Bollettino Unione Matematica Italiana

Enrico Bombieri

Sulla dimostrazione di C. L. Siegel del teorema fondamentale di Minkowski nella geometria dei numeri.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.3, p. 283–288.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_3_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Sulla dimostrazione di C. L. Siegel del teorema fondamentale di Minkowski nella geometria dei numeri.

Nota di ENRICO BOMBIERI (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *Si dimostra, usando un metodo di* C. L. SIEGEL, *un teorema che generalizza il «principio di* BLICHFELDT» *nella geometria dei numeri.*

Summary. - *Using a method of* C. L. SIEGEL, *one proves a general theorem analogous to «*BLICHFELDT'*s principle».*

1. Introduzione e notazioni.

C. L. SIEGEL [1] ha dato una notevole dimostrazione analitica del teorema di MINKOWSKI. Ci proponiamo di mostrare come si possa leggermente modificare il suo procedimento, in modo da ottenere il principio di BLICHFELDT e altri teoremi analoghi, che possono presentare interessanti applicazioni.

Una generalizzazione del teorema di SIÈGEL in un'altra direzione è stata data da J. W. S. CASSELS [2].

Secondo l'uso corrente, useremo le seguenti notazioni:

Λ indica un reticolo nello spazio n-dimensionale R^n, e con $d(\Lambda) = \det \Lambda$ indicheremo il determinante di Λ.

Λ^* è il reticolo polare (o reciproco) di Λ; è noto che

$$d(\Lambda)d(\Lambda^*) = 1. \tag{1}$$

Lettere in neretto $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$, ... indicano vettori di R^n.

$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ è il prodotto scalare dei due vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ cioè

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n .$$

$\boldsymbol{o}$ indica l'origine di R^n.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N° 40 del Comitato per la Matematica del C. N. R. (1961-62).

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 30 luglio 1962.

$\psi(\boldsymbol{x})$ è una funzione non negativa, nulla all'esterno di una sfera $\|\boldsymbol{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} < K$ integrabile e di quadrato integrabile.

$$V(\psi) = \int_{R^n} \psi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{2}$$

(indicando con $d\boldsymbol{x}$ l'elemento di volume $dx_1 \dots dx_n$).

$\mathcal{S}$ è una regione chiusa limitata in R^n; con $\mathcal{S}(\boldsymbol{x})$ indicheremo la medesima regione traslata secondo il vettore $\boldsymbol{x}$.

$$V(\mathcal{S}) = \text{volume di } \mathcal{S}, \tag{3}$$

e

$$V_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \Lambda} V(\mathcal{S}(\boldsymbol{v}) \cap \mathcal{S}(\boldsymbol{u})). \tag{4}$$

$\mathfrak{F}$ è un parallelogramma fondamentale per Λ; in particolare avremo

$$\int_{\mathfrak{F}} d\boldsymbol{v} = d(\Lambda). \tag{5}$$

2. I risultati ottenuti e la dimostrazione.

Il seguente teorema (C. L. Siegel [1], J. W. S. Cassels [2], L. J. Mordell [3]) è, come apparirà evidente dalla dimostrazione, una combinazione tra la formula di Poisson a n variabili e la formula di Parseval.

Teorema 1:

$$d(\Lambda) \sum_{\boldsymbol{u} \in \Lambda} \int_{R^n} \psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) \psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x} =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{p} \in \Lambda^*} \cos(2\pi(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})) \left| \int_{R^n} \psi(\boldsymbol{x}) e^{-2\pi i (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} \right|^2$$

Osservazione. – Se $\boldsymbol{v}$ è l'origine di R^n, questo teorema diventa quello di Siegel.

Dimostrazione. – La dimostrazione segue strettamente quella di Siegel.

