BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

I. Bandić

Sur les équations différentielles non-linéaires quasihomogènes à deux dimensions du premier et du deuxième ordres.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.1, p. 81–91.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_1_81_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Sur les équations différentielles non-linéaires quasi-homogènes à deux dimensions du premier et du deuxième ordres.

Nota di I. BANDIĆ (a Belgrado, Jugoslavia) (*)

Résumé. - *On a l'équation* (1) *où* u *et* v *sont des polynoms des argyments indiqués, homogènes par rapport a* $y, y', \ldots, y^{(r)}$, *à savoir* u *de degré* m *et* v *de degré* n. *L'équation* (1) *est, en même temps, bidimensionelle, c. à. d. tous les termes de* u *sont de dimensions* p *et les termes de* v *sont de dimension* q, *si l'on prend que* x *et* y *ont la dimension* 1. *Dans ce cas l'équa ion* (1) *représent la* DB-*équation du* r-*ième ordre*·

Dans la présent travail on a démontré que la DB-*équation du premier ordre* (10) *est resolue au moyen des quadratures, et que la* DB-*équation du deuxième ordre* (23) *peut être reduite à une équation du premier ordre.*

1. Il s'agit de l'équation différentielle *quasi-homogène* de forme

$$u(x, y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}, y^{(r)}) = v(x, y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}, y^{(r)}). \tag{1}$$

où u et v sont des fonctions entières rationelles des arguments indiqués, homogènes par rapport à $y, y', y'', \ldots, y^{(r-1)}, y^{(r)}$, à savoir u de degré m et v de degré n $(m \neq n)$.

On présume, ensuite, que l'équation (1) est *bidimensionelle* [1] c. à. d. que tous les termes de la fonction u sont de dimension p, et les termes de la fonction v sont de dimension q $(p \neq q)$, si l'on prend que les variables x et y ont la dimension 1, et $y^{(k)}$ la dimension $1 - k$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, r)$.

L'équation du r-ième ordre (1), *qui est en même temps quasi-homogène et bidimensionnelle, représente la* DB-*équation du r-ième ordre.*

Les hypothèses citées sur l'équation (1) s'expriment, pour plus de brièveté, de la façon suivante: l'équation (1) est une *DB*-équation, de quasi-hoomogénéité (m, n) et de bidimensionalité (p, q).

Dans le présent travail on a démontré que la *DB*-équation du premier ordre est résolue au moyen des quadratures et que la *DB*-équation dn deuxième ordre peut être réduite à une équation différentielle du premier ordre.

(*) Pervenuta alla segreteria dell'U. M. I. il 15 gennaio 1962.

(1) E. KAMKE, *Differentialgleichungen I*, pp. 20-21, Leipzig, 1944, [1].

(1.1) Au cours du travail on applique aussi les dérivées relatives de M. PETROVIĆ, [2].

La dérivée relative du n-ième ordre de la fonction $u = u(x)$ est introduite par la définition

$$\triangle_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \qquad \left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}\right)$$

d'où l'on trove de nombreux rapports entre les dérivées relatives, dont on applique ici

$$\triangle_1(uv) = \triangle_1(u) + \triangle_1(v); \quad \triangle_1\left(\frac{u}{v}\right) = \triangle_1(u) - \triangle_1(v); \quad \triangle_1(u^n) = n\triangle_1(u);$$

$$\triangle_2(u) = \triangle_1'(u) + \triangle_1^2(u); \quad \triangle_1(\exp \int u dx) = \exp \int \triangle_1(u) dx = u,$$

où $u = u(x)$, $v = v(x)$.

En même temps, on introduit aussi la notion de dérivée relative partielle de la fonction à deux variables indépendantes, $u = u(x_1, x_2)$, [3], par la définition

$$\triangle_1(u)_{x_\nu} = \frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial x_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2)$$

Si x_2 est la fonction de x_1 on arrive à la notion de dérivée relative totale de la fonction $u(x_1, x_2)$ selon la variable x_1

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx_1} = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot x_2'\right), \qquad \left(x_2' = \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ou bien, en vertu de la définition précédente

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \triangle_1(u)_{x_1} + \triangle_1(u)\ {}_2x'_2$$

2. Soit donnée la DB-équation du premier ordre

$$u(x, y, y') = v(x, y, y'), \tag{2}$$

de quasi-homogénéité (m, n) et de bidimensionalitè (p, q).

