Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Trasformazioni puntuali fra spazi conformi e connessioni conformi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.2, p. 191–198.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_2_191_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Trasformazioni puntuali fra spazi conformi e connessioni conformi (*).

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna) (**)

Sunto. - *Si espongono alcuni procedimenti e risultati, sulle trasformazioni puntuali fra spazi conformi, che verranno poi sviluppati in una prossima Memoria.*

1. In due lavori ([7], [8]) (1), apparsi su questo Bollettino, G. VRANCEANU ha mostrato come si possa stabilire un legame fra una trasformazione di spazi proiettivi (o affini) ed una connessione proiettiva (o affine), le componenti della connessione individuando la trasformazione a meno di omografie (o di affinità) dei due spazi. Lo studio di problemi sulle trasformazioni si può così affrontare valendosi degli strumenti del calcolo tensoriale. G. VRANCEANU stesso e la sua Scuola ([9], [4], [5], [10]) hanno infatti in tale modo studiato vari problemi relativi alle trasformazioni puntuali, ottenendo numerosi risultati, alcuni dei quali erano stati gia trovati per altra via.

In una Memoria di prossima pubblicazione tratto diversi problemi sulle trasformazioni puntuali fra spazi conformi, che finora sono state studiate pochissimo (2). A tale scopo, riprendendo l'idea di G. VRANCEANU (3), associo ad una trasformazione fra spazi conformi una connessione conforme, le cui componenti individuano la trasformazione a meno di trasformazioni conformi (4) dei due spazi. In questa Nota voglio indicare come si costruisca la

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca N° 26 del Comitato nazionale per la Matematica del C. N. R. (1961-62).

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 26 maggio 1962.

(1) I numeri tra parentesi quadre rinviano alla Bibbliografia.

(2) L'unico lavoro che conosca è la mia Nota [2].

(3) Tale idea si trova accennata però anche in una nota (la (3)) del mio lavoro [1], per il caso $n=2$.

(4) Trasformazioni conformi per $n \geq 3$. Per $n=2$, *affinità circolari*. È noto infatti che per $n=2$ il gruppo delle trasformazioni conformi non è un gruppo finito, come accade invece per $n \geq 3$ in base al noto teorema di Lionville. Cfr. anche la (12).

predetta connessione, insieme ad alcune sue proprietà, mentre le dimostrazioni per esteso e le applicazioni allo studio delle trasformazioni verranno esposte nella Memoria preannunciata.

2. Consideriamo due spazi euclidei reali $E_n(x^1, \dots, x^n)$, $\mathcal{E}_n(u^1, \dots, u_n)$, le x^i, u^i essendo coordinate cartesiane ortogonali. Siano date le equazioni:

$$u^i = u^i(x^1, \dots, x^n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1}$$

dove le funzioni $u^i(x^1, \dots, x^n)$ sono definite in un campo C di E_n ed in ogni punto di C derivabili almeno fino al quarto ordine, e le derivate quarte siano poi continue [5]. Supponiamo inoltre che al variare delle x^i in G le u^i varino in un campo $\mathcal{C}$ di $\mathcal{E}_n$; che il determinante funzionale

$$D = \text{det.} \left\| \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right\|$$

sia diverso da zero in tutto C e infine che le (1) siano univocamente invertibili in tutti i punti di C. Diciamo allora che le equazioni (1) rappresentano una *trasformazione puntuale* T fra i campi C e $\mathcal{C}$ dagli spazi E_n ed $\mathcal{E}_n$ [6].

Ora consideriamo la forma quadratica differenziale [7]

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{k=1}^{n} (du^k)^2 \tag{2}$$
$$g_{ij} = g_{ji}$$

[5] Oppure anche: funzioni di classe C^4.

