiomi, furono, fin dall'inizio, considerati come semplicemente falsi riguardo allo spazio »: Gauss e Lobacevskij esaminarono la nuova geometria anche da un punto di vista sperimentale.

Dove si presenta l'interpretazione della geometria di Riemann sulla sfera, non si precisa che tale interpretazione non è valida per l'intero piano, dato che i circoli massimi immagini delle rette s'incontrano in due punti.

Pur trovando in generale assai ben riuscita la traduzione del libro in esame, non sempre sarei d'accordo con il traduttore sul modo di rendere in italiano alcuni termini: si dice ad esempio « successore » (pag. 18 e altrove) dove con Peano siamo soliti dire « successivo » si dice (pag. 22) « membro » dove abitualmente diciamo « elemento ».

Dopo un primo capitolo introduttivo sul contenuto ed i fini del libro, nel secondo si affronta il problema della compatibilità o della coerenza interna di un insieme di postulati posti a fondamento di un sistema, come il problema stesso si presenta dopo la costruzione delle geometrie non euclidee, e delle antinomie, con particolare riferimento a quella di B. Russell.

Dopo di aver trattato delle prove relative di compatibilità di un sistema, basate sull'interpretazione di un sistema all'interno di un altro, per cui si fa dipendere la coerenza del primo da quella del secondo, nel terzo capitolo i nostri Autori passano ad esaminare quelle che vengono da loro chiamate « prove assolute di compatibilità » secondo il programma di Hilbert, nell'ordine d'idee della metamatematica.

Di quest'ultimo termine esistono nel libro due tipi differenti di definizione: a pag. 33 « le proposizioni metamatematiche sono proposizioni intorno ai segni » a pag. 36: « la descrizione, la discussione e la teorizzazione dei sistemi appartengono alla categoria denominata metamatematica e poco oltre si scrive che la distinzione fra matematica e metamatematica permette di « mettere in chiara evidenza la struttura logica del ragionamento ». Ci troviamo qui di fronte a due modi, secondo me non identificabili, d'intendere la metamatematica: insieme di proposizioni intorno ai segni, teoria della struttura logica delle teorie matematiche.

Viene esposto il programma di Hilbert nella sua concezione originale, secondo la quale (pagg. 37-38) « le dimostrazione di compatibilità si basano soltanto su quei procedimenti che non fanno appello a un numero infinito di proprietà strutturali delle formule o a un numero infinito di operazioni con le formule. Tali procedimenti vengono chiamati « finitistici » e una dimostrazione « assoluta » raggiunge il suo obbiettivo usando un minimo di principi d'inferenza e non presuppone l'autocompatibilità di qualche altro insieme di assiomi ».

Ritengo discutibile quest'ultima affermazione, in quanto queste cosidette dimostrazioni assolute devono presupporre almeno la compatibilità delle regole logiche applicate.

Questa considerazione viene confermata dal fatto chè nell'esempio di dimostrazione « assoluta » esposta nel capitolo V si fa uso del principio del terzo escluso in sede metamatematica presentandosi una dimostrazione per assurdo.

costruzione delle geometrie non euclidee (pag. 21) « gli assiomi euclidei erano ritenuti universalmente come affermazioni vere sullo spazio » (da intendersi, sembra, come spazio fisico), in quanto i geometri d'indirizzo platonico pensavano (e pensano tuttora) che le proposizioni geometriche si riferiscano al mondo delle idee.

Mi sembra inoltre alquanto arbitraria l'interpretazione (pagg. 42-43) dei passaggi di un ragionamento di Euclide, in termini di logica matematica.

Nel precedente capitolo IV era stata esposta sommariamente la codificazione sistematica della logica formale secondo i « *Principia mathematica* » di Whitehead e Russell.

Le operazioni logiche sulle proposizioni vengono introdotte in un primo tempo senza una definizione precisa, soprattutto non distinguendo il « se ... allora » di una deduzione, dall'implicazione materiale. Successivamente le definizioni delle operazioni (pagg. 58-59) vengono date in forma astratta, senza riferimento al vero o al falso ma soltanto a certe classi di proposizioni

Nel capitolo VI viene esposto il paradosso di Richard sul quale viene modellata la dimostrazione del teorema del Godel, che afferma l'impossibilità di dare una dimostrazione metamatematica della coerenza di un sistema abbastanza ampio da contenere l'aritmetica, servendosi soltanto delle regole d'inferenza usate nel sistema dato.

Nel capitolo considerato si spiega anche nelle grandi linee come Gödel mostrò che proposizioni metamatematiche intorno ad un calcolo aritmetico formalizzato possono rappresentarsi con formule aritmetiche del calcolo stesso. Tale rappresentazione ha permesso al Gödel di dimostrare il suo celebre teorema seguendo lo stile del paradosso di Richard, ma evitando l'incongruenza inerente nella costruzione richardiana.

