MARIUS STOKA

Corrispondenze tra spazi proiettivi a connessione costante.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 40–47.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_40_0>

Corrispondenze tra spazi proiettivi a connessione costante.

di MARIUS STOKA (a Bucarest, Romania) (*)

Sunto. - *Basandosi sui risultati di G. Vranceanu sulle corrispondenze tra spazi proiettivi* [2], [3], [4], *l'autore determina le connessioni proiettive costanti che definiscono corrispondenze tra spazi A_3 ed E_3 e le trasformazioni puntuali associate loro.*

Poi l'autore determina le connessioni affini corrispondenti alle connessioni proiettive scoperte nella prima parte. Si ottengono così dieci connessioni affini costanti localmente euclidee e due connessioni affini variabili che corrispondono a connessioni proiettive costanti.

Negli ultimi anni, il prof. G. VRĂNCEANU e la sua scuola di geometria di Bucarest, hanno ottenuto una serie di risultati nella teoria delle corrispondenze tra spazi proiettivi e nella teoria degli spazi a connessione affine localmente euclidea.

Il prof. G. VRĂNCEANU ha determinato la condizione necessaria e sufficiente perchè π^i_{jk} rappresenti le componenti del tensore proiettivo tra due spazi A_n ed E_n [3] (1). Nello stesso tempo, occupandosi del gruppo di *movimenti* di una corrispondenza, il prof G. VRĂNCEANU ha dimostrato che una corrispondenza tra due spazi proiettivi può avere un gruppo ad $n^2 - n + 2$ parametri al più, questo massimo essendo raggiunto [4].

Nel caso della corrispondenza tra piani proiettivi, il prof. G. VRĂNCEANU ha determinato una condizione molto semplice perchè questa corrispondenza sia di prima specie, di seconda o di terza. Nel caso in cui il tensore proiettivo π^i_{jk} è costante, egli ha dimostrato che il tensore può essere ridotto ad una delle forme

1) $$\pi^1_{12} = -\pi^2_{22} = \pm 1, \ \pi^2_{11} = 1;$$

2) $$\pi^1_{12} = -\pi^2_{22} = 1;$$

3) $$\pi^2_{11} = 1;$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 20 gennaio 1962.

(1) Pag. 492.

secondo che la corrispondenza è di prima, di seconda o di terza specie [2].

Nel caso della corrispondenza di terza specie, il prof. G. VRANCEANU [4] e G. G. VRANCEANU [5], [6], [7], [8], hanno ottenuto una serie di risultati importanti specialmente nel caso delle corrispondenze a caratteristiche rette.

Studiando gli spazi A_3 a connessione affine costante localmente euclidea, P. MOCANU ha dimostrato che possiamo ridurre questi a 12 forme canoniche distinte di fronte al gruppo affine [1].

In questo lavoro ci occuperemo delle corrispondenze tra spazi proiettivi a connessione proiettiva costante. Nella prima parte determiniamo le connessioni proiettive costanti le quali definiscono le corrispondenze tra spazi A_3 et E_3, le trasformazioni puntuali associate a loro ed i loro gruppi di movimenti.

Poi determiniamo le connessioni affini corrispondenti alle connessioni proiettive scoperte nella prima parte. Otteniamo così dieci connessioni affini costanti localmente euclidee e due connessioni affini variabili le quali corrispondono a connessioni proiettive costanti. Nello stesso tempo mostriamo che due delle connessioni affini costanti determinate da P. MOCANU si riducono ad altre connessioni attraverso trasformazioni non lineari.

Le dimostrazioni dei teoremi di questa nota saranno pubblicate in due memorie che appariranno nella Revue de Mathématiques Pures et Appliquées.

