FERNANDO LAURENTI

Sopra alcune notevoli equazioni differenziali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 29–34.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_29_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Sopra alcune notevoli equazioni differenziali.

Nota di FERNANDO LAURENTI (a Vercelli) (*)

Sunto. - *Si dimostra che una notevole equazione differenziale risolta dal Tisserand può risolversi in modo più semplice e meno artificioso con un procedimento che viene poi applicato ad altre equazioni più generali.*

1. Un'equazione differenziale interessante è la seguente;

$$y(x^2+y^2)dx+x(xdy-ydx)=0, \tag{1}$$

che è integrata nel noto volume di F. TISSERAND: *Recueil complementaire d'Exercices sur le calcul infinitèsimal,* deuxième édit. page 167 (GauthierVillars; Paris, A. 1896), mediante la preventiva determinazione di un fattore integrante.

Ora mostreremo che tale equazione si può integrare in modo diretto, più semplicemente. con un procedimento che permette di integrare equazioni più complicate della (1), per le quali la determinazione di un fattore integrante sembra tutt'altro che agevole.

A questo scopo, osserviamo che la (1) può scriversi:

$$y(x^2+x^2)dx+x^3d\frac{y}{x}=0,$$

cioè:

$$\frac{y}{x}dx+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\frac{y}{x}=0\,;$$

questa forma suggerisce di porre:

$$tg\varphi=y/x, \tag{2}$$

e allora si ha semplicemente:

$$tg\varphi dx+d\varphi=0\,,$$

(*) Pervenuta alla segreteria dell'U. M. I. il 15 gennaio 1962.

da cui:

$$x + c = -\int \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} d\varphi = -\log \operatorname{sen}\varphi,$$

ove c è una costante arbitraria; ne viene:

$$\operatorname{sen}\varphi = Ce^{-x},$$

ove C è un'altra costante positiva, arbitraria; si deduce poi tosto:

$$ye^{x} / \sqrt{x^2 + y^2} = C,$$

come ha pure trovato il Tisserand.

2. Si possono in modo simile integrare equazioni più generali della (1), che sarebbe assai malagevole integrare col metodo del fattore integrante.

Così se si ha l'equazione:

$$ay^n (x^2 + y^2)\, dx + x^n (xdy - ydx) = 0,$$

essa può scriversi:

$$\text{(3)} \qquad a\left(\frac{y}{x}\right)^n dx + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\,\frac{y}{x} = 0,$$

e colla posizione (2) diventa:

$$atg^n\varphi\, dx + d\varphi = 0,$$

da cui:

$$a(x + c) = -\int \frac{d\varphi}{tg^n\varphi},$$

od anche:

$$a(x + c) = -\int \cot^n \varphi d\varphi,$$

con c costante arbitraria; l'integrale che qui figura si può calcolare con metodi noti.

La (3) può anche integrarsi in quest'altro modo: posto

$$z = y/x,$$

essa diventa:

$$az^n\,dx + \frac{1}{1+z^2}\,dz = 0,$$

da cui:

$$a(x+c) + \int \frac{1}{z^n\,(1+z^2)}\,dz = 0\,; \tag{4}$$

supponiamo in primo luogo n intero e positivo, e poniamo

$$z = 1/u,$$

e così avremo:

$$a(x+c) - \int \frac{u^n}{u^2+1}\,du = 0\,; \tag{5}$$

effettuando la divisione si ha, se n è pari:

$$\frac{u^n}{u^2+1} = u^{n-2} - u^{n-4} + \ldots + (-1)^{n/2}\,\frac{1}{u^2+1},$$

e quindi:

$$\int \frac{u^u}{u^2+1}\,du = \frac{u^{n-1}}{n-1} - \frac{u^{n-3}}{n-3} + \ldots + (-1)^{n/2}\,arctg\,u\,;$$

se n è dispari si ha:

$$\frac{u^n}{u^2+1} = u^{n-2} - u^{n-4} + \ldots - (-1)^{(n-1)/2}\,u + (-1)^{(n-1)/2}\,\frac{u}{u^2+1}$$

e allora:

$$\int \frac{u^n}{u^2+1}\,du = \frac{u^{n-1}}{n-1} - \frac{u^{n-3}}{n-3} + \ldots - (-1)^{(n-1)/2}\,\frac{u^2}{2} + (-1)^{(n-1)/2}\,\frac{1}{2}\log\,u.$$

Se poi n è intero e negativo, posto $n = -m$, la (4) ci dà:

$$a(x+c) + \int \frac{z^m}{1+z^2}\,dz = 0,$$

e l'integrale che qui figura non differisce da quello che compare nella (5).

Infine, se n è un razionale qualsiasi, che, per fissare le idee, supponiamo sia positivo, posto $n = r/s$, con r, s interi, si ha dalla (5):

$$a(x + c) - \int \frac{u^{r/s}}{u^2 + 1} du = 0,$$

e colla nuova posizione:

$$u = t^s ,$$

si ottiene:

$$a(x + c) - s \int \frac{t^{r+s-1}}{t^{2s} + 1} dt.$$

il quale integrale si sa calcolare con metodi noti.