Il VII° capitolo è dedicato alla presentazione dei principali caposaldi delle dimostrazioni dei risultati fondamentali del Gödel sull'esistenza di questioni indecidibili; mancano, tuttavia, le dimostrazioni di alcuni passaggi essenziali. Inoltre, mentre si notano lacune nelle dimostrazioni formali, certe fondamentali questioni concettuali rimangono nell'ombra. P. es. (v. pag. 89), ha un senso una formula che afferma la propria indimostrabilità? E in caso affermativo, qual'è precisamente questo senso?

Interessanti nel capitolo VIII° le riflessioni conclusive, le quali però, in un certo senso, limitano la portata dei teoremi del Gödel (pag. 101) « La possibilità di costruire una dimostrazione finitistica assoluta di autocompatibilità per l'aritmetica non è esclusa dai risultati di Gödel. Gödel mostrò che non è possibile alcuna prova che non sia rappresentabile nell'ambito dell'aritmetica ».

La conclusione dei nostri Autori è che « le dimostrazioni del Gödel mettono in evidenza certe limitazioni intrinseche del metodo assiomatico » (pag. 13) ma non « limiti ineluttabili alla ragione umana » (pag. 104). Sarei d'accordo sul primo punto ma non sul secondo.

Le limitazioni intrinseche del metodo assiomatico si traducono come osservano i nostri Autori, in limitazioni nelle possibilità delle macchine calcolatrici.

Ma (pag. 102) « come dimostrano i ragionamenti di Godel, non è possibile porre alcun limite aprioristico all'inventiva dei matematici nell'escogitare nuove dimostrazioni ».

Contrariamente a quanto una visione superficiale dei risultati in esame potrebbe far credere, il Gödel propende per un realismo filosofico del tipo dell'antico platonismo come risulta dal seguente passo riportato dai nostri Autori (pag. 102): « Le classi e i concetti possono ... essere concepiti come oggetti reali ... esistenti indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni. Mi sembra che l'ipotesi dell'esistenza di tali oggetti sia assai legittimata, come l'ipotesi dell'esistenza dei corpi fisici, e vi sono molte ragioni per credere nella loro esistenza ».

Ed ecco la conclusione finale dei nostri Autori, i quali, a proposito del teorema di incompletezza del Gödel dichiarano (pag. 104): « Il teorema in questione indica che la struttura e la potenza della mente umana sono di gran lunga più complesse e sottili di qualunque macchina non vivente finora immaginata. L'opera di Gödel è un bellissimo esempio di una tale complessità e sottigliezza. È un motivo non per avvilire, ma per apprezzare ancora una volta la potenza della ragione creativa ».

ETTORE CARRUCCIO

E. LUCAS, *Recherches sur l'Analyse indeterminée et l'Arithmétique de Diophante*, Librairie scientifique et technique A. Blanchard, Paris (1961). Pagine 92. Prezzo 8NF.

Si tratta della riproduzione di un'opera giovanile del Lucas, la cui pubblicazione originale risale al 1873 Rifacendosi alla nobile tradizione dei commentatori di Diofanto, tradizione che vanta nomi illustri come quelli di Bachet e di Fermat, il nostro Autore prospetta e sviluppa, in quattordici brevi articoletti, distribuiti in due capitoli, varie questioni riguardanti la risoluzione di particolari equazioni indeterminate e le proprieta delle somme di potenze simili e dei numeri di Bernoulli Una breve rassegna storica introduce la trattazione.

I risultati esposti sono dovuti in gran parte a Fermat, Euler, Legendre, Dirichlet Alcuni sono originali dell'Autore; interessanti fra essi alcuni che forniscono una soluzione completa di certe equazioni biquadratiche.

L'argomento può apparire in sè alquanto circoscritto; non bisogna tuttavia dimenticare l'importanza che esso storicamente ha avuto come stimolo a un certo tipo di ricerche che sono sboccate poi nella moderna algebra e nella moderna teoria dei numeri.

Le ricerche di analisi indeterminata, anche queste di natura elementare, sono tali da richiedere spesso una elaborata e sottile trattazione; di esse si può dire, in un certo senso, che sono sempre vecchie e sempre nuove Questo spiega un po' il fatto che anche una modesta opera come questa può essere ancora utilmente consigliata, dopo quasi un secolo, a coloro che vogliono iniziarsi in questo ramo della ricerca matematica, che più d'ogni altro ha la caratteristica di vantare numerosi amatori anche fra i dilettanti e di aver trovato per contro degli appassionati cultori anche fra i rappresentanti più illustri del pensiero matematico.

Garbata ed utile anche per notizie storiche, relative ad alcuni autori meno noti citati nel testo, la succinta presentazione di tutta l'opera fatta da J. Itard.

MARCO CUGIANI

A. O. GELFOND, *The solution of equations in integers*, W. H. Freeman & Co., San Francisco & London (1961). Traduzione dal russo J. B. Roberts. Pagine VIII + 63. $ 1.

Si tratta della traduzione inglese di un'opera pubblicata originariamente in russo e di cui è già stata recensita in questo bollettino la traduzione tedesca. Si veda Boll. U.M.I. (3), 10 (1955), pagg. 422-23.

Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. V, Edited by L. CESARI, J. LASALLE, and S. LEFSCHETZ, Annals of Math. Studies, N°. 45, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960, V + 286 pp., $ 5.

Le « Contributions » alla teoria delle oscillazioni non lineari rappresentano da oltre 10 anni una vera e propria rivista specializzata dedicata, in senso lato, allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie. Al I volume, uscito nel 1950, fecero seguito il II nel 1952, il III nel 1956, il IV nel 1958, tutti editi a cura di S. Lefschetz nella stessa serie degli Annals of Math. Studies di cui fa parte anche il presente V volume nella edizione del quale si sono associati a Lefschetz, J. La Salle ed L. Cesari.

Apre il volume un articolo di J. La Salle sul problema del controllo in un tempo minimo (time optimal control problem) per i sistemi retti da equazioni differenziali lineari: si tratta, com'è noto, di uno dei casi più interessanti della teoria dei controlli ottimali teoria che ha contribuito in modo essenziale alla realizzazione delle imprese spaziali.

Segue un breve articolo di J. Jarnik e J. Kurzweil tendente a provare con un esempio la insopprimibilità di una certa condizione posta da Kurzweil in un precedente lavoro sulla dipendenza continua da un parametro k delle soluzioni di un sistema differenziale $dx/dt = f(t, x, k)$; un paio di errori di stampa mettono alla prova la perspicacia del lettore.

Alle equazioni contenenti un parametro sono dedicati anche i successivi 4 lavori.

Il primo, di Jane Cronin, riconduce in modo elegante la trattazione del problema di perturbazione di Poincaré nel caso degenere (ricerca di soluzioni $x(t, \varepsilon)$ periodiche in t del sistema $dx/dt = Ax + \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ quando il sistema ridotto $dx/dt = Ax$ ha soluzioni periodiche distinte da quella nulla) alla determinazione del grado topologico di un omeomorfismo in un appropriato spazio euclideo.

Ai sistemi periodici con parametro sono dedicati anche i due articoli di J. Hale e quello di L. Cesari, tutti assai densi di sviluppi analitici e di interessanti risultati, nell'indirizzo coltivato con successo dalla scuola che fa capo a Cesari.

Il primo articolo di Hale riguarda il comportamento delle soluzioni di un sistema del 2° ordine $\ddot{x}_i + \sigma_i^2 x_i = \varepsilon \sum_{1}^{n}{}_k \varphi_{ik}(t) x_k$, $\varphi_{ik}(t + 2\pi/\omega) = \varphi_{ik}(t)$, in prossimità dei valori di risonanza $2\sigma_j =$ multiplo di ω, ovvero $\sigma_j \pm \sigma_k =$ multiplo di ω.

Nel secondo articolo di Hale un metodo sviluppato da Cesari, da R. A. Gambill e dallo stesso Hale in una serie di lavori precedenti viene usato per ottenere criteri di stabilità delle soluzioni periodiche di un sistema $\ddot{x} + Ax = \varepsilon f(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$.

Nell'articolo di Cesari vengono presi in esame sistemi differenziali nel campo complesso, contenenti un « piccolo » parametro e per essi, supposte soltanto la continuità o la lipschitzianità dei secondi membri, si prova con i metodi dell'analisi funzionale l'esistenza di soluzioni periodiche isolate o di famiglie di soluzioni periodiche.

L'applicazione di metodi funzionali (e precisamente del teorema di Tychonov sul punto unito) allo studio di varie proprietà (esistenza in intervalli infiniti, limitatezza, stabilità) delle soluzioni di un sistema $dx/dt = A(t)x + f(t, x)$ è l'argomento di un articolo di A. Stokes in cui tali proprietà sono dedotte da quelle corrispondenti delle soluzioni del sistema ridotto $dx/dt = A(t)x$ mediante opportune maggiorazioni della perturbazione $f(t, x)$.

L. Markus compie uno studio dei sistemi quadratici $dx^i/dt = \sum_{1}^{n}{}_{jk} a^i_{jk} x^j x^k$, $i = 1, \dots, n$, dove le a^i_{jk} sono n^3 costanti reali tali che $a^i_{jk} = a^i_{kj}$. La classificazione di tali sistemi si effettua attraverso l'associazione di un'algebra lineare definita dalla tabella di moltiplicazione $u^j \cdot u^k = \sum_{1}^{n}{}_{jk} a^i_{jk} u_j$.

Una breve nota di G. Reeb è dedicata alle traiettorie limitate in un campo di vettori di classe C^1 sul prodotto $S_n \times I$ essendo S_n la sfera ad n

dimensioni munita della struttura di spazio di Riemann ed I l'intervallo $[-1, 1]$. L'esistenza di traiettorie limitate per un sistema autonomo $dx/dt = X(x)$ nello R^n euclideo in ipotesi di unicità è dimostrata sotto opportune condizioni da P. Mendelson facendo ricorso al noto metodo topologico di T. Wazewski. Tali condizioni si possono tradurre in forma analitica se $X \in C^2$.