Siano due spazi affini $A_3(x, y, z,)$ e $E_3(u^1, u^2, u^3)$ tra i quali è definita la corrispondenza

$$(1) \qquad u^i = u^i(x, y, z) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Se la connessione affine dello A_3 è Γ^i_{jk} allora la connessione proiettiva dello spazio è

$$\pi^i_{jk} = \Gamma^i_{ik} - \delta^i_j \frac{\Gamma_k}{n+1} - \delta^i_k \frac{\Gamma_i}{n+1} \qquad (\Gamma_k = \Gamma^i_{ik};\ i, j, k = 1, 2, 3).$$

Il prof. G. VRANCEANU ha dimostrato [3] (²) che, perchè π^i_{jk}

(²) Pag. 492.

fosse il tensore associato della corrispondenza (1), bisogna che

$$\pi^i{}_{jkl} + \frac{\delta^i{}_k}{n-1} M_{jl} - \frac{\delta^i{}_l}{n-1} M_{jk} = 0, \tag{2}$$

$$(i,\ j,\ k,\ l,\ s = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{\partial M_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial M_{jl}}{\partial x^k} + M_{sk}\pi^s{}_{jl} - M_{sl}\pi^s{}_{jk} = 0, \tag{2'}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} \pi^i{}_{jkl} &= \frac{\partial \pi^i{}_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \pi^i{}_{jl}}{\partial x^k} + \pi^i{}_{sk}\pi^s{}_{jl} - \pi^i{}_{sl}\pi^s{}_{jk}\,, \\ M_{jk} &= \pi^i{}_{sj}\pi^s{}_{ik} + \frac{\partial \pi^i{}_{jk}}{\partial x^i}\,. \end{aligned}\right.$$

Tenendo conto che il tensore $\pi^i{}_{jk}$ è costante, possiamo supporre che almeno una delle componenti $\pi^1{}_{22}$, $\pi^1{}_{23}$ è non nulla.

Abbiamo dunque da considerare i seguenti casi

1° $\qquad \pi^1{}_{22} \neq 0,\ \pi^1{}_{23} = \pi^1{}_{33} = 0\,;$

2° $\qquad \pi^1{}_{23} \neq 0,\ \pi^1{}_{22} = \pi^1{}_{33} = 0\,;$

3° $\qquad \pi^1{}_{22} \neq 0,\ \pi^1{}_{33} \neq 0,\ \pi^1{}_{23} = 0\,;$

4° $\qquad \pi^1{}_{22} \neq 0,\ \pi^1{}_{23} \neq 0,\ \pi^1{}_{33} = 0\,;$

5° $\qquad \pi^i{}_{jk} \neq 0 \qquad (h,\ k = 2,\ 3).$

Risolvendo in ciascuno di questi casi il sistema (2), (2′) otteniamo un numero di connessioni proiettive costanti le quali attraverso trasformazioni lineari di coordinate, si riducono alle seguenti connessioni distinte:

[I$_p$] $\qquad \pi^1{}_{22} = 1,\ \pi^1{}_{33} = \varepsilon \qquad (\varepsilon = 0,\ 1)\,;$

[II$_p$] $\qquad \pi^1{}_{23} = 1\,;$

[III$_p$] $\qquad \pi^1{}_{11} = -2,\ \pi^2{}_{21} = \pi^3{}_{31} = 1\,;$

[IV$_p$] $\qquad \pi^1{}_{23} = \pi^3{}_{22} = 1\,;$

[V$_p$] $\qquad \pi^1{}_{23} = -\pi^3{}_{12} = 1\,;$

$$[\mathrm{VI_p}] \qquad \pi^1{}_{23} = \pi^1{}_{12} = -\pi^3{}_{32} = 1\,;$$

$$[\mathrm{VII_p}] \qquad \pi^1{}_{13} = \pi^1{}_{22} = \pi^2{}_{23} = 1,\ \pi^3{}_{33} = -2\,;$$

$$[\mathrm{VIII_p}] \qquad \pi^1{}_{13} = \pi^2{}_{21} = \pi^2{}_{23} = \pi^3{}_{31} = 1,\ \pi^1{}_{11} = \pi^3{}_{33} = -2\,;$$

