Bollettino
Unione Matematica Italiana

Salvatore Cherubino

Sulle quasi-algebre commutative definite in un'epoca.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.4, p. 357–365.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_4_357_1>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

Sulle quasi-algebre commutative definite in un' epoca

di Salvatore Cherubino (a Pisa) (**)

Sunto. - *Vedasi il terzo alinea della prefazione.*

Le ricerche di economia astratta, cui da un decennio dedico gran parte della mia attività scientifica, mi hanno fatto considerare alcune questioni di calcolo delle matrici che non potei includere nella monografia del C. N. R. (¹). Questa Nota presenta in riassunto alcuni risultati di un lavoro in corso, nel quale si tro-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U M. I. il 31 luglio 1962.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 10 ottobre 1962.

(¹) S. Cherubino: Calcolo delle Matrici, (Cremonese, Roma, 1957). Sarà richiamata scrivendo: « Matrici ».

verà la nozione di gruppi evolutivi di un sistema economico, [2] i quali danno luogo ad algebre commutative di matrici definite in un'epoca. Gli elementi di detti gruppi sono trasformazioni lineari a coefficienti funzioni del tempo, variabile nei cicli di produzione (intervalli di regolarità di un'epoca), ed operano sui vettori produzioni–prezzi, surproduzioni–surlavori, o altri di una economia. Una quasi commutatività lega le trasformazioni di un ciclo con quelle operanti negli altri cicli della stessa epoca.

Tali trasformazioni sono date dalle soluzioni del sistema di equazioni diferenziali lineari ordinarie, con costrizioni lineari, rappresentativo del mercato del sistema economico. Il particolare aspetto della matrice dei coefficienti ci dice che, in un'epoca illimitata, le soluzioni non sono asintoticamente stabili, ma possono soddisfare altre condizioni per le quali rimandiamo alla teoria generale. [3]

In queste pagine ci occupiamo: della commutatività di quelle algebre di matrici (che diciamo normali) i cui elementi hanno una comune canonizzante; della scomposizione di un' algebra in sottoalgebre normali e di qulle le cui matrici sono funzioni del tempo variabile in un' epoca (definita al § 4), infine di certe parti di algebre normali (*quasi algebre normali*) le cui matrici sono permutabili coi loro integrali, i quali ampliano le quasi–algebre facendole restare normali. Seguono osservazioni su gli integrali generali dei sistemi differenziali lineari ordinari in una quasi–algebra definita.

1. Matrici con una stessa canonizzante.

1.1 – Ogni matrice complessa A, di ordine n, è scomponibile in un sol modo nella somma $A_D + A_J$ di due matrici, la prima diagonalizzabile e con le stesse radici carattesistiche di A, la seconda pseudo–nulla, fra loro permutabili. Se $B = B_D + B_J$ è una seconda matrice decomposta come A, accade che A e B sono permutabili allora e solo che le loro parti principali, A_D e B_D, e complementari, A_J e B_J, sono a due due permutabili [4].

[2] Il concetto di evoluzione economica fu introdotto in una Memoria dei Rend. Mat. di Roma, lel 1959, pp. 131-161 e venne ripreso in ricerche successive.

[3] Vedasi il trattato di SANSONE e CONTI sulle equazioni differenziali non lineari e particolarmente i lavori ivi citati di L. CESARI (Ann. Sc. N. Pisa, 1939 e 1940) e di D. CALIGO (Rend. Acc. d'Italia, 1940).

[4] S. CHERUBINO: *Permutabilità e logaritmi delle matrici* (Rend. Mat. Roma, s V, vol. XIII, 1954, pp. 221-238) §. 2: questa proprietà si dice della *permutabilità totale*.

