Bollettino
Unione Matematica Italiana

Delfina Roux

Sulla composizione per somma di due sistemi di numeri complessi e applicazione alle funzioni analitiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 48–53.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_48_0>

Sulla composizione per somma di due sistemi di numeri complessi e applicazione alle funzioni analitiche

Nota di Delfina Roux (a Milano) (*) [1]

Sunto. - *In questa Nota dimostriamo due semplici proprietà dell'insieme* (C) *di numeri complessi* $C_{h,k} = A_h + B_k$ *(ottenuto come somma di due insiemi* (A) *di numeri* A_h *e* (B) *di numeri* B_k*) e ne presentiamo una applicazione alla composizione secondo Hurwitz-Pincherle di funzioni aventi un numero finito di punti singolari e al prodotto di funzioni intere di ordine* 1. *In questo modo si segnala, a quanto ci consta per la prima volta, una proprietà di inversione della composizione di Hurwitz-Pincherle.*

Summary. - *We give two simple properties of a set* (C) *of complex numbers* $C_{h,k} = A_h + B_k$ *(sum of two sets* (A) *of numbers* A_h *and* (B) *of numbers* B_k*) and, as an application, we deduce results about the Hurwitz-Pincherle composition of functions having a finite number of singularities and about the product of integral functions of order* 1. *Thus we give (perhaps for the first time) an inverse property of the Hurwitz-Pincherle composition theory.*

1. Sulla composizione per somma di due sistemi di numeri complessi. -

Siano

$$(A): A_1, A_2, \dots, A_n \qquad (A_h \neq A_k \text{ se } h \neq k)$$
$$(B): B_1, B_2, \dots, B_m \qquad (B_h \neq B_k \text{ se } h \neq k)$$

due classi di numeri complessi. Poniamo

$$C_{h,k} = A_h + B_k \qquad (h = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, m).$$

L'insieme dei numeri $C_{h,k}$ possiede le proprietà seguenti.

Lemma 1. « Esistono almeno due numeri $C_{h,k}$ ottenibili *in un sol modo* come somma di due numeri rispettivamente delle classi (A) e (B) ».

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 7 Febbraio 1962.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 14 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1960-61.

LEMMA 2. – « I numeri $C_{h,k}$ di modulo massimo sono ottenibili *in un sol modo* come somma di due numeri rispettivamente delle classi (A) e (B) ».

OSSERVAZIONE. – Non sussiste una analoga proprietà per i numeri $C_{h,k}$ di modulo minimo, anche se il minimo modulo è positivo.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1. – Possiamo pensare tanto i numeri della classe (A) quanto i numeri della classe (B) ordinati in modo che la successione delle loro parti reali sia non crescente e, per quelli di ugual parte reale, le parti immaginarie siano in ordine decrescente, cioè, posto

$$A_h = a_h + i\alpha_h, \ (h = 1, 2, \dots, n); \ B_k = b_k + i\beta_k, \ (k = 1, 2, \dots, m),$$

risulti $a_h \geqq a_{h+1}$ e, se $a_h = a_{h+1}$, $\alpha_h > \alpha_{h+1}$; e analogamente:

$b_k \geqq b_{k+1}$ e, se $b_k = b_{k+1}$, $\beta_k > \beta_{k+1}$.

In primo luogo osserviamo che, qualora i numeri A_h e B_k siano tutti reali, sarà necessariamente $a_1 > a_2 > \dots > a_n$; $b_1 > b_2 > \dots > b_m$ e quindi $C_{1,1}$ e $C_{n,m}$ sono ottenibili in un sol modo a partire dalle classi (A) e (B).

Se non tutti gli A_h e B_k sono reali, ma è $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $a_{n-1} > a_n$, $b_{m-1} > b_m$, l'osservazione precedente, applicata alle due classi formate con le parti reali dei numeri A_h e B_k porta come conseguenza che, ancora, $C_{1,1}$ e $C_{n,m}$ sono ottenibili in un sol modo.

Se, infine, le condizioni precedenti non sono soddisfatte, sia p. e. $a_1 = a_2 = \dots = a_i$ $(i > 1)$ e $a_i > a_{i+1}$ oppure $i = n$; in questo caso risulta necessariamente $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_i$. Poniamo $j = 1$ se $b_1 > b_2$, $j = m$ se $b_1 = b_2 = \dots = b_m$, altrimenti j sia tale che $b_1 = b_2 = \dots = b_j$ e $b_j > b_{j+1}$. Se $j > 1$ dovrà essere $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_j$ e, di conseguenza, in ogni caso i numeri $C_{1,1}$ e $C_{i,j}$ sono ottenibili in un sol modo a partire dalle classi $(A_1, A_2, \dots A_i)$ e $(B_1, B_2, \dots, B_j)$ e pertanto sono ottenibili in un sol modo anche a partire dalle classi (A) e (B) assegnate, perchè risulta $\mathrm{Re}(C_{h,k}) < \mathrm{Re}(C_{1,1}) = \mathrm{Re}(C_{i,j})$ per ogni $h > i$, $k = 1, 2, \dots m$ e per ogni $k > j$, $h = 1, 2, \dots, n$.