$$[\mathrm{IX_p}] \qquad \pi^1{}_{12} = \pi^1{}_{13} = \pi^2{}_{21} = \pi^2{}_{23} = \pi^3{}_{31} = 1,\ \pi^1{}_{11} = \pi^2{}_{22} = \pi^3{}_{33} = -2\,;$$

$$[\mathrm{X_p}] \qquad \pi^1{}_{22} = \pi^1{}_{13} = \pi^2{}_{23} = \pi^3{}_{31} = -\pi^2{}_{21} = 1,\ \pi^3{}_{33} = -2\,;$$

$$[\mathrm{XI_p}] \qquad \pi^1{}_{22} = 1,\ \pi^2{}_{21} = -\pi^3{}_{31} = \frac{1}{2}\,;$$

$$[\mathrm{XII_p}] \qquad \pi^1{}_{12} = -\pi^3{}_{32} = \frac{1}{2},\ \pi^2{}_{11} = -\pi^2{}_{33} = -1,$$

le componenti non scritte essendo nulle.

Abbiamo dunque:

TEOREMA 1. - *Il tensore proiettivo costante* $\pi^i{}_{jk}$, *che determina una corrispondenza tra gli spazi* A_3 *ed* E_3, *può essere ridotto attraverso cambiamenti di variabili ad una delle formule* $[\mathrm{I_p}], \ldots, [\mathrm{XII_p}]$.

Il prof. G. VRǍNCEANU ha dimostrato [2] (3) che essendo data la connessione proiettiva $\pi^i{}_{jk}$ che soddisfa le equazioni (2), (2'), la trasformazione puntuale tra gli spazi A_3 ed E_3 è data dalle formule

$$u^i = \frac{v^i}{v^\alpha} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

dove $v^\alpha (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ sono gli integrali indipendenti del sistema

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^j \partial x^k} + \pi^s{}_{jk} \frac{\partial v}{\partial x^s} - \frac{M_{jk}}{2} v = 0 \qquad (x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z).$$

Nel caso delle connessioni $[\mathrm{I_p}], \ldots, [\mathrm{XII_p}]$, questo sistema ci

(3) Pag. 492.

dà le trasformazioni puntuali:

[T₁] $u^1 = x - \dfrac{y^2 + \varepsilon z^2}{2} \quad (\varepsilon = 0,\ 1),\ u^2 = y,\ u^3 = z;$

[T₂] $u^1 = x - yz,\ u^2 = y,\ u^3 = z;$

[T₃] $u^1 = e^{4x},\ u^1 = y,\ u^3 = z;$

[T₄] $u^1 = x - yz + \dfrac{y^3}{6},\ u^2 = y,\ u^3 = z - \dfrac{y^2}{2};$

[T₅] $u^1 = x \operatorname{tg} y + z,\ u^2 = x - y \operatorname{tg} y,\ u^3 = \operatorname{tg} y;$

[T₆] $u^1 = x + \dfrac{z}{2},\ u^2 = ze^{2y},\ u^3 = e^{2y};$

[T₇] $u^1 = x - \dfrac{y^2}{2},\ u^2 = y,\ u^3 = e^{4z};$

[T₈] $u^1 = e^{4x},\ u^2 = y\ \ u^3 = e^{4z};$

[T₉] $u^1 = e^{4x},\ u^2 = e^{4y},\ u^3 = e^{4z};$

[T₁₀] $u^1 = e^{2x} \cos \sqrt{2}y,\ u = e^{2x} \sin \sqrt{2}y,\ u^3 = e^{4z};$

[T₁₁] $u^1 = e^x \cos y,\ u^2 = e^x \sin y,\ u^3 = z;$

[T₁₂] $u^1 = \operatorname{tg} x,\ u^2 = \dfrac{e^x \sin z}{\cos x},\ u^3 = \dfrac{e^x \cos z}{\cos x}.$

Abbiamo dunque

TEOREMA 2. - *Le trasformazioni puntuali associate alle connessioni proiettive costanti degli spazi* A_3 *sono del tipo* $[T_1], \dots, [T_{12}]$, *l'equivalenza tra gli spazi* A_3 *ed* E_3 *essendo globale nel caso delle trasformazioni* $[T_1]$, $[T_2]$ e $[T_4]$.