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\Lambda} \psi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \tag{6}$$

Essa è evidentemente una funzione periodica, che ha come periodi i punti del reticolo Λ. Poichè per ipotesi la funzione $\psi(\boldsymbol{x})$ si annulla all'esterno di una sfera $\|\boldsymbol{x}\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} < K$, la somma al secondo membro della (6) avrà al più $c(K)$ termini non nulli, indicando con $c(K)$ una quantità dipendente da K (e da Λ) ma non da $\boldsymbol{v}$. Ne segue che la $\varphi(\boldsymbol{v}) \in L^2$, e quindi risulta sviluppabile in serie di FOURIER. I suoi coefficienti di FOURIER sono dati da

$$a(\boldsymbol{p}) = 1/d(\Lambda)\int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{v})e^{-2\pi i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})}d\boldsymbol{v}, \qquad \text{con } \boldsymbol{p} \in \Lambda^*. \tag{7}$$

Per la (6), tenendo conto che per $\boldsymbol{u} \in \Lambda$, $\boldsymbol{p} \in \Lambda^*$ si ha $e^{-2\pi i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u})} = 1$, si ha anche

$$a(\boldsymbol{p}) = 1/d(\Lambda)\int_{\mathcal{S}} \Big(\sum_{\boldsymbol{u}\in\Lambda} \psi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\Big)e^{-2\pi i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})}d\boldsymbol{v} = \tag{8}$$

$$= 1/d(\Lambda)\int_{R^n} \psi(\boldsymbol{v})e^{-2\pi i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})}d\boldsymbol{v}.$$

Applichiamo ora la formula di PARSEVAL e otteniamo (φ è reale):

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = d(\Lambda) \sum_{\boldsymbol{p}\in\Lambda^*} |a(\boldsymbol{p})|^2 e^{2\pi i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v})}. \tag{9}$$

D'altra parte si ha

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u}'\in\Lambda} \int_{\mathcal{S}} \psi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \tag{10}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u}'\in\Lambda} \int_{\mathcal{S}} \psi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u}'\in\Lambda} \int_{\mathcal{S}(\boldsymbol{u})} \psi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{u}'\in\Lambda} \int_{R^n} \psi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Combinando le formule (8), (9) e (10), e ricordando che la funzione $\psi(\boldsymbol{x})$ è una funzione reale, si ottiene immediatamente il teorema 1.

Ci occuperemo ora di alcuni notevoli corollari che si possono ricavare da questo teorema.

Se $\psi(\boldsymbol{x})$ è la funzione caratteristica della regione $\mathfrak{S}$, cioè

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \boldsymbol{x} \in \mathfrak{S} \\ 0 & \text{per} \quad \boldsymbol{x} \notin \mathfrak{S} \end{cases} \tag{11}$$

essa soddisfa alle condizioni imposte nel § 1: applicando il teorema 1 a questo caso particolare ne segue il

COROLLARIO 1:

$$d(\Lambda) V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{p} \in \Lambda^*} \cos(2\pi(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})) \left| \int_{\mathfrak{S}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} \right|^2 .$$

Un ostacolo che si oppone alla applicazione pratica di questo risultato, quando $\boldsymbol{v} \neq 0$, è il fatto che nella serie che compare al secondo membro compaiono anche termini negativi.

Consideriamo ora un polinomio trigonometrico $\sum_{h=0}^{N} b_h \cos(hx)$ tale

$$\sum_{h=0}^{N} b_h \cos(hx) \geq 0, \quad (x \text{ reale}), \text{ e inoltre } b_h \geq 0. \tag{12}$$

Avremo allora il seguente

TEOREMA 2:

$$d(\Lambda) \sum_{h=0}^{N} b_h V_{\mathfrak{S}}(h\boldsymbol{v}) \geq (b_0 + b_1 + \dots + b_N) V^2(\mathfrak{S}).$$

DIMOSTRAZIONE. – Combinando la (12) con il corollario 1, si ha immediatamente il risultato se si osserva che

$$\cos(2\pi(\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{v})) \left| \int_{\mathfrak{S}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} \right|^2 = V^2(\mathfrak{S}).$$

Dalla definizione (4) osserviamo che:

se nessna regione $\mathfrak{S}(\boldsymbol{x})$, *traslata di* $\mathfrak{S}$. *contiene due punti di* Λ, *allora*

$$V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{o}) = V(\mathfrak{S}). \tag{13}$$

Questo risultato è del tutto evidente.

Usando questo risultato con il teorema 2, possiamo dimostrare nuovamente il «principio di BLICHFELDT» e darne interessanti generalizzazioni.