Un notevole contributo allo studio dei sistemi autonomi con secondo membro discontinuo a tratti è offerto dall'articolo di J. André e P. Seibert. Tale studio, com'è noto, va acquistando una importanza sempre crescente nella teoria dei controlli automatici dopo le ricerche della Flügge-Lotz nel caso lineare e quelle più recenti di Bellman e di Pontriaghin e dei loro collaboratori.

Due interessanti Note (la prima, di C. Coleman, sulla stabilità asintotica della soluzione nulla di un sistema $dx_i/dt = X_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, la seconda, di R. P. de Figueiredo, sull'esistenza e l'unicità di cicli limite per l'equazione $\ddot{x} + R(\dot{x}) + x = 0$ con $R(y)$ continua e dotata di derivata continua a tratti) ed una Appendice (che segnala gli errata contenuti in un lavoro di E. Pinney apparso nel vol. 3 delle « Contributions ») chiudono il volume.

Per l'elevatezza, la varietà e l'importanza degli argomenti trattati questo 5° volume è da ritenersi uno dei migliori della serie.

RTO CONTI

W. H. GOTTSCHALK e G. A. HEDLUND, *Topological dynamics*, ed. American Mathematical Society, 1955, pagine 151, senza indicazione di prezzo.

Il volume, concernente l'argomento di alto e moderno interesse rappresentato dalla « Dinamica topologica », consta di uno studio dei gruppi di trasformazioni con riguardo a quelle proprietà topologiche che apparvero già da tempo fondamentali per l'interpretazione e gli sviluppi della Dinamica classica. È quasi superfluo ricordare qui che la Dinamica topologica deve la sua nascita alla classica opera di ricerca di H. Poincaré e di G. D. Birkhoff; poichè fu Poincaré a formulare per primo, e risolvere, problemi di Dinamica come problemi di Topologia; e fu G. D. Birkhoff a dare contributi fondamentali ai concetti basilari della Dinamica topologica e ad intraprendere il loro sviluppo sistematico.

Il volume di cui stiamo parlando consta di due parti: la prima dedicata alla teoria generale, la seconda dedicata alla esposizione di esempi notevoli di movimenti, che hanno contribuito alla teoria generale della Dinamica topologica e che, inversamente, sono stati effettivamente puntualizzati, anzi illuminati, dalla teoria generale stessa. La lettura del libro presuppone una conoscenza elementare della teoria degli insiemi, della topologia degli spazi uniformi e dei gruppi topologici. Per una tale conoscenza, il riferimento piu appropriato appare quello bourbakista; precisamente ci si servirà delle seguenti esposizioni: N. Bourbaki, Eléments de mathématique, I. Partie, Les structures fondamentales de l'analyse (1.I. Théorie des ensembles, l. III, Topologie générale, Groupes topologiques). Le notazioni usate sono quelle ormai ben note. Inoltre va tenuto presente che, nel volume in questione, quando non sia specificato il contrario, i gruppi vengono assunti come moltiplicativi; e che i gruppi topologici non sono necessariamente assunti come separati. I gruppi addittivi di interi vengono indicati con I e i gruppi additivi di numeri reali con R.

Contrariamente all'uso solito, il segno di trasformazione è ordinariamente posto a destra. Cioè, se X ed Y sono insiemi, se f indica una trasformazione di X in Y ed $x \in X$, allora xf indica l'unico elemento di Y determinato da x ed f. Viene usato il termine « index » in luogo del termine « entourage » che viene usato da Bourbaki. In accordo con la notazione per il valore di una funzione, se X è uno spazio uniforme, α è un « indice » di X ed $x \in X$, allora $x \in \alpha$ denota l'insieme di tutti gli $y \in X$ tali che (x, y) α. Finchè non sia affermato il contrario — ripetiamo — uno spazio uniforme non è necessariamente separato.

La prima parte del volume è suddivisa in undici capitoli che prendono le mosse dalla teoria dei gruppi di trasformazioni per concludere con la teoria degli spazi di funzioni.

La seconda parte del volume stesso è suddivisa in tre capitoli dedicati rispettivamente alla Dinamica simbolica, ai moti su geodetiche di varietà dotate di curvatura negativa costante, a moti cilindrici e ad un moto piano. Il moderno interesse dell'opera appare estremamente evidente.

ANTONIO PIGNEDOLI

O. BORŮVKA, *Grundlagen der Gruppoid-und Gruppentheorie*. Hochschulücher für Mathematik, Band 46, VEB Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, pp. 198 + 12.