Se notiamo con $X_h f = \xi^i{}_h \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ $(i = 1, 2, 3)$ gli operatori infinitesimali di un sottogruppo proiettivo dello spazio si sa [2] (4) che

(4) Pag. 498.

questo gruppo è gruppo di movimenti della trasformazione (1) se

$$\frac{\partial \pi^i_{jk}}{\partial x^l}\xi^l_h + \pi^i_{sk}\frac{\partial \xi^s_h}{\partial x^s} + \pi^i_{js}\frac{\partial \xi^s_h}{\partial x^k} - \pi^s_{jk}\frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^s} = 0.$$

Calcolando nel caso delle connessioni $[I_p], \dots, [XII_p]$ otteniamo i gruppi seguenti:

$[G^{I}]$ $\quad x' = \alpha^2_4 x + \alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_1,\ y' = \alpha_4 y + \alpha_2,\ z' = \alpha_7 y + \alpha_8 z + \alpha_3;$

$[G^{II}]$ $\quad x' = e^{2\alpha_4} x + \alpha_5 y + \alpha_6 z + \alpha_1,\ y' = e^{\alpha_4}(y\cos\alpha_7 - z\sin\alpha_7) + \alpha_2,$
$z' = e^{\alpha_4}(y\sin\alpha_7 + z\cos\alpha_7) + \alpha_3;$

$[G^{III}]$ $\quad x' = \alpha_4\alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_7 z + \alpha_1,\ y' = \alpha_4 y + \alpha_2,\ z' = \alpha_5 z + \alpha_3;$

$[G^{IV}]$ $\quad x' = x + \alpha_1,\ y' = \alpha_4 y + \alpha_5 z + \alpha_2,\ z' = \alpha_6 y + \alpha_7 z + \alpha_3;$

$[G^{V}]$ $\quad x' = \alpha^3_4 x + \alpha_5 y + 2\alpha^2_4\alpha_6 z + \alpha_1,\ y' = \alpha_4 y + \alpha_2,\ z' = \alpha_4\alpha_6 y + \alpha^2_4 z + \alpha_3$

$G^{VI}]$ $\quad x' = \alpha_4 x - \alpha_5 y + \alpha_1,\ y' = y + \alpha_2,\ z' = \alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_3;$

$[G^{VII}]$ $\quad x' = \alpha_5(2\alpha_4 + 1)x + \alpha_4 y + \alpha_1,\ y' = y + \alpha_2,\ z' = \alpha_5 z + \alpha_3;$

$[G^{VIII}]$ $\quad x' = \alpha^2_4 x + \alpha_5 y + \alpha_1,\ y' = \alpha_4 y + \alpha_2.\ z' = z + \alpha_3;$

$[G^{IX}]$ $\quad x' = x + \alpha_1,\ y' = \alpha_4 y + \alpha_2,\ z' = z + \alpha_3;$

$[G^{X}]$ $\quad x' = x + \alpha_1,\ y' = y + \alpha_2,\ z' = z + \alpha_3$

Abbiamo dunque

TEOREMA 3. - *Le trasformazioni puntuali, associate alle connessioni costanti ammettono come gruppi totali di movimenti i gruppi* $[G^{I}], \dots, [G^{X}]$.