[6] Di solito si indica con T *l'applicazione di C in $\mathcal{C}$* rappresentata analiticamente dalle equazioni (1), mentre con T^{-1} si indica *l'applicazione inversa di $\mathcal{C}$ in C* rappresentata analiticamente dalla equazioni ottenute invertendo (come, per ipotesi, si può fare univocamente) le (1):

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^n).$$

Ma in questo lavoro, come del resto in altri miei lavori, non vi è mai luogo a distinguere le due applicazioni e considerarle separatamente. *Pertanto ne indico l'insieme con T e lo chiamo « trasformazione puntuale T fra C e $\mathcal{C}$ ».*

[7] Si fa qui la solita *convenzione sommatoria* per gli indici che appaiono ripetuti nelle formule.

e sia

$$g = \det. \| g_{ij} \| , \tag{3}$$

indichiamo, come al solito [8], con g_{ij} le quantità definite dalle

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

Poniamo [9]

$$G_{ij} = g_{ij} g^{-\frac{1}{n}} \tag{4}$$

e poi

$$G^{ij} = g^{ij} g^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

infine

$$K^i_{jk} = \frac{1}{2} G^{ia} \left(\frac{\partial G_{aj}}{\partial x^k} + \frac{\partial G_{ak}}{\partial x^j} - \frac{\partial G_{jk}}{\partial x^a} \right) \tag{6}$$

Come è noto le K^i_{jk} sono state introdotte da J. M. THOMAS [6] mediante le formule seguenti (che si verifica essere equivalenti alle (6) scritte sopra)

$$K^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} - \frac{1}{n} \delta_j^i \left\{ {h \atop hk} \right\} - \frac{1}{n} \delta_k^i \left\{ {l \atop lj} \right\} + g^{il} \left\{ {h \atop hl} \right\} g_{jk} \tag{7}$$

essendo $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ i simboli di CHRISTOFFEL relativi alla forma (2). Valgono le identità:

$$K^i_{jk} = K^i_{kj} \tag{8}$$

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} - G_{lj} K^l_{ik} - G_{il} K^l_{jk} = 0$$

Alla transformazione T fra i campi C e $\mathfrak{C}$ noi associamo le quantità G_{ij}, K^l_{mn}. Osserviamo che: *le* G_{ij}, K^l_{mn} *sono invarianti rispetto alle trasformazioni conformi dello spazio* $\mathcal{E}_n$. Rispetto alle trasformazioni di coordinate in C le G_{ij} si trasformano come una densità tensoriale di peso $-\frac{2}{n}$. Infatti una trasformazione confor-

[8] Cfr. ad es. [3], pag. 131 e segg.
[9] Cfr. [11].

me dello spazio $\mathcal{E}_n$ non fa che alterare le g_{ij} per uno stesso fattore e quindi lascia invariate le G_{ij} e conseguentemente le $K^l{}_{mn}$. Se poi si effettua un cambiamento qualsiasi (10) di coordinate in C rappresentato dalle:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{9}$$

allora le G_{ij} si trasformano secondo la legge:

$$\overline{G}_{ij} = \Delta^{-\frac{2}{n}} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^i} G_{ab} \tag{10}$$

dove

$$\Delta = \det. \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right\| ; \tag{10)'$$

Ciò prova quanto si è detto riguardo alle G_{ij}. Per ciò che riguarda le $K^l{}_{mn}$, esse si trasformano con la legge

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} K^a{}_{jk} = {} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^k} \overline{K}^i{}_{ab} + \\ & + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} - \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} + \\ & + \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} G^{ab} G_{jk} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^b} , \end{aligned} \tag{11}$$

e ciò mostra che le $K^l{}_{mn}$ insieme con le G_{ij} costituiscono un « oggetto geometrico » [3]. Se il cambiamento di coordinate (9) è una trasformazione conforme (11) allora le (11) si riducono a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} K^a{}_{jk} = {} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^k} \overline{K}^i{}_{ab} - \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^s} \delta_i{}^k + \\ & + \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} G^{ab} G_{jk} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^b} \end{aligned} \tag{12}$$

(10) Supponiamo cioè che le funzioni (9) siano definite in C e ivi derivabili almeno due volte; che il determinante Δ(10') sia in tutto C non nullo e che le equazioni (9) siano in C univocamente invertibili.