Sia T una matrice che porti A alla forma canonica $C = D + J$ essendo D la matrice diagonale i cui elementi principali sono le radici caratteristiche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, distinte oppur no di A, mentre J è una matrice i cui elementi sono tutti uguali a zero tranne quelli della prima diagonale a destra parallela alla principale, che indichiamo con $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, numeri arbitrari generalmente non tutti diversi da zero. Indicando coo $I^{(r)}$ la matrice che ha uguali a zero tutti gli elementi, tranne quello di posto r sulla diagonale principale, che è uguale ad 1, e con $J^{(r)}$ quella che ha uguale ad 1 solo l'elemento di posto $(r, r+1)$ e gli altri tutti zero, si quò scrivere:

$$A = T \left\{ \sum_{r=1}^{n} \alpha_r I^{(r)} + \sum_{r=1}^{n-1} a_r J^{(r)} \right\} T^{-1} \tag{1.1}$$

con le restitrizioni, dovute alla permutabilità delle due parti:

$$(\alpha_r - \alpha_{r+1}) a_r = 0 ; \qquad r = 1, 2, \dots, n-1 \tag{1.I}$$ [5]

Supposto che B, oltre ad essere permutabile con A, sia portata a forma canonica di Jordan dalla stessa matrice T, si può porre analogamente:

$$B = T \left\{ \sum_{s=1}^{n} \beta_s I^{(s)} + \sum_{s=1}^{n-1} b_s J^{(s)} \right\} T^{-1} \tag{1.2}$$

e dovrà aversi, affinchè le due parti sian permutabili:

$$(\beta_r - \beta_{r+1}) b_r = 0 ; \qquad r = 1, 2, \dots, n-1 \tag{1.II}$$

Le condizioni di permutabilità di A con B, per la permutabilità totale, risultano essere:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_s - \alpha_{s+1}) b_s = 0 \\ (\beta_s - \beta_{s+1}) a_s = 0 \end{aligned}\right\} ; \qquad s = 1, 2, \dots, n-1 \tag{1.III}$$

$$a_r b_{r+1} = b_r a_{r+1} ; \qquad r = 1, 2, \dots, n-2 \tag{1.IV}$$

[5] $C = D + J$ è la forma canonica di Jordan. Si può operare anche sulla forma canonica da me data nel 1926, che sarebbe in questa circostanza un pò meno maneggevole.

Per ottenere queste condizioni si son calcolati i prodotti $I^{(r)}J^{(s)}$, $J^{(r)}I^{(s)}$, $J^{(r)}J^{(s)}$.

Tenendo presente che la parte complementare del prodotto $(D+J)(D'+J')$, cioè delle forme cononiche JORDAN di A e di B, è: $DJ'+JD'+JJ'=D'J+J'D+J'J$, e che $J^{(r)}J^{(s)}$ non può coincidere con alcuna $J^{(s)}$, si trova che affinchè il prodotto $AB=BA$ sia canonizzato dalla stessa matrice T che canonizza A e B occorre e basta che si abbia anche:

$$a_r b_{r+1} = b_r a_{r+1} = 0\,; \qquad r = 1,\ 2, \ldots,\ n-2 \tag{1.V}$$

Dopo di che la parte complementare del prodotti CC′ è dato da:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (\alpha_r b_r + a_r \beta_{r+1}) J^{(r)} \tag{1.3}$$

che, coincidendo con quella di C C, può anche scriversi:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (\beta_r a_r + b_r \alpha_{r+1}) J^{(r)}\,.$$

Dopo di che. le condizioni trovate permettono di costruire la più ampia algebra commutativa canonizzata da T. Algebra-*normale* è un'algebra commutativa le cui matrici hanno una comune canonizzante,

2. Indici di canonizzabilità e di normalità.

2.1 - Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di matrici di ordine n, A un suo elemento non nullo, T′ una matrice che la canonizzi, $\mathfrak{A}'$ l'algebra di tutte le matrici canonizzate da T′, e sia $\mathcal{A}'$ la sua intersezione, certo non nulla, con $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}'$ non esaurisce $\mathcal{A}$, vi sarà una matrice non nulla B di $\mathcal{A}$ canonizzata da una $T'' \neq T'$, onde l'algebra $\mathfrak{A}''$ di tutte le matrici canonizzate da T″ intersecherà $\mathcal{A}$ in una $\mathcal{A}''$ contenente B. Se $\mathcal{A}' + \mathcal{A}''$ non esaurisce $\mathcal{A}$ vi sarà in $\mathcal{A}$ una matrice B′, esterna ad $\mathcal{A}' + \mathcal{A}''$, sulla quale si opererà come su A e B. Così continuando, essendo l'ordine di $\mathcal{A}$ finito, si otterrà un certo numero p di sottoalgebre $\mathcal{A}', \mathcal{A}'', \ldots, \mathcal{A}^{(p)}$, congiunte da $\mathcal{A}$, canonizzate rispettivamente da T', T'',... $T^{(p)}$, e dalle matrici di altrettanti sistemi:

