Bollettino
Unione Matematica Italiana

Fernando Laurenti

Sul calcolo di alcuni limiti, connessi colla risoluzione delle equazioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 35–39.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_35_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Sul calcolo di alcuni limiti, connessi colla risoluzione delle equazioni.

Nota di FERNANDO LAURENTI (a Vercelli) (*)

Sunto. - *In questo lavoro prendo le mosse dalla nota successione di* FIBONACCI, *dalla quale si deduce una successione di frazioni che ha per limite la parte aurea dell'unità; stabilisco questa proprietà con procedimento nuovo, che poi estendo ed applico a varie equazioni per dedurne, mediante opportune successioni, dei valori approssimati per le loro radici positive.*

1. Consideriamo la successione di FIBONACCI

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13\ \ldots$$

in cui la legge di formazione dei termini è rappresentata dalla relazione

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \text{ove } a_1 = a_2 = 1, \tag{1}$$

la quale esprime che ogni termine della successione vale la somma dei 2 termini che lo precedono, formiamo poi le frazioni a_n/a_{n+1}, cioè dividiamo ogni termine della successione per il suo successivo e otterremo la successione:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}\ \ldots; \tag{2}$$

ora è ben noto che i termini di posto pari

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}\ \ldots; \tag{3}$$

formano una successione crescente, e i termini di posto dispari

$$1, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \ \ldots \tag{4}$$

formano una successione decrescente, e queste due successioni hanno per limite comune la parte aurea dell'unità, cioè $(\sqrt{5}-1/2$ in quanto i termini della (2) sono i valori delle succes-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 15 gennaio 1962.

sive ridotte della frazione continua periodica

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

che è la più semplice possibile, e che ha per valore precisamente $(\sqrt{5}-1)/2$.

Ora poi farò vedere direttamente (senza le frazioni continue) che la successione (2) ha per limite $(\sqrt{5}-1)/2$, infatti il termine generale della (2) è a_n/a_{n+1}, e il suo successivo è a_{n+1}/a_{n+2} ove a_{n+2} è dato dalla (1), che può scriversi:

$$1=\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+\frac{a_n}{a_{n+1}}\,\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}},$$

da cui:

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}},$$

e ponendo:

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

è chiaro che x è pure il limite della frazione a_{n+1}/a_{n+2}, e perciò si ha:

$$1=x+x^2,$$

da cui

$$x=(\sqrt{5}-1)/2.$$

2. Abbiamo così stabilito che il limite della successione (2) è la radice positiva dell' equazione

$$x^2+x-1=0,$$

e si capisce che la radice positiva di questa equazione ha come valori, sempre più approssimati, i termini della (2). E infatti, posto, per brevità

$$f(x)=x^2+x-1$$

si ha

$$f(1)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},\ f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3^2},\ f\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{5^2},$$

e per il termine generale a_n/b_n, della (2) si trova

$$f\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{b_n^2}.$$

Considerando, più in generale, l'equazione:

$$x^2+\alpha x-1=0, \qquad (\alpha>0),$$

cerchiamo la successione i cui termini rappresentano valori sempre più approssimati della radice positiva di tale equazione; si ha

$$1=\alpha x+x^2, \tag{5}$$

e considerando la successione:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \dots a_n,\ a_{n+1},\ \dots$$

poniamo

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}};$$

è chiaro che

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}},\ x^2=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\ \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right), \tag{6}$$

e sostituendo nella (5) si ottiene:

$$1=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+\frac{a_n}{a_{n+2}}\right),$$

che può scriversi:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-\alpha a_{n+1}-a_n)=0$$

la quale è verificata se

$$a_{n+2}=\alpha a_{n+2}+a_n,$$

e questa relazione, quando siano assegnati a piacere i valori di a_1 ed a_2, (per es. si può prendere $a_1=a_2=1$) ci permette di calcolare successivamente a_3, a_4, a_5 ... da cui si deduce la successione di frazioni

$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_2}{a_3},\ \frac{a_3}{a_4},\dots\frac{a_n}{a_{n+1}},\dots$$

che rappresentano valori sempre più approssimati della radice positiva della (5), la quale vale $(\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha)/_2$.

3. Considerazioni analoghe si applicano ad equazioni di grado maggiore di 2; così ad es. per l'equazione

$$x^3 + \alpha x^2 - 2 = 0 \qquad (\alpha > 0) \tag{7}$$

procedendo come nel caso precedente, si perviene alla relazione:

$$\lim_{n \to \infty} (2a_{n+3} - \alpha a_{n+1} - a_n) = 0,$$

che è soddisfatta se

$$a_{n+3} = \frac{\alpha}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n;$$

assumendo

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

si ha:

$$a_4 = \frac{\alpha+1}{2}, \; a_5 = \frac{\alpha+1}{2}, \; a_6 = \frac{\alpha^2+\alpha+2}{4}, \; a_7 = \frac{\alpha^2+2\alpha+1}{4}, \ldots$$

quindi le frazioni

$$\frac{a_3}{a_4} = \frac{2}{\alpha+1}, \; \frac{a_4}{a_5} = 1, \; \frac{a_5}{a_6} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2+\alpha+2}, \; \frac{a_6}{a_7} = \frac{\alpha^2+\alpha+2}{\alpha^2+2\alpha+1}, \ldots$$

rappresentano valori sempre più approssimati della radice positiva della (7).

Così, ad es. se $\alpha = 2$, cioè per l'equazione

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0, \tag{8}$$

le frazioni precedenti diventano:

$$\frac{2}{3}; \; 1, \; \frac{3}{4}, \; \frac{8}{9},$$

e le due successive sarebbero $\frac{9}{11}$ ed $\frac{11}{13}$ e se si indica con $f(x)$ il

I^0 membro della (8), si trova,

$$f\left(\frac{9}{11}\right)=\left(\frac{9}{11}\right)^3+2\left(\frac{9}{11}\right)^2-2=0,\ 11\ \ldots$$

$$f\left(\frac{11}{13}\right)=\left(\frac{11}{13}\right)^3+2\left(\frac{11}{13}\right)^2-2=0,\ 07\ \ldots$$

perciò il valore $\frac{11}{13}$ presenta già una buona approssimazione.

Come altro esempio, si abbia l'equazione

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x-1=0,$$

e col procedimento precedente si perviene alla relazione:

$$a_{n+4}=a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}+a_n\,,$$

ed assumendo

$$a_1=a_2=a_3=a_4=1,$$

si ottiene la successione:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 7,\ 13,\ 25,\ \ldots$$

da cui si deducono le frazioni

$$\frac{1}{4},\ \frac{4}{7},\ \frac{7}{13},\ \frac{13}{25},\ \ldots$$

che rappresentano valori sempre più approssimati della radice positiva dell'equazione $f(x)=0$; si trova, ad es.

$$f\left(\frac{13}{25}\right)=f(0{,}52)=0{,}0041,$$

che mostra l'alto grado di approssimazione della radice 0,52.

Più in generale, se la legge di formazione di una successione fosse rappresentata dalla relazione

$$a_{n+4}=\alpha_3 a_{n+3}+\alpha_2 a_{n+2}+\alpha_1 a_{n+1}+\alpha_0 a_n\,,$$

allora ponendo

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\,,$$

si giungerebbe all'equazione

$$\alpha_0 x^4+\alpha_1 x^3+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x-1=0.$$