(11) Per $n = 2$ una affinità circolare.

date che per trasformazioni conformi si ha:

$$
(13) \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} + \frac{1}{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j} - \frac{1}{n} \delta_j{}^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^s}
$$

Infine si osserverà che: di fronte ai cambiamenti affini di coordinate le $K^l{}_{mn}$ si trasformano come le componenti di un tensore. Ciò risulta dal fatto che in quel caso

$$
\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0
$$

e quindi le (11) si riducono a

$$
(14) \qquad \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} K^a{}_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^k} \bar{K}^i{}_{ab} .
$$

3. La quantita G_{ij}, $K^l{}_{mn}$ soddisfano a certe relazioni necessarie e sufficienti affinchè esista una trasformazione puntuale T fra due campi C e $\mathfrak{C}$ di due spazi euclidei E_n, $\mathcal{E}_n$ cui quelle quantità siano associate, secondo quanto abbiamo detto nel n. 2. La T è allora determinata univocamente a meno di trasformazioni conformi di E_n. Indichiamo ora brevemente come si calcolino le predette relazioni e si dimostri quanto abbiano affermato.

Consideriamo una connessione conforme normale sopra il campo C delto spazio E_n numerico, definita [11] dalle formule seguenti, che danno la legge di raccordo di due *riferimenti* $(n+2)$-*sferici* associati ai punti (x^i) ed $(x^i + dx^i)$ di C,

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
dA_0 &= A_j dx^j, \\
dA_i &= \omega_i{}^0 A_0 + \omega_i^{n+1} A_{n+1} + \omega_i{}^j A_j, \\
dA_{n+1} &= \omega_{n+1}^j A_j
\end{aligned}
$$

dove le ω sono le forme di PFAFF:

$$
\omega_i^0 = \alpha_{ik}^0 dx^k, \qquad \omega_i^j = \alpha_{ik}^j dx^k
$$

$$
\omega_i^{n+1} = \alpha_{ik}^{n+1} dx^k, \qquad \omega_{n+1}^i = \alpha_{n+1,k}^i dx^k
$$

ed i coefficienti α sono dati dalle formule seguenti [12]:

$$(n-2)\overset{0}{\alpha}_{jk} = \frac{1}{2(n-1)} G_{jk} G^{ab} \overset{i}{\alpha}_{abi} - \overset{i}{\alpha}_{jki} \qquad (n > 2)$$

$$\overset{i}{\alpha}_{jk} = K^{i}_{jk} \qquad (\overset{i}{\alpha}_{jk} = \overset{i}{\alpha}_{kj})$$

$$(17) \qquad \overset{n+1}{\alpha}_{jk} = G_{jk}$$

$$\alpha^{i}_{n+1,\,k} = G^{ij} \overset{0}{\alpha}_{jk}$$

dove

$$\overset{i}{\alpha}_{jkh} = \frac{\partial \overset{i}{\alpha}_{jk}}{\partial x^h} - \frac{\partial \overset{i}{\alpha}_{jh}}{\partial x^k} + \overset{a}{\alpha}_{jh} \overset{i}{\alpha}_{ah} - \overset{a}{\alpha}_{jh} \overset{i}{\alpha}_{ak}.$$

Orbene: *le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare le quantila* G_{ij}, $K^{l}{}_{mn}$ *si ottengono esprimendo che i secondi membri delle* (15) *sono dei differenziuli esatti.* In tale modo il sistema di equazioni (15) risulta ollora completamente integrabile e il punto A_0 si muove in uno spazio conforme. Le sue coordinate cartesiane (definite in un campo $\mathcal{C}$ di uno spazio euclideo $\mathcal{E}_n$ a meno di trasformazione conformi) sono funzioni delle x^i, definite nel campo C di E_n e forniscono la rappresentazione analitica della trasformazione puntuale T fra C e $\mathcal{C}$. Di tale procedimento ci si serve appunto nella Memoria annunciato nel nel n. 1 per trattare problemi di determinazione di trasformazioni.