Lorsqu'on introduit dans (2) la nouvelle variable indépendante t et la nouvelle fonction inconnue $\eta = \eta(t)$ par la substition

$$x = e^t, \quad y = \eta e^t, \tag{3}$$

on obtient

$$u(e^t, \eta e^t, \eta' + \eta) = v(e^t, \eta e^t, \eta' + \eta). \tag{4}$$

Comme e^t apparaît dans chaque terme au degré qui est égal à la dimension de ce terme, en vertu de l'hypothèse sur la bidimensionalité, l'équation (4) peut être exprimé sous forme de

$$u(1, \eta, \eta' + \eta) = e^{(q-p)t} v(1, \eta, \eta' + \eta).$$

Il s'ensuite de là, vu l'homogénéité des fonciions u et v,

$$\mathfrak{F} = \eta^\beta e^{\alpha t}; \quad \mathfrak{F} = \frac{u(1, 1, 1 + \triangle_1(\eta))}{v(1, 1, 1 + \triangle_1(\eta))}, \qquad (\beta = n - m, \ \alpha = q - p) \tag{5}$$

ou bien, après avoir appliqué des deux côtés l'opérateur $\bigtriangledown_1$ selon t

$$\bigtriangledown_1(\mathfrak{F})_t = \beta \triangle_1(\eta) + \alpha.$$

En introduisant la nouvelle fonction inconnue $z = z(t)$ par la substitution

$$1 + \triangle_1(\eta) = z, \quad \text{c. d. d.} \quad \eta = e^{-t} \exp \int z dt, \tag{6}$$

la dernière équation apparaît sous forme de

$$\bigtriangledown_1(\mathfrak{F})_t = \beta z + (\alpha - \beta), \qquad \mathfrak{F} = \frac{u(1, 1, z)}{v(1, 1, z)}$$

ou bien, vu que $\bigtriangledown_1(\mathfrak{F})_t = z' \triangle_1(\mathfrak{F})_z$. $\left(z' = \dfrac{dz}{dt}\right)$

$$z' \triangle_1(\mathfrak{F})_z = \beta z + (\alpha - \beta).$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\int \frac{\triangle_1(\mathfrak{F})_z}{\beta z + (\alpha - \beta)} dz = t + c, \qquad (c = \text{const.}). \tag{7}$$

Comme il s'ensuit, alors, de (5)

$$\eta = (\mathfrak{F} e^{-\alpha t})^{\frac{1}{\beta}}, \tag{8}$$

on trouve l'intégrale générale de l'équation (2), en vertu de (3) (7) et (8), sous forme paramétrique

$$\left.\begin{aligned} x &= c \exp \int \frac{\triangle_1(\mathfrak{F})_z}{\beta z + (\alpha - \beta)}\, dz \\ y &= (\mathfrak{F} x^{\beta-\alpha})^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où z joue le rôle de paramètre.

Théorème. - La DB-équation différentielle du premier ordre

$$u(x, y, y') = v(x, y, y') \tag{10}$$

de quasi-homogénéité (m, n) et de bidimensionalité (p, q) est résolue au moyen des quadratures.

L'intégrale générale de l'équation (10) est donnée dans sa forme paramétrique

$$\left.\begin{aligned} x &= c \exp \int \frac{\triangle_1(\mathfrak{F})_z}{\beta z + (\alpha - \beta)}\, dz \\ y &= (\mathfrak{F} x^{\beta-\alpha})^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

où $\mathfrak{F} = \dfrac{u(1, 1, z)}{v(1, 1, z)}$, $\beta = n - m$, $\alpha = q - p$ et où z joue le rôle de paramètre.

Exemple. - Soit donnée la DB-équation du premier ordre

$$\alpha_0 x^3 y'^2 + \alpha_2 x y^2 = \beta_0 x y' + \beta_1 y \qquad (\alpha_\nu = \text{const.}, \ \beta_\nu = \text{const.}), \tag{12}$$

dans laquelle $m = 2$, $n = 1$; $p = 3$, $q = 1$.

L'intégrale générale de l'équation (12) est, en vertu de (11)

$$\left.\begin{aligned} x &= c \exp \int \frac{1}{z+1} \triangle_1 \left(\frac{\beta_0 z + \beta_1}{\alpha_0 z + \alpha_2}\right) dz \\ y &= \frac{\beta_0 z + \beta_1}{x(\alpha_0 z^2 + \alpha_2)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où z joue le rôle de paramétre.

3. Soit donnée la DB-équation du deuxième ordre

$$u(x,\ y,\ y',\ y'') = v(x,\ y,\ y',\ y''), \tag{14}$$

de quasi-homogénéité $(m,\ n)$ et de bidimensionalité $(p,\ q)$.