Posto, nel teorema 2, $N=0$, $b_0=1$, si ricava il

« *Principio di* BLICHFELDT »: (vedi ad es. J. W. S. CASSELS [5]) « *Se nessuna regione* $\mathfrak{S}(\boldsymbol{x})$, *traslata di* $\mathfrak{S}$, *contiene due punti di* Λ, *allora* $d(\Lambda) \geq V(\mathfrak{S})$ ».

Per $N=1$, $b_0=b_1=1$ avremo:

se nessuna regione $\mathfrak{S}(\boldsymbol{x})$ *contiene due punti di* Λ, *si ha*

$$d(\Lambda) \geq 2V^2(\mathfrak{S}) / \{ V(\mathfrak{S}) + V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{v}) \} \tag{14}$$

Tuttavia questo risultato è inferiore al seguente

Teorema A: (A. C. WOODS [4]).

« *Se nessuna* $\mathfrak{S}(\boldsymbol{x})$ *contiene due punti di* Λ, *allora*

$$d(\Lambda) \geq 2V(\mathfrak{S}) - V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{v}) \text{ ».} \tag{15}$$

Poniamo ora, poichè $(1+2\cos x)^2 = 3 + 4\cos x + 2\cos(2x) \geq 0$, $N=2$, $b_0=3$, $b_1=4$, $b_2=2$; scegliamo poi il punto $\boldsymbol{v}$, che nel teorema 2 risulta arbitrario, in modo che $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}/3$, con $\boldsymbol{u} \in \Lambda$.

Avremo

$$d(\Lambda)\{3V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{o}) + 4V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{u}/3) + 2V_{\mathfrak{S}}(2\boldsymbol{u}/3)\} \geq 9V^2(\mathfrak{S}).$$

Ma ora è

$$V_{\mathfrak{S}}(2\boldsymbol{u}/3) = V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}/3) = V_{\mathfrak{S}}(-\boldsymbol{u}/3) = V_{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{u}/3)$$

e di qui otteniamo il

TEOREMA 3:

Se nessuna $\mathbb{S}(\boldsymbol{x})$ *contiene due punti di* Λ, *allora*

$$d(\Lambda) \geq 3V^2(\mathbb{S}) / \{ V(\mathbb{S}) + 2V_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u}/3) \} \quad \textit{per ogni} \quad \boldsymbol{u} \in \Lambda. \tag{16}$$

Questo risultato è migliore di quello che si ricava dal teorema A tutte le volte che sia

$$V_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u}/3) < V(\mathbb{S})/2.$$

Per concludere, annunciamo la seguente applicazione:

TEOREMA 4:

Siano $\xi_1, \ldots, \xi_n$ n *forme lineari omogenee reali, con* $\det \xi = \Delta \neq 0$.
Siano poi $\rho_1, \ldots, \rho_n$ n *numeri reali. Allora esiste almeno un punto* $(x_1, \ldots, x_n)$ *a coordinate intere per il quale vale la limitazione:*

$$\prod_{i \leq n} | \xi_i - \rho_i | \leq | \Delta | / (\gamma_n 2^{n/2}),$$

$$\textit{con} \quad \gamma_n > (3 + 10^{-4})(2e - 1) \quad \text{per} \quad n \geq n_0. \tag{17}$$

Questo risultato migliora l'analogo precedente risultato, dovuto a H. DAVENPORT, secondo il quale si può assumere

$$\gamma_n > (2e - 1 - \eta) \quad \text{per} \quad n \geq n_1(\eta). \tag{18}$$

La dimostrazione di questo teorema 4, pur essendo semplice in linea di principio, richiede alcuni lemmi preparatori, e costituirà pertanto l'oggetto di un successivo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. L. SIEGEL. *Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein zusammenhangendes Extremalproblem*, «Acta Math.» 65 (1935), pp. 309-323.
[2] J. W. CASSELS, *On a theorem of Rado in the geometry of numbers.* «J. London Math. Soc.», 22, (1947) pp. 196-200.
[3] L. J. MORDELL, *The lattice points in a parallelogram*, «Math. Annalen», 103 (1930) pp. 38-47.
[4] A. C. WOODS, *On a Theorem of Tschebotareff*, «Duke Math. Jour.», 25, (1958) pp. 631-638.
[5] J. W. S. CASSELS, *An introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, (1959).