(2.1) $$(T'), (T''), \dots, (T^{(p)})$$

ciascuno contenente tutte le matrici che canonizzano le corrispondenti sottoalgebre:

(2.2) $$\mathcal{A}', \mathcal{A}'', \dots, \mathcal{A}^{(p)}$$

Se si vuole, $\mathcal{a}'$, $\mathcal{a}''$, ..., possono prendersi normali e allora lo sono le (2.2): dunque, ogni $\mathcal{A}$ può sempre supporsi canonizzabile (o normale) oppure somma di un numero finito di sottoalgebre canonizzabili (o normali). Ogni elemento di $\mathcal{A}$ appartiene ad una delle sottoalgebre (2,2) oppure alla congiungente due o più di esse.

Sia P' una matrice comune a più sistemi (2.1), ad es. ai primi $l > 1$ e ad essi soltanto. Se $\bar{\mathcal{Q}}'$ è la più ampia algebra canonizzata da P', l'intersezione di $\bar{\mathcal{a}}'$ con $\mathcal{A}$ dà una sottoalgebra $\bar{\mathcal{A}}'$ contenente $\mathcal{A}' + \mathcal{A}'' + \dots + \mathcal{A}^{(l)}$ e canonizzata da P'. Se $\bar{\mathcal{A}}'$ non esaurisce $\mathcal{A}$, vi sarà una $\overline{B}$ di $\mathcal{A}$ esterna ad $\bar{\mathcal{A}}'$ sulla quale si potrà operare come su B: e via di seguito. Operando allo stesso modo sui sistemi analoghi ai (2.1) e (2 2) così via via ottenuti, si perverrà ad un certo numero $i \leq p$ di sottoalgebre di $\mathcal{A}$, da euesta congiunte, i cui sistemi canonizzanti:

(2.3) $$(T'), (\bar{T}''), \dots, (T^{(i)})$$

saranno due a due privi di elementi comuni.

L'intero i si dice *indice* di canonizzazione o di normalità, secondo chè si è operato con algebre $\mathcal{a}'$, $\mathcal{a}''$, ..., $\bar{\mathcal{a}}'$, ..., semplicemente canonizzabili, oppure normali. L'indice i dipende dalla scelta delle matrici A, B, ..; P ; $\overline{B}$... . Essendo i un intero positivo esiste un valore minimo di esso che si dirà *indice principale* di canonizzabilità o di normalità di $\mathcal{A}$ (6).

(6) Sarebbe interessante dare un metodo semplice e rapido per pervenire a questo indice minimo, in casi particolari non banali.

3. Quasi algebre in un intervallo.

3.1 – Diremo che $\mathcal{A}(t)$ è funzione dell'intervallo (t_0, t_1) se le sue matrici, cioè i loro elementi, sono funzioni del paramento t variabile in (t_0, t_1) e se esiste una matrice T, costante in detto intervallo, che canonizza (JORDAN) tutte le sue matrici. Un'algebra funzione di intervallo si può spezzare in algebre canonizzabili, o normali, congiunte da essa, ciascuna delle quali è costituità da matrici come:

$$\mathrm{A}(t) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r(t)\mathrm{T}_r + \sum_{s=1}^{n-1} a_s(t)\bar{\mathrm{T}}_s \tag{3.1}$$

ove si è posto:

$$\mathrm{T}_r = \mathrm{T}\,\mathrm{I}^{(r)}\mathrm{T}^{-1}\,; \qquad \bar{\mathrm{T}}_s = \mathrm{T}\,\mathrm{J}^{(s)}\,\mathrm{T}^{-1} \tag{3.2}$$

e le $\alpha_r(t)$, $a_s(t)$ sono fnnzioni di t variabile in (t_0, t_1).