3. Come altro esempio, consideriamo l'equazione:

$$ay^n \sqrt{x^2 - y^2} dx + x^{n-1}(xdy - ydx) = 0 ; \tag{6}$$

essa può scriversi:

$$a \left(\frac{y}{x}\right)^n dx + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} d\frac{y}{x} = 0,$$

e ponendo:

$$\operatorname{sen} \varphi = y/x \tag{7}$$

si ottiene:

$$a \operatorname{sen}^n \varphi dx + d\varphi = 0,$$

da cui:

$$a(x + c) = - \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^n \varphi} . \tag{8}$$

Il calcolo dell'integrale che qui figura, se n è intero, positivo e pari, si può fare osservando che

$$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n} \varphi} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^{2n-2} \varphi} \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = - \int \frac{(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{n-1}}{\operatorname{sen}^{2n-2}} d \cot \varphi =$$

$$= - \int (\cot^2 \varphi + 1)^{n-1} d \cot \varphi = - \int \sum_{0k}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cot^{2k} \varphi d \cot \varphi =$$

$$= - \sum_{0k}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\cot^{2k+1} \varphi}{2k + 1} .$$

Se n è dispari, il calcolo è un pò meno semplice: applicando l'identità

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^{2n}\varphi}=\frac{2n-1}{\operatorname{sen}^{2n-1}\varphi}-\frac{2n}{\operatorname{sen}^{2n+1}\varphi},$$

si deduce:

$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n+1}\varphi}=-\frac{\cos\varphi}{2n\operatorname{sen}^{2n}\varphi}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^{2n-1}\varphi},\tag{9}$$

relazione che si ricava pure coll'integrazione per parti; con applicazioni ripetute di questa eguaglianza si perviene al calcolo dell'integrale voluto.

Così, per es.; se $n=5$ la (6) diventa:

$$ay^5\sqrt{x^2-y^2}dx+x^4(xdy-ydx)=0,$$

e si ha per il suo integrale generale:

$$a(x+c)=-\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^5\varphi},$$

poi dalla (9) si trae:

$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^5\varphi}=-\frac{\cos\varphi}{4\operatorname{sen}^4\varphi}+\frac{3}{4}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi}=-\frac{\cos\varphi}{2\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=-\frac{\cos\varphi}{2\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{1}{2}\log tg\frac{\varphi}{2},$$

perciò:

$$a(x+c)=\frac{\cos\varphi}{4\operatorname{sen}^4\varphi}+\frac{3\cos\varphi}{8\operatorname{sen}^2\varphi}-\frac{3}{8}\log tg\frac{\varphi}{2},$$

e infine, ricordando la (7):

$$a(x+c)=\frac{x^3\sqrt{x^2-y^2}}{4y^4}+\frac{x\sqrt{x^2-y^2}}{8y^2}-\frac{3}{8}\log\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}.$$

Se n è intero, negativo e dispari, posto $n=-(2m+1)$, la (8) diventa:

$$a(x+c)=\int\operatorname{sen}^{2m}\varphi d\cos\varphi,$$

e ponendo $u=\cos\varphi$, risulta:

$$a(x+c)=\int(1-u^2)^m du,$$

il quale integrale si calcola immediatamente.

Se poi n è un razionale e si pone $n = r/s$, con r, s interi, si ha dalla (8):

$$a(x + c) = -\int (\operatorname{sen} \varphi)^{-r/s} d\varphi,$$

e ponendo

$$\operatorname{sen} \varphi = u^s,$$

si ottiene:

$$a(x + c) = s \int u^{s-r-1}(1 - u^{2s})^{-1/2} du;$$

qui abbiamo un integrale di differenziale binomio, che si tratta con metodi noti.

4. Per ultimo, si abbia l'equazione:

$$ay^n \sqrt{x^2 + y^2} dx + x^{n-1}(xdy - ydx) = 0,$$

che può scriversi:

$$a \left(\frac{y}{x}\right)^n dx + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} d \frac{y}{x} = 0,$$

e ponendo:

$$\operatorname{sen} hu = y/x,$$

risulta:

$$a \operatorname{sen} h^n u dx + du = 0,$$

da cui:

$$a(x + c) = -\int \frac{du}{\operatorname{sen} h^n u},$$

e questo integrale si calcola con trasformazioni analoghe a quelle applicate per calcolare l'integrale che figura nella (8), tenendo conto che, per note proprietà delle funzioni iperboliche, si ha:

$$\cos h^2 u - \operatorname{sen} h^2 u = 1.$$

$$\frac{du}{\operatorname{sen} h^2 u} = - d \cot hu,$$

le quali relazioni sono analoghe a quelle che valgono per le funzioni circolari.