Il teorema di Jordan-Hölder sopra l'isomorfia di due serie di composizione di un gruppo finito è, come è ben noto, uno dei risultati classici e basilari della teoria dei gruppi. Si comprende perciò come esso sia stato oggetto di numerosi approfondimenti e di vari tentativi di generalizzazione. Così, da un lato lo si è opportunamente esteso ai gruppi infiniti, attraverso il teorema di Schreier-Zassenhaus e quello di Kuroš; dall'altro si è messo in luce l'aspetto reticolare di detto teorema, e lo si è trasportato anche a strutture dotate di assiomatica più debole. L'orizzonte si è in tal modo straordinariamente allargato. In quest'ordine di idee può inserirsi anche l'opera in esame, il cui titolo non è forse il più indovinato, perchè da esso non risulta il particolare aspetto della teoria dei gruppi e dei gruppoidi che viene messo a fuoco nel trattato.

L'opera è divisa in tre capitoli, dedicati rispettivamente agli insiemi, ai gruppoidi, e ai gruppi. C'è in altri termini un passaggio successivo da strutture ad assiomatica più debole ad altre ad assiomatica via via più forte.

Nel primo capitolo, è esposta la teoria delle partizioni in un insieme, che ebbe origine negli anni attorno al 1)40 per opera di P. Dubreil e M. L. Dubreil-Jacotin, dello stesso Borůvka, e di O. Ore. Per partizione in un insieme G si intende un insieme di sottoinsiemi a due a due disgiunti di G; se i sottoinsiemi che formano la partizione esauriscono G, quest'ultima si dice partizione su G. Le partizioni su un insieme formano un insieme parzialmente ordinato (una partizione dicendosi minore di un'altra quando ogni sottoinsieme della prima è contenuto in uno della seconda) anzi un reticolo. Si possono pertanto considerare, in questo reticolo, le catene (cioè sottoinsiemi totalmente ordinati). Definite opportune relazioni di equivalenza tra catene, si giunge a teoremi tipo Schreier-Zassenhaus, in base ai quali date due catene, è possibile costruire due raffinamenti delle catene stesse i quali risultino equivalenti.

Il secondo capitolo è dedicato ai gruppoidi, cioè insiemi in cui è definita una legge di composizione binaria (detta moltiplicazione) senza che si imponga ad essa alcuna particolare proprietà. Dopo aver dato le prime proprietà dei gruppoidi, l'autore passa a considerare, in un gruppoide, particolari partizioni che egli chiama *generanti* (« erzeugende »): una partizione generante $\bar{A}$ in un gruppoide G è una partizione tale che, se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ sono sottoinsiemi di G appartenenti ad $\bar{A}$, i prodotti degli elementi di $\bar{a}$ per quelli di $\bar{b}$ stanno tutti in un medesimo sottoinsieme c appartenente ad $\bar{A}$. Se si chiama ora prodotto dei sottoinsiemi $\bar{a}$ e $\bar{b}$ appartenenti ad $\bar{A}$ il sottoinsieme $\bar{c}$, anch'esso appartenente ad A, si ha che A diviene a sua volta un gruppoide rispetto all'operazione di prodotto ora definita, gruppoide che prende il nome di fattoroide. I fattoroidi sono evidentemente l'analogo dei gruppi fattoriali di un gruppo. Inoltre le partizioni generanti su un gruppoide costituiscono un sottoreticolo del reticolo di tutte le partizioni sul gruppoide. Se si fa corrispondere ad ogni partizione generante su un gruppoide il relativo fattoroide e si trasporta ai fattoroidi la relazione di inclusione tra partizioni generanti, si ha che i fattoroidi costituiscono anch'essi un reticolo. Considerate le catene di tale reticolo, si arriva a teoremi tipo Schreier-Zassenhaus anche per le catene di fattoroidi.

Il terzo capitolo è dedicato ai gruppi. L'autore considera le particolari partizioni sui gruppi date dalla decomposizione del gruppo considerato secondo i laterali di un sottogruppo Ad ogni catena di sottogruppi corrisponde una catena di tali partizioni. I teoremi tipo Schreier-Zassenhaus dati per le partizioni di un insieme danno origine, qualora si considerino catene di sottogruppi verificanti opportune condizioni (p. es., permutabilità) a teoremi tipo Schreier-Zassenhaus per tali catene. Infine l'autore passa a considerare le partizioni generanti su un gruppo, e mostra che esse coincidono con le partizioni date dalle decomposizioni in laterali rispetto ad un sotto gruppo normale. I fattoroidi, nel caso di un gruppo, si riducono pertanto ai gruppi fattoriali. La teoria delle catene di partizioni generanti su un gruppoide dà luogo quindi, nel caso di un gruppo, alla teoria delle catene normali di sottogruppi di un gruppo, conducendo agli ordinari teoremi di Schreier-Zassenhaus e Jordan-Hölder.

Sono esposti nel trattato anche vari argomenti collaterali, su cui non possiamo fermarci. Ogni paragrafo è corredato da svariati esercizi. Chiudono il volume una buona bibliografia sulle partizioni degli insiemi e le relazioni di equivalenza dal 1937 al 1958, e un elenco dei più recenti trattati di teoria dei gruppi. L'esposizione è sempre precisa e particolareggiata, onde la lettura del testo non dovrebbe presentare difficoltà neppure ai principianti.