Consideriamo l'insieme di quelle (3.1) per le quali le funzioni $\alpha_r(t)$ ed $a_s(t)$ si conservano reali e dello stesso segno, ad es. positive, zero compreso, in tutto (t_0, t_1) e tale che ogni combinazione lineare a coefficienti reali non negativi appartiene all'insieme stesso. Ogni insieme come qnesto si dirà una *quasi-algebra definita positiva.*

Le funzioni $\alpha_r(t)$, $a_s(t)$ relative alle matrici di una assegnata quasi-algebra definita positiva siano integrabili in tutto (t_0, t_1) e poniamo:

$$\bar{\alpha}_r(t) = \int_a^t \alpha_r(\tau)d\tau\,; \qquad r = 1, 2, \ldots, n \tag{3.3}$$

$$\bar{a}_s(t) = \int_a^t a_s(\tau)d\tau\,; \qquad s = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.4}$$

essendo (a, t) un sottointervallo qualunque di (t_0, t_1). Questi integrali sono funzioni reali non negative di t in tutto (t_0, t_1) e sono uguali a zero allora e solo che le loro funzioni integrande sono uguali a zero in tutto l'intervallo d'integrazione: inoltre due integrali (3.3) oppure (3.4) sono identicamente uguali in (t_0, t_1) quando lo sono le rispettive funzioni integrande. Ne segue che le relazioni (1.I)-(1.II), ... , (1.V) sono soddisfatte anche quando $\alpha_r(t)$, $\beta_s(t)$ ed $a_r(t)$, $b_s(t)$ si sostituiscono coi loro integrali; e quando:

$$\alpha_r b_r + a_r \beta_{r+1} = \alpha_{r+1} b_r + a_r \beta_r \tag{3.5}$$

si mantenga (reale e) non negativa, altrettanto accadrà sostituendo in essa i simboli che vi figurano con integrali, come i (3.3)-(3.4).

Si può perciò affermare che, ampliando una quasi-algebra definita con gl' integrali:

$$\int_a^t A(\tau)d\tau = \sum_{r=1}^{n} \bar{\alpha}_r(t) T_r + \sum_{s=1}^{n-1} \bar{a}_s(t) \bar{T}_s \tag{3.6}$$

dei suoi elementi, si ha ancora una quasi-algebra definita dello stesso segno. Non solo, ma se quella da cui si parte è una quasi-algebra commutativa (che potrà dirsi *normale*) anche la quasi-algebra ampliata sarà commutativa (normale).

Una quasi-algebra la diremo *completa* se contiene gli integrali estesi ad ogni sottointervallo di (t_0, t_1) di tutti i suoi elementi. Essa conterrà i matrizzanti di ogni suo elemento (7), (oltre agli esponenziali di essi). Conterrà anche gli integrali generali di ogni sistema differenziale lineare ordinario omogeneo di primo ordine la cui matrice dei coefficienti appartenga alla quasi-algebra completa, purchè in questa si prenda anche la determinazione iniziale della matrice incognita. Se il sistema non è omogeneo, occorrerà che la quasi-algebra contenga pure il termine noto del sistema.

4. Quasi-algebre in un' epoca.

4.1 - Chiamiamo epoca una coppia di successioni di intervalli di tempo;

$$(t_0, t_1), (t'_1, t_2), \ldots, (t'_{N-1}, t_N) \tag{4.1}$$

$$(t_1, t'_1), (t_2, t'_2), \ldots, (t_{N-1}, t'_{N-1}) \tag{4.2}$$

tutti aperti, a destra, i secondi intercalanti i primi. Gli estremi t_0 e t_N possoni essere rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$: allora l' epoca è illimitata a sinistra, a destra, o da ambo i lati. Considereremo

(7) Per matrizzante, v. « Matrici », cap. 1, § 13, n. 49, pp 100-101

solo epoche limitate e finite, sicchè N è un intero finito assegnato. Gli intervalli (4.1) si dicono *di regolarità*, quelli (4.2), che tutti o parte possono ridursi ciascuno ad un punto, si dicono *pause.* Può accadere che l'epoca inizi con una pausa (t'_0, t_0): in questo caso t'_0 può essere $-\infty$; analogamente per l'ultima pausa.