Lorsqu'on introduit dans (14) la nouvelle fonction inconnue $\eta = \eta(t)$ par la substitution (3), on obtient

$$u(e^t,\ \eta e^t,\ \eta' + \eta,\ (\eta'' + \eta')e^{-t}) = v(e^t,\ \eta e^t,\ \eta' + \eta,\ (\eta'' + \eta')e^{-t}),$$

ou bien, vu la bidimensionalité de l'équation (14)

$$u(1,\ \eta,\ \eta' + \eta,\ \eta'' + \eta') = e^{(q-p)t} v(1,\ \eta,\ \eta' + \eta,\ \eta'' + \eta'). \tag{15}$$

Puisque l'équation (14) est quasi-homogène, il résulte de (15)

$$\mathfrak{F} = \eta^{\beta} e^{\alpha t};\ \mathfrak{F} = \frac{u(1,\ 1,\ \triangle_1(\eta) + 1,\ \triangle_2(\eta) + \triangle_1(\eta))}{v(1,\ 1,\ \triangle_1(\eta) + 1,\ \triangle_2(\eta) + \triangle_1(\eta))},\quad (\beta - n - m,\ \alpha = q - p) \tag{16}$$

ou bien, lorsqu'on applique des deux côtés l'opérateur ∇_1 selon la variable t

$$\nabla_1(\mathfrak{F})_t = \beta \triangle_1(\eta) + \alpha \tag{17}$$

En introduisant la nouvelle fonction inconnue $z = z(t)$ par la substitution

$$1 + \triangle_1(\eta) = z, \quad \text{c. à. d.} \quad \eta = e^{-t} \exp \int z\,dt, \tag{18}$$

la dernière équation apparaît sous forme de

$$z' \nabla_1(\mathfrak{F})_z = \beta z + (\alpha - \beta);\quad \mathfrak{F} = \frac{u(1,\ 1,\ z,\ z(z-1) + z')}{v(1,\ 1,\ z,\ z(z-1) + z')},\qquad \left(z' = \frac{dz}{dt}\right)$$

Finalement, par une nouvelle substitution

$$z' = \mathfrak{Z}, \tag{19}$$

où $\mathfrak{Z}$ représente la fonction inconnue, on part de l'équation différentielle du premier degré

$$\mathfrak{Z} \nabla_1(\mathfrak{F})_z = \beta z + (\alpha - \beta);\quad \mathfrak{F} = \frac{u(1,\ 1,\ z,\ z(z-1) + \mathfrak{Z})}{v(1,\ 1,\ z,\ z(z-1) + \mathfrak{Z})}.$$

ou bien, dans sa forme développée

$$\Im \{ \triangle_1(\mathfrak{F})_z + \triangle_1(\mathfrak{F})_\Im \Im' \} = \beta z + (\alpha - \beta), \qquad \left(\Im' = \frac{d\Im}{dz}\right) \tag{20}$$

Soit $\Im = \Im(z, c_1)$ l'intégrale générale de l'équation (20). On obtient alors de (19)

$$\int \frac{dz}{\Im(z, c_1)} = t + c_2, \tag{21}$$

et de (3) et de (16)

$$x = e^t; \quad y = e^t(\mathfrak{F}e^{-\alpha t})^{\frac{1}{\beta}},$$

ou bien, en vertu de (21)

$$\left.\begin{aligned} x &= c_2 \exp \int \frac{dz}{\Im(z, c_1)} \\ y &= (x^{\beta-\alpha}\mathfrak{F})^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

où z joue le rôle de paramètre et ou $\Im$ dans la fonction $\mathfrak{F}$ est donnée par la relation $\Im = \Im(z, c_1)$.

Théorème. – A la DB-équation différentielle du deuxième ordre

$$u(x, y, y', y'') = v(x, y, y', y'') \tag{23}$$

de quasi-homogénéité (m, n) et de bidimensionalité (p, q), correspond l'équation différentielle du premier ordre

$$\Im \{ \triangle_1(\mathfrak{F})_z + \triangle_1(\mathfrak{F})_\Im \Im' \} = \beta z + (\alpha - \beta); \quad \mathfrak{F} = \frac{u(1, 1, z, z(z-1)+\Im)}{v(1, 1, z, z(z-1)+\Im)}, \tag{24}$$

dont l'intégrale générale est

$$\Im = \Im(z, c_1).$$

L'intégrale générale de l'équation (23) est donnée dans la forme paramétrique

$$\left.\begin{aligned} x &= c_2 \exp \int \frac{dz}{\Im(z, c_1)} \\ y &= (x^{\beta-\alpha}\mathfrak{F})^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

où z joue le rôle de paramètre et où $\mathfrak{z}$ dans la fonction $\mathfrak{F}$ représente l'intégrale générale de l'équation (24).