GUIDO ZAPPA

D. BARBILIAN, *Gruppuri cu operatori*, (Teoremele de descompunere ale algebrei), Editura Academiei Republici Populare Romine, 1960, pp. 617.

Come è indicato nella prefazione (che figura, con poche varianti, in romeno, russo e francese), il volume in esame era stato concepito come « un repertorio della quasi totalità degli argomenti dell'Algebra che oggi si chiama, ben a torto, moderna ». Ragioni di spazio hanno poi spinto l'autore a limitarsi ad un campo più circoscritto. Il volume si divide in due parti, che hanno rispettivamente per titolo, la prima il titolo stesso del volume (Gruppi con operatori), la seconda il suo sottotitolo (Teoremi di decomposizione di un'algebra). Ma gli stessi titoli delle due parti non individuano bene il loro contenuto. L'unità del volume, come indica lo stesso autore, è da ricercarsi più nel metodo che nel contenuto: infatti, i gruppi con operatori vengono applicati, nella seconda parte, per ottenere i teoremi di decomposizione.

L'opera presenta notevoli aspetti di originalità, sia nell'impostazione, sia nella materia trattata. Secondo quanto lo stesso autore dice, l'apporto originale riempie quasi la metà dell'opera. Esso consiste soprattutto in ampie e delicate generalizzazioni di teorie classiche.

I primi due capitoli sono dedicati agli elementi base della teoria dei gruppi e dei gruppi con operatori. Il concetto di gruppo appare come caso particolare di quello di antegruppo (semigruppo in cui, per ogni elemento a, esiste un elemento l_a tale che $l_a a = a$), concetto che egli utilizzerà più oltre. Il concetto di omomorfismo tra gruppi è presentato soprattutto dal punto di vista reticolare, cioè con particolare accento sulla corrispondenza che un omomorfismo di un gruppo G su un gruppo G' induce tra i sottogruppi di G e quelli di G', e viceversa. Il capitolo terzo è dedicato agli anelli e ai corpi, che vengono pensati come particolari gruppi con operatori, mentre il quarto ci fornisce il teorema di Wedderburn sulla commutatività dei corpi finiti e le sue applicazioni aritmetiche.

La parte più notevole e più nuova del libro è però la seconda. Nei capitoli quinto e sesto vengono dati, per varie strutture algebriche, nuovi teoremi tipo Jordan-Hölder di forma assai generale. Non possiamo, data la complessità della questione, indicare questi interessanti risultati; ci limiteremo ad osservare che la teoria svolta dal Barbilian unifica diverse teorie più particolari svolte da altri autori (Ore, Kořinek, etc.). Seguono due capitoli dedicati ai prodotti diretti e semidiretti, e a teoremi di tipo Remak-Schmidt, più generali di quelli precedentemente noti. Infine, l'ultimo capitolo ci fornisce il teorema di struttura di Wedderburn, in cui però all'ipotesi dell'esistenza di una unità bilatera, è sostituita quella, più debole, dell'esistenza di una unità sinistra. Interessante anche la generalizzazione del teorema di Schneidmüller sulla finitezza degli anelli a condizione massimale e minimale.

L'autore afferma, nella prefazione, che il suo volume intende essere il commento e la continuazione dei manuali classici di Van der Waerden e Zassenhaus. A me sembra che esso abbia più carattere di monografia che di trattato, ma ciò non toglie affatto interesse all'opera. Essa, a detta dell'autore, appare anche complementare ai trattati di Kuroš e ai quaderni di Bourbaki, nei quali i teoremi di decomposizione sono appena accennati L'autore non cita però il trattato di Specht sulla teoria dei gruppi, il cui contenuto si sovrappone in parte a quello del suo volume: ma forse il manoscritto di quest'ultimo (che è apparso nel 1960) risale a diversi anni addietro, quando non era ancora uscito il volume di Specht.

La forma è chiara, e talora forse un po' prolissa. Sarebbe stata gradita, alla fine del volume, una bibliografia sistematica (le citazioni figurano invece solo a fine pagina); come pure un indice analitico.

Dal punto di vista editoriale, il volume lascia un po' a desiderare (carta poco bella, qualche errore di stampa: p. es., spesso si legge Zussenhaus invece che Zassenhaus). Ma questi sono piccoli nei, in un'opera pregevole, che certo è costata molto lavoro all'autore, e che sarà assai utile agli studiosi.

GUIDO ZAPPA

ETTORE CARRUCCIO, *Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino, Gheroni, 1958, pp. 368. L. 3500.

Il presente volume è una nuova edizione a stampa (con piccole modifiche ed aggiunte) dell'opera pubblicata per la prima volta nel 1951 in litografia con lo stesso titolo, e la cui seconda edizione, del 1952, fu recensita in questo stesso Bollettino (vol. VIII, 1953, p. 345) dal compianto F. Conforto.