Il Lemma 1 risulta così completamente dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2. – Basterà provare che se due numeri C, ad esempio $C_{1,1}$ e $C_{2,2}$, coincidono, esiste almeno un altro C di modulo superiore ad essi. Precisamente, faremo vedere che se $C_{1,1} = C_{2,2}$ ed è $|C_{1,2}| \leqq |C_{1,1}|$, allora necessariamente $|C_{2,1}| > |C_{1,1}|$.

Poniamo $A_h = a_h + i\alpha_h$, $B_h = b_h + i\beta_h$ $(h = 1, 2)$. Essendo $(p + r)^2 = \{(p + q) - (q - r)\}^2$ vale l'identità

$$(p + q)^2 - (p + r)^2 = 2(p + q)(q - r) - (q - r)^2$$

e quindi possiamo scrivere le due differenze

$$|C_{1,1}|^2 - |C_{1,2}|^2 = (a_1 + b_1)^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 - (a_1 + b_2)^2 - (\alpha_1 + \beta_2)^2$$

$$= 2\{(a_1 + b_1)(b_1 - b_2) + (\alpha_1 + \beta_1)(\beta_1 - \beta_2)\} - \{(b_1 - b_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2\},$$

$$|C_{1,1}|^2 - |C_{2,1}|^2 = (a_1 + b_1)^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 - (a_2 + b_1)^2 - (\alpha_2 + \beta_1)^2$$

$$= 2\{(a_1 + b_1)(a_1 - a_2) + (\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2)\} - \{(a_1 - a_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2\}.$$

Teniamo conto dell'ipotesi $C_{1,1} = C_{2,2}$; essa ci dà $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, cioè $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$, $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$ e possiamo scrivere

$$|C_{1,1}|^2 - |C_{2,1}|^2 = -2\{(a_1 + b_1)(b_1 - b_2) + (\alpha_1 + \beta_1)(\beta_1 - \beta_2)\} - \{(b_1 - b_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2\}.$$

Addizionando si ottiene

$$(|C_{1,1}|^2 - |C_{1,2}|^2) + (|C_{1,1}|^2 - |C_{2,1}|^2) = -2\{(b_1 - b_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2\} < 0$$

poichè $|b_1 - b_2| + |\beta_1 - \beta_2| > 0$ (essendo $B_1 \neq B_2$); ne segue che $|C_{1,2}| \leqq |C_{1,1}|$ implica $|C_{2,1}| > |C_{1,1}|$. Il Lemma 2 risulta così dimostrato.

2. Applicazione alla composizione di Hurwitz-Pincherle. - Si considerino le serie di potenze in $1/z$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^{n+1}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n/z^{n+1} \tag{2.1}$$

e la loro composta secondo HURWITZ-PINCHERLE

$$(2.2)\qquad h(z)=f(z)\oplus g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^{n+1}}\,,\; c_n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}.$$

È noto che ([2]) le singolarità di $h(z)$ vanno in generale ricercate fra i punti C del tipo $A+B$, dove A è un punto singolare per $f(z)$ e B un punto singolare per $g(z)$, e risulta evidente che i Lemmi precedenti possono trovare utile applicazione in ricerche attinenti al teorema di composizione di HURWITZ-PINCHERLE. Possiamo ad esempio giungere facilmente al seguente

TEOREMA I. – « $f(z)$ e $g(z)$ siano funzioni uniformi con un numero finito di punti singolari. Allora, se $h(z)$ ha un solo punto singolare, lo stesso accade per $f(z)$ e $g(z)$ e nessuna di esse può avere singolarità di ordine più elevato. In particolare, se $h(z)$ ha una singolarità essenziale di ordine ρ, allora o $f(z)$ o $g(z)$ o entrambe hanno una singolarità essenziale di ordine ρ; se $h(z)$ ha un polo di ordine n, $f(z)$ e $g(z)$ hanno entrambe un polo e, detti r ed s i loro rispettivi ordini, risulta

$$(2.3)\qquad n=r+s-1 \text{ »}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Diciamo $A_1,\ A_2,\dots A_n;\ B_1,\ B_2,\dots,\ B_m$ i punti singolari, rispettivamente, di $f(z)$ e $g(z)$. Essendo questi punti singolarità al più essenziali, i punti

$$C_{h,k}=A_h+B_k,\ h=1,\ 2,\dots,\ n,\ (n\geqq 1),\ k=1,\ 2,\dots,\ m,\ (m\geqq 1)$$

sono necessariamente singolari per $h(z)$ ([3]), a meno che un punto $C_{h,k}$ non sia ottenibile in più modi a partire dai punti A_h e B_k.

([2]) Vedere ad esempio L. BIEBERBACH, *Analytische Fortsetzung*, Berlin 1955, pp. 29-31, oppure S. MANDELBROJT, *Sur les singularitées des fonctions répresentées par une série de Taylor*, Mém. Sciences Mathématiques 54, Paris 1932, pp. 21-22.