EXEMPLE. - Soit donnée la DB-équation du deuxième ordre [2]

$$y' - xy'' = yy', \tag{26}$$

dans laquelle $m = 1$, $n = 2$; $p = 0$, $q = 1$.

A l'équation donnée correspond, en vertu de (24), l'équation différentielle du premier ordre

$$z\mathfrak{z}\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}^2 = z^3(z - 1), \qquad \left(\mathfrak{z}' = \frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right) \tag{27}$$

qui, par la substitution

$$\mathfrak{z}^2 = u, \qquad (u = u(z)) \tag{28}$$

se transforme en équation linéaire

$$zu' - 2u = 2z^3(z - 2),$$

dont l'intégrale générale est

$$u = z^2(z^2 - 4z + c_1).$$

L'intégrale générale de l'équation (27) est, en vertu de (28)

$$\mathfrak{z} = z(z^2 - 4z + c_1)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

et l'intégrale générale de l'équation (26) peut être trouvée de (25) et de (29)

$$\left.\begin{aligned} x &= c_2 \exp \int \frac{dz}{z(z^2 - 4z + c_1)^{1/2}} \\ y &= 2 - z - (z^2 - 4z + c_1)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

4. Dans ce paragraphe on expose les applications du théorème de 3 a deux DB-équations du deuxième ordre qui apparaissent dans la physique théorique et dans l'astronomie.

(1) E. KAMKE, *Differentialgleichungen I*, pp. 563, 6.78, Leipzig, 1943.

(4.1) - L'équation différentielle d'Emden [3]

$$xy'' + 2y' + ax^{\nu}y^{n} = 0, \tag{31}$$

appartient à la classe des DB-équations du deuxième ordre, dans laquelle $m = 1$, $n = n$; $p = 0$, $q = \nu + n$.

A cette équation correspond, en vertu de (24), l'équation différentielle du premier orère

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}[(n-3)z + \nu] + z(z+1)[(n-1)z + (\nu+1)], \tag{32}$$

qui, par la substitution

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{w}, \qquad (w = w(z)) \tag{33}$$

se transforme en une équation d'Abel

$$w' = z(z+1)[(1-n)z - (1+\nu)]w^{3} + [(3-n)z - \nu]w^{2}. \tag{34}$$

Soit $w = w(z, c_1)$ l'intégrale générale de l'équation (34). L'intégrale générale de l'équation (31) est obtenue, dans ce cas-ci, de (25) et de (33)

$$\left.\begin{aligned} x &= c_2 \exp \int w(z, c_1) dz \\ y &= [x^{-(\nu+1)}\mathfrak{F}]^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}\right\}, \quad \mathfrak{F} = -\frac{1}{a}\left(z^2 + z + \frac{1}{w(z, c_1)}\right), \tag{35}$$

En utilisant l'équation d'Abel (34) on peut déterminer les nouveaux rapports entre ν et n lorsque (31) est résolue au moyen des quadratures.

(4.1.1) - De (34) il résulte directement les deux cas suivants lorsque l'équation (31) est intégrable: a) $n = 1$, $\nu = -1$; b) $n = 3$, $\nu = 0$, car (34) dans le premier cas se réduit à l'équation

$$w' = (2z + 1)w^{2},$$

[3] E. KAMKE, *Differentialgleichungen I*, pp. 560, 6.74, Leipzig, 1943.

dont l'intégrale générale est

$$w = [c_1 - z(z+1)]^{-1}$$

et dans le deuxième cas, à l'équation

$$w' = -z(z+1)(2z+1)w^3,$$

à l'intégrale générale

$$w = [c_1 + z^2(z+1)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

(4.1.2) - Un critère plus général est obtenu par l'application de la proposition de A. CHIELLINI, [4], à l'équation d'Abel de forme (34). Cette proposition est conçue en termes suivants:
s'il est possible de déterminer la constante k de façon que les coefficients de l'équation d'Abel

$$y' = a_0 y^3 + a_1 y^2, \qquad (a_\nu = a_\nu(x)) \tag{36}$$

satisfassent l'identité

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right)' = k a_1, \tag{37}$$

alors (36) se transforme, par la substitution

$$y = \frac{a_1}{a_0}\,\Theta, \qquad (\Theta = \Theta(x)) \tag{38}$$

en équation

$$\Theta' = \frac{a_1^2}{a_0}\,(\Theta^3 + \Theta^2 + k\Theta), \tag{39}$$

dans laquelle les variables sont séparées.