Rimandiamo pertanto a quest'ottima recensione per l'esposizione dettagliata del contenuto dell'opera, la quale, per il periodo che va dalle origini della matematica alla scoperta della geometria analitica e dell'analisi infinitesimale espone con completezza le principali tappe della storia della matematica, mentre per il periodo più recente, pone l'accento su quei rami e su quei momenti dello sviluppo matematico che maggiormente hanno influito sull'evoluzione della logica. Ma si può dire che l'aspetto logico è presente in tutto il volume, differenziandolo nettamente dagli ordinari trattati di storia della matematica.

Di particolare interesse sono gli ultimi capitoli, nei quali viene descritto il sorgere della logica simbolica con Peano, Hilbert, etc., vengono presentati i principali tipi di simbolismi usati in proposito (Peano, Hilbert, Lukasiewicz, etc.), e vien fatta un'acuta analisi del movimento di pensiero che ha portato dal concetto di sistema ipotetico-deduttivo (per cui i postulati sono arbitrari, ma le regole per dedurre sono quelle classiche) a quello di sistema razionale (in cui si stabiliscono a priori non solo in gruppo di postulati da cui si parte, ma anche le regole per dedurre).

Il Carruccio espone anche con chiarezza le linee generali del neo-positivismo, il teorema di Gödel sull'impossibilità di dimostrare la non contraddittorietà di un sistema razionale, il problema dell'esprimibilità di un sistema razionale in simboli, etc. Circa quest'ultimo punto, il Carruccio ritiene che non sia possibile dare una combinazione di simboli (in numero finito) che esprima « le proposizioni primitive e le regole per dedurre alla base di un determinato sistema razionale », perché una tale combinazione « è sempre suscettibile di più interpretazioni logiche diverse, che danno luogo a successioni diverse di teoremi », come egli prova con un acuto ragionamento. Però questo fatto, secondo il Carruccio, non impedisce che nella mente « esista una teoria razionale la quale non può porsi in corrispondenza biunivoca con dati sensibili quali sono i segni di un linguaggio, mentre tale teoria deve in ogni mente svilupparsi come personale conquista ».

Di fronte al risultato di Gödel, il Carruccio afferma che, non potendosi dimostrare la non contraddittorietà di un sistema razionale, « il riconoscimento della non contraddittorietà di una parte di questi sistemi, da cui si potrebbe ricavare la non contraddittorietà degli altri, dovrebbe avvenire mediante un atto extra-logico », quasi « un atto di fede ».

Bastano questi pochi cenni per mettere in luce il vivo interesse che suscita l'opera, scritta in una forma facile e piana, costruita con serietà scientifica, dotata di una ricca documentazione bibliografica.

GUIDO ZAPPA

B. SEGRE, *Lectures on modern Geometry*, Monografie Matematiche del C. N. R. (Edizioni Cremonese, Roma 1961) pp. XV + 479.

Circa tredici anni or sono il professor Segre dava alle stampe per i tipi della casa Zanichelli le ormai notissime « Lezioni di Geometria moderna » dedicate ai fondamenti della Geometria Proiettiva sopra un corpo qualsiasi.

Poichè il contenuto di quel prezioso volumetto appare ora tradotto, in lingua inglese, sostanzialmente senza cambiamenti, nella prima parte delle attuali « Lectures on modern Geometry », ci sembra utile presentarne un breve sunto prima d'illustrare la parte nuova delle stesse « Lectures ».

L'opera ha inizio con un rapido e conciso compendio dei principi generali dell'Algebra astratta (il tutto occupa circa un quarto della nuova monografia); e sia ben chiaro che si tratta di un compendio organizzato in forma autonoma e non di semplici richiami.

Passando poi agli argomenti geometrici, il Segre ricostruisce sistematicamente per spazi lineari sopra un corpo arbitrario anche *non commutativo* le ordinarie nozioni grafiche della Geometria proiettiva lineare classica; e qui occorre ricordare che l'originalità dell'esposizione del Segre sta nel fatto che essa è realizzata con criteri prettamente geometrici e non risulta affatto essere una estensione di tipo analitico dell'analoga trattazione nel caso classico, alla cui base sta la teoria delle equazioni lineari e dei determinanti che manca quasi del tutto quando si passa ad un corpo sghembo. Questa teoria è invece sfruttata in un secondo tempo, quando — sul modello classico — si approfondisce lo studio degli spazi lineari sopra un corpo commutativo qualsiasi, adattando ad esempio al caso più generale le magistrali ricerche di Corrado Segre sulle omografie iperspaziali.

Parallelamente agli spazi lineari vengono presentati gli spazi grafici, cioè gli spazi nei quali valgono le proprietà di appartenenza e grafiche degli ordinari S_n lineari.

Il punto più suggestivo della trattazione sta nel mostrare che gli spazi lineari dianzi introdotti sono tutti e soli gli spazi grafici *irriducibili* per i quali vale il teorema di Desargues sui triangoli omologici; ed il risultato viene ulteriormente precisato mettendo in luce che il corpo base dello spazio lineare è commutativo se, e solo se, in detto spazio vale il teorema di Pappo-Pascal.