([3]) Vedere R. WILSON, *Some applications of the Hurwitz-Pincherle composition theory*, Journal of the London Mathemathical Society, 28, (1953), pp. 484-490. In particolare vedere i teoremi 1 e 2.

Ora, per il Lemma 1, questa coincidenza, se o $n > 1$ o $m > 1$, non si verifica per *almeno due* valori $C_{h,k}$. Dunque, se fosse o $n > 1$ o $m > 1$, allora $h(z)$ avrebbe almeno due punti singolari, contro l'ipotesi. Ne segue $n = m = 1$ e la prima parte del teorema è dimostrata.

Veniamo a dimostrare la seconda parte: diciamo A, B, $C = A + B$ i punti nei quali cadono le (uniche) singolarità, rispettivamente, di $f(z)$, $g(z)$ e $h(z)$; queste singolarità potranno essere, al più, singolarità essenziali e, poichè risulta [4]

$$\text{ord. } C = \max(\text{ord. } A, \text{ ord. } B) \tag{2.4}$$

nè A, nè B possono essere singolarità di ordine più elevato. Inoltre, sempre per la (2.4), C sarà un polo per $h(z)$ se e soltanto se lo sono sia A per $f(z)$ che B per $g(z)$, e, in questo caso, vale la (2.3) [5].

3. **Applicazione al prodotto di funzioni intere.** - Siano $F(z)$ e $G(z)$ due funzioni intere di ordine 1 e tipo finito, rispettivamente, τ_1 e τ_2: il prodotto $H(z) = F(z) \cdot G(z)$ può anche avere ordine inferiore ad 1 e inoltre, anche se $H(z)$ ha ordine 1, in generale nessuna precisa informazione può essere data sul tipo τ di $H(z)$: è soltanto possibile garantire che, qualora $H(z)$ abbia ordine 1, il suo tipo soddisfa la limitazione

$$0 \leq \tau \leq \tau_1 + \tau_2 .$$

Inoltre, R. WILSON [6] ha mostrato che il tipo τ di $H(z)$ va ricercato fra i numeri della forma $|A + B|$ dove A e B sono, rispettivamente, punti singolari delle trasformate di LAPLACE-BOREL delle funzioni $F(z)$ e $G(z)$.

(4) R. WILSON, loc. cit. in (3), teoremi 1, 3 e 4. Osserviamo che le affermazioni contenute nei teoremi 3 e 4 limitatamente a ciò che riguarda l'ordine del punto singolare C valgono qualunque sia l'ordine di ciascuno dei due punti singolari A e B.

(5) R. WILSON, loc. cit. in (3), teorema 1.

(6) R. WILSON, *Directions of strongest growth of the product of integral functions of finite order and mean type*, Journal of the London Mathematical Society, 28, (1953), pp. 185-193. In particolare, vedere il teorema 2, che, nel caso che ci interessa, può essere enunciato come segnalato sopra.

Mediante l'ausilio del Lemma 2 è possibile pervenire alla determinazione di τ nel seguente caso particolare.

Diciamo $\mathcal{C}$ la classe delle funzioni intere di ordine 1 per le quali la trasformata di LAPLACE-BOREL è una funzione uniforme con un numero finito di punti singolari. Sussiste il seguente

TEOREMA II. « $F(z)$ e $G(z)$ appartengano alla classe $\mathcal{C}$. Allora. se $H(z) = F(z) \cdot G(z)$ ha ordine 1, per il tipo τ di $H(z)$ vale la relazione

$$\tau = \max | A_h + B_k | , \ (h = 1, 2, \ldots, n_1; \ k = 1, 2, \ldots, n_2)$$

dove A_h e B_k sono, rispettivamente, le singolarità delle trasformate di LAPLACE-BOREL di $F(z)$ e $G(z)$ ».

DIMOSTRAZIONE. - Diciamo $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ le trasformate di LAPLACE-BOREL rispettivamente di $F(z)$, $G(z)$, $H(z)$, cioè, posto

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \ H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k}$$

avremo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, a_n / z^{n+1}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, b_n / z^{n+1}, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, c_n / z^{n+1}.$$

Risulta evidentemente $h(z) = f(z) \oplus g(z)$ e, di conseguenza, i punti singolari di $h(z)$ vanno ricercati fra i punti $C_{h,k} = A_h + B_k$ $(h = 1, 2, \ldots, n_1; \ k = 1, 2, \ldots, n_2)$. Consideriamo i punti $C_{h,k}$ di modulo massimo: essi, per il Lemma 2, sono ottenibili in un sol modo a partire dagli A_h e B_k e quindi risultano necessariamente singolari (7) per $h(z)$. D'altra parte, è noto che (8) il tipo τ di $H(z)$ è uguale al raggio del più piccolo cerchio con centro nell'origine al di fuori del quale $h(z)$ è olomorfa. Ne segue che

$$\tau = \max | A_h + B_k | .$$

(7) R. WILSON, loc. cit. in (3), teoremi 1 e 2.

(8) Vedere, ad esempio, L. BIEBERBACH, loc. cit in (2), pag. 1, teorema (1.1.I), oppure R P. BOAS jr, *Entire functions*, New Jork 1954, pag. 73, teorema (5.3.1).