De l'identité (37), appliquèe à (34), on arrive aux deux relations entre les costantes n et ν.

$$\left.\begin{aligned} (n+\nu)(3-n) &= 3\nu(1-n) \\ (1+\nu)(3-n)^2 &= -2(1-n)\nu^2 \end{aligned}\right\},$$

qui se réduisent à un seul rapport

$$n = 3 + 2\nu, \tag{40}$$

étant en même temps

$$k = -\frac{1+\nu}{\nu^2} \tag{41}$$

Par conséquent, l'équation d'EMDEN (31) est intégrable sous la condition (40). Son intégrale générale se trouve, dans ce cas-ci, de (35) où $w = w(z, c_1)$ est donné, en vertu de (38) et de (39), par les relations

$$w = \frac{(3-n)z - \nu}{z(z+1)[(1-n)z-(1+\nu)]}\,\Theta, \tag{42}$$

$$\Theta' = \frac{[(3-n)z-\nu]^2}{z(z+1)[(1-n)z-(1+\nu)]}\left(\Theta^3 + \Theta^2 - \frac{1+\nu}{\nu^2}\,\Theta\right).$$

(4.2) - Soit donnée l'équation quasi-homogéne

$$yy'' + f(x)y^2 = \varphi(x) \tag{43}$$

dont les formes spéciales apparaissent en électronique ([4]).

Si $f(x) = ax^{-2}$, $\varphi(x) = bx^{\nu-2}$, ($a = \text{const}$, $b = \text{const.}$), l'équation donnée apparaît sous forme de la DB-équation

$$x^2yy'' + ay^2 = bx^\nu\,, \tag{44}$$

dans laquelle $m = 2$, $n = 0$; $p = 2$, $q = \nu$.

L'équation différentielle correspondante du premier ordre est, en vertu de (24)

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}' = [(\nu+1) - 4z]\mathfrak{Z} + (z^2 - z + a)(\nu - 2z),$$

d'où l'on arrive, par la substitution

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{w} \tag{45}$$

([4]) E. KAMKE, *Differentialgleichungen I*, pp. 570, 6.105 et 6.106 Leipzig, 1943.

où $w = w(z)$ est la nouvelle fonction inconnue, à l'équation d'Abel de forme (36)

$$w' = (z^2 - z + a)(2z - \nu)w^3 + (4z - (\nu + 1))w^2. \tag{46}$$

De l'identité (37), appliquée à (46), on obtient $k = \frac{1}{4}$, $\nu = 1$. Par conséquent, la DB-èquation

$$x^2yy'' + ay^2 = bx \tag{47}$$

est résolue au moyen des quadratures. On trouve son intégrale génèrale de (25) et de (45) dans la forme paramétrique

$$x = c_2 \exp \int w(z, c_1)dz; \quad y = \left\{ \frac{bxw(z, c_1)}{1 + (z^2 - z + a)w(z, c_1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

où z joue le rôle de paramètre et où $w(z, c_1)$ est donné par les relations (38) et (39)

$$w = \frac{2}{z^2 - z + a}\Theta; \qquad \Theta' = \frac{4(2z - 1)}{z^2 - z + a}\left(\Theta^3 + \Theta^2 + \frac{1}{4}\Theta\right).$$

LITTÉRATURE

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen I*, p. 20, Leipzig, 1943.

[2] M. Petrović, *Jedan diferencijalni algoritam i njegove primene*, Posebna izdanja SAN, knj. CXI, Beograd, 1936 (Un algorithme différentiel et ses applications, Monographies de l'Académie serbe des sciences, vol. CXI, Beograd, 1936 - en langue serbe).

[3] I. Bandić, *O jednoj klasi diferencijalnih jednačina prvog reda*, Vesnik Društva mat. i fiz. N. R. Srbije, X, 1-4, Beograd, 1958 (Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre, Bulletin de la Société des math. et phys. de la R. P. de Serbie, X, 1-4, Beograd, 1958 - en langue serbe).

[4] A. Chiellini, Bollettino Unione Mat. Italiana, 10 (1931) pp. 301-307 Bologna.