Passiamo ora ad illustrare la seconda parte della monografia, che contiene tra l'altro un'Appendice di L. Lombardo Radice sui piani non desarguesiani, e si differenzia notevolmente dalla prima per il suo carattere più accentuatamente costruttivo. Già il Segre aveva giustamente osservato che i vantaggi portati negli studi geometrici dai nuovi orientamenti dell'Algebra sarebbero stati poco rilevanti, o comunque pagati ad un prezzo troppo elevato, se avessero costretto per molto tempo le ricerche nella sola sistemazione critica dei fondamenti. Oggi si può dire con soddisfazione che questo pericolo non sussiste; prova ne sono i brillanti successi ottenuti nella Geometria algebrica astratta dalle scuole francese ed americana e nella Geometria proiettiva sopra un campo finito dal Segre stesso e da altri Autori.

Orbene la seconda parte delle « Lectures » è dedicata per intero all'esposizione dei numerosi contributi recati alla Geometria degli spazi finiti nell'ultimo decennio. Fra questi contributi spicca per eleganza, e diciamo pure per il senso d'inaspettata novità, il significativo risultato di Segre sulle ovali in un piano di Galois di caratteristica diversa da 2, risultato che è stato poi esteso parzialmente alle curve razionali normali di uno spazio superiore e che ha dato origine a tutte le ricerche di Segre ed allievi sui cosidetti k-archi, sulle k-calotte, sui sistemi diofantei collegati ai suddetti enti, e sui gruppi di omografie che mutano questi in se stessi.

Due convenienti generalizzazioni dei classici teoremi di Ceva e Menalao offrono condizioni necessarie e sufficienti affinchè una curva piana sia algebrica e permettono di associare ad un k-arco un'opportuna curva algebrica Una particolare attenzione è riservata al comportamento, in un certo senso eccezionale, degli insiemi di punti appartenenti ad uno spazio lineare finito di caratteristica 2; ed alcuni paragrafi sono dedicati alla relazione ternaria ed ai sistemi di postulati che definiscono i cosiddetti piani di Kustaanheimo.

Infine è stata integralmente inserita nella monografia l'ampia ed importante memoria (già apparsa nei Rendiconti del Circolo di Palermo) nella quale il Segre fonda una teoria essenzialmente geometrica delle forme quadratiche in un corpo *non commutativo*. Ivi vengono dettagliatamente studiate le coniche, le schiere rigate (regoli) e le quadriche, con particolare riguardo a delicate questioni numerative ed alle proprietà che mettono in luce le differenze sostanziali dei nuovi problemi rispetto a quelli classici (riferentisi a corpi commutativi). Segnaliamo tra l'altro la caratterizzazione del centro di un corpo mediante un'elegante proprietà delle schiere definite sopra il corpo stesso.

Il volume è chiuso dalla pregevole Appendice sui piani grafici finiti non desarguesiani redatta da Lucio Lombardo Radice; tale appendice è un accurato compendio di ricerche quasi tutte recenti (eseguite dallo stesso Lombardo-Radice e da numerosi altri Autori) ed in un certo senso completa quella parte dell'opera del Segre dedicata ai rapporti tra i postulati degli spazi grafici e le strutture dell'Algebra astratta.

La trattazione fa uso sistematico del cosiddetto anello ternario di Marshall Hall associato ad un piano grafico affine; i metodi impiegati sono di natura algebrico-geometrica oppure aritmetico-gruppale. La linea direttiva della esposizione consiste nel mettere in luce le caratteristiche che acquista l'anello ternario K man mano che il piano grafico associato P si arricchisce di opportuni gruppi di omologie. Ad esempio, se P possiede tutte le traslazioni aventi il centro in uno dei due punti impropri del sistema delle coordinate di Hall, l'anello K diventa un sistema cartesiano; più in particolare P è un piano di traslazione (cioè possiede tutte le possibili traslazioni) se, e solo se, l'anello K è un quasicorpo destro; inoltre P è addirittura microdesarguesiano (cioè possiede tutte le possibili omologie speciali) quando, e solo quando, l'anello K è un quasicorpo (distributivo) alternativo. A questa proprietà vengono poi collegati alcuni importanti teoremi; qui vogliamo ricordare il noto risultato di Zorn-Levi, secondo il quale ogni piano microdesarguesiano finito è desarguesiano (traduzione del fatto che un quasicorpo alternativo finito è un corpo), ed il teorema di Gleason che identifica i piani lineari finiti di caratteristica 2 con i piani finiti di Fano.

L'Appendice termina con un elenco di problemi tuttora insoluti.

Concludendo la rassegna dell'interessante volume, facciamo rilevare che esso è dotato di una ricca ed aggiornata bibliografia che insieme al volume stesso potrà certamente riuscire utile a quanti vogliano studiare più a fondo gli argomenti ivi trattati. Ottima la veste tipografica.

ERMANNO MARCHIONNA