4. Per terminare voglio menzionare anche un altro significato geometrico della condizioni necessarie e sufficienti cui soddisfano le quantità G_{ij}, $K^{l}{}_{mn}$ e di cui ho detto nel precedente n. 3. Consideriamo nello spazio E_n gli archi di curve centenuti in C e di equazioni parametriche

$$(18) \qquad x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dove s è il parametro definito dalla (2) (a meno di una costante additiva), la funzione $x^i(s)$ essendo integrali delle equazioni differenziali del terzo ordine seguenti (gli apici indicano derivazio-

[12] Il caso $n = 2$ va trattato a parte.

ne rispetto ad s):

$$x^{i\,''} + F_i(x^{1\,''}, \dots, x^{n\,''}; x^{1\,'}, \dots, x^{n\,'}; x^1, \dots, x^n) \equiv$$

(19) $$\equiv \frac{d}{ds}(x^{i\,''} + \overset{i}{\alpha}_{jk} x^{j\,'} x^{k\,'}) + \overset{i}{\alpha}_{jk} x^{k\,'}(x^{j\,''} + \overset{j}{\alpha}_{ab} x^{a\,'} x^{b\,'}) +$$

$$+ x^{i\,'}[G_{jk}(x^{j\,''} + \overset{j}{\alpha}_{ab} x^{a\,'} x^{b\,'})(x^{k\,''} + \overset{k}{\alpha}_{cd} x^{c\,'} x^{d\,'}) - \overset{0}{\alpha}_{jk} x^{j\,'} x^{k\,'}] +$$

$$+ \overset{i}{\alpha}_{n+1,\,k} x^{k\,'} = 0.$$

Queste equazioni forniscono gli archi di curve (dipendenti da $3n - 3$ costanti arbitrarie) che si sviluppano in archi di circonferenza in uno spazio tangente della connessione conforme (15). Si tratta dunque delle curve di E_n che corrispondono mediante la trasformazione T alle circonferenze di $\mathcal{E}_n$. La forma delle equazioni (19) è invariante per trasformazioni conformi di E_n e le condizioni necessarie e sufficienti del n. 3 esprimono la possibilità di trasformare equazioni di quella forma nelle equazioni differenziali

(20) $$u^{i\,'''} + \rho^2 u^{i\,'} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

dove

$$\rho^2 = \sum_{1}^{n}{}_r\, (u^{r\,''})^2$$

e le derivate sono fatte rispetto a un parametro definito dalla:

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, (u^{r\,'})^2 = 1.$$

Le equazioni (20) sono appunto quelle che forniscono le ∞^{3n-3} circonferenze di $\mathcal{E}_n$.

Gli archi di curve contenuti nel campo C di E_n che soddisfano alle equazioni del secondo ordine seguenti, e dipendono da $2n - 2$ costanti arbitrarie:

(21) $$x^{i\,'} \cdot \sum_{1}^{n}{}_r\, (x^{r\,''})^2 - F_i = 0$$

dove le F_i sono quelle che figurano nelle (19), sono stati introdotti da me per $n = 2$[2] e chiamati archi delle *curve* $\mathcal{C}$. Si tratta di curve invarianti per trasformazioni conformi di E_n (e così le loro corrispondenti in T di $\mathcal{E}_n$) che si possono considerare analoghe delle curve caratteristiche delle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche*, Atti IV Congr. U. M. I. Taormina, Roma (1953) pp. 417-24.

[2] L. MURACCHINI, *Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra due piani*, « Boll. U. M. I. », (3) 8, 252-58 (1953).

[3] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, Berlino, 1954.

[4] M. STOKA, *Sur les correspondances speciales entre des éspaces projéctifs*, Studi si Cerc. Math., Bucarest, (12) 121-31 (1961).

[5] M. STOKA G. G. VRANCEANU, *Correspondances entre deux éspaces projéctifs à caractéristiques confondues*, Studi si Cerc. Math., Bucarest, (10) 219-35 (1959).

[6] J. M. THOMAS, *Conformal correspondence of Riemann spaces*, « Proc. Nat. Ac. Sci. », (11) 257-59 (1925).

[7] G. VRANCEANU, *Trasformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine euclidea*, « Boll. U. M. I. », (3) 12, 145-53 (1957).

[8] G. VRANCEANU, *Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi*, « Boll. U. M. I. », (3) 12, 489-506 (1957).

[9] G. VRANCEANU, *Lectii de geometrie diferentiala*, vol. III, Bucarest, 1960.

[10] G. G. VRANCEANU, *Sur une densité vectorielle associée à una transformation ponctuelle d'éspèce trois*, Studi si Cerc. Math. Bucarest, (12) 121-31 (1961).

[11] K. YANO, *Sur la théorie des éspaces á connéxion conforme*, « Journ Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo », (4) 1-59 (1939).