Un' algebra o quasi-algebra si dirà funzione di un'epoca, se le sue matrici sono funzioni, ben determinate, finite, integrabili e derivabili quante volte occorre, in ciascun intervallo di regolarità dell'epoca, e mancanti di qualcuna o anche tutte queste proprietà in ciascuna pausa.

Le quasi-algebre definite in un'epoca le supporremo sempre ampliate con gl'integrali e i matrizzanti (destri e sinistri) delle proprie matrici. Esse conterranno anche l'integrale generale di ogni sistema differenziale lineare ordinario la cui matrice dei coefficienti e quella dei termini noti appartengano alla quasi-algebra, purchè anche la determinazione iniziale della matrice incognita si prenda nella quasi-algebra.

Ad es., se $\mathscr{A}$ è una quasi-algebra, che per semplicità supponiamo commutativa e quindi normale, il sistema differenziale lineare:

$$\dot{\mathrm{Y}}(t) = \mathrm{A}(t)\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t) \tag{4.3}$$

ha come integrale generale:

$$\mathrm{Y}(t) = \mathfrak{M}(t) \cdot \mathrm{C} + \mathfrak{M}(t) \int_a^t \mathfrak{M}(\tau)^{-1}\mathrm{B}(\tau)d\tau \tag{4.4}$$

con C matrice costante arbitraria appartenente ad $\mathscr{A}$. $\mathfrak{M}(t)$ matrizzante (unico) di $\mathrm{A}(t)$, con (a, t) appartenente ad un intervallo di regolarità dell'epoca. [8]

4.2 - Supponiamo soltanto che $\mathrm{A}(t)$ e $\mathrm{B}(t)$ siano permutabili ed appartengano ad una quasi-algebra definita nell'epoca (4.1) - (4.2) e sia T una matrice costante che le canonizzi entrambe.

La $\mathrm{A}(t)$ sarà data con la (3.1), sicchè la sua forma canonica (di

(8) Si riconosce facilmente che le inverse delle matrici non singolari di una quasi-algebra appartengono ad essa.

JORDAN) è:

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_r(t)\mathrm{I}^{(r)} + \sum_{s=1}^{n-1} a_s(t)\mathrm{J}^{(s)} \tag{4.5}$$

mentre quella di $B(t)$ è:

$$\sum_{r=1}^{n} \beta_r(t)\mathrm{I}^{(r)} + \sum_{s=1}^{n-1} b_s(t)\mathrm{J}^{(s)} \tag{4.6}$$

e valgono le (1.I), ..., (1.V).

Potrà il sistema (4.3) essere soddisfatto da una $Y(t)$ canonizzata dalla stessa T, cioè essere:

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{Y}(t)\mathrm{T} = \sum_{r=1}^{n} \eta_r(t)\mathrm{I}^{(r)} + \sum_{s=1}^{s=1} c_s(t)\mathrm{J}^{(s)} \tag{4.7}$$

permutabile con $A(t)$ e $B(t)$ in tutta l'epoca?

Tenendo presente come si formano le parti principali e complementari della somma e del prodotto di due matrici pemutabili, il problema proposto si traduce nelle seguenti equazioni differenziali lineari scalari:

$$\frac{d\eta_r}{dt} = \alpha_r\eta_r + \beta_r\,; \qquad r = 1,\, 2, \dots,\, n \tag{4.8}$$

$$\frac{dc_s}{dt} = \alpha_s c_s + (a_s\eta_{s+1} + b_s) = \alpha_{s+1}c_s + (a_s\eta_s + b_s)\,;\ s = 1,\, 2, \dots,\, n-1 \tag{4.9}$$

con l'aggiunta delle condizioni:

$$\alpha_s c_s + a_s\eta_{s+1} = a_s\eta_s + \alpha_{s+1}c_s\,; \qquad s = 1,\, 2, \dots,\, n-1 \tag{4.1}$$

$$a_{s+1}c_s = a_s c_{s+1}\,; \qquad b_{s+1}c_s = b_s c_{s+1}\,; \qquad s = 1