Si sa che se la corrispondenza tra gli spazi A_3 e E_3 è data da (1) allora la connessione affine dello spazio A_3 è data dal sistema

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^s_{jk}\frac{\partial u^i}{\partial y^s} = 0 \qquad (i,\ j,\ k,\ s = 1,\ 2,\ 3;\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z).$$

Tenendo conto delle dodici trasformazioni puntuali determinate di sopra, otteniamo le seguenti connessioni affini:

[I_a] $\Gamma^1_{22} = 1,\ \Gamma^1_{33} = \varepsilon \qquad (\varepsilon = 0,\ 1);$

[II_a] $\Gamma^1_{23} = 1;$

[III_a] $\Gamma^1_{11} = -4;$

[IV_a] $\Gamma^1_{23} = \Gamma^3_{22} = 1;$

[V_a] $\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{12} = 1,\ \Gamma^1_{12} = -\Gamma^3_{32} = -\operatorname{tg} y,\ \Gamma^2_{22} = -2 \operatorname{tg} y;$

[VI_a] $\Gamma^1_{23} = 1,\ \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{32} = -2;$

[VII_a] $\Gamma^1_{22} = 1,\ \Gamma^3_{33} = -4;$

[$VIII_a$] $\Gamma^1_{11} = \Gamma^3_{33} = -4;$

[IX_a] $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{33} = -4;$

[X_a] $\Gamma^1_{22} = 1,\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -2,\ \Gamma^3_{33} = -4;$

[XI_a] $\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{21} = 1;$

[XII_a] $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{32} = -\Gamma^2_{33} = -1, \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = -\operatorname{tg} x, \Gamma^1_{11} = -2 \operatorname{tg} x$

le componenti non scritte essendo nulle

Da ciò risulta che esistono due spazi A_3 a connessione affine variabile [V_a] e [XII_a], le cui connessioni proiettive sono costanti.

Ricordiamo che le altre dieci connessioni affini sono state determinate precedentemente da P. MOCANU [I], il quale però ha trovato due connessioni di più e cioè

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{22} = 1$$

e

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{33} = 1.$$

La prima di queste due connessioni si riduce alla [VII_a]

attraverso la trasformazione

$$\begin{cases} \bar{x} = y^2 e^{-2x} + \left(z - \frac{y^2}{2}\right) e^{-x}, \\ \bar{y} = y e^{-x}, \\ \bar{z} = -\frac{x}{4}. \end{cases}$$

La seconda si riduce alla connessione [$VIII_a$] attraverso la trasformazione

$$\begin{cases} \bar{x} = x - lny, \\ \bar{y} = x^{-x}, \\ \bar{z} = - ln(e^{-z} - e^{-x}) \end{cases}$$

Abbiamo dunque

TEOREMA 4 - *Esistono dieci tipi distinti di spazi* A_3 *a connessione affine costante localmente euclidea* [I_a], ..., [IV_a], [VI_a], ..., [XI_a] *e due tipi di spazi* A_3 *a connessione affine variabile localmente euclidea, i quali però hanno la connessione proiettiva costante* [V_a] e [XII_a].

BIBLIOGRAFIA

[1] P. MOCANU, *Asupra classificării spatiilor* A_3 *cu conexiume constantă local euclidiene*, « Comunicările Acad. R. P. R. », vol. I nr 3, (1951).

[2] G. VRĂNCEANU, *Trasformazioni puntuali tra spazi affini a proiettivi e spazi a connessione affine euclidea*, « Boll. Un. Mat. Ital. », t. 12, (1957).

[3] — —, *Sul tensore associato ad una corrisponaenza fra spazi proiettivi*, « Bol· Un. Mat. Ital. », t. 12, nr. 4 (1957).

[4] — —, *Lectii de Geometrie Diferentială*, vol. III, Buc. ed Acad. R. P. R., (1960).

[5] G. G. VRĂNCEANU, *Determinare a spatiilor cu conexiune afină local euclidiene* A_2 *despeta trei*, « Analele Univ. C. I. Parhon », t. 15 (1957).

[6] — —, *Asupra spatiilor cu conexiune afină local euclidiene, de speta trei*, « Analele Univ. C. I. Parhon », t. 17, (1958).

[7] — —, *Transformations ponctuelles à connexion projective constante*, « Revue de Mat. Pures et Appliquées », t. IV, nr. 1, (1959).

[8] — —, *Asupra unei densitati vectoriale asociate unei transformări punctuale de speta trei*, « Studii si Cercetări Matematice, t. XII, nr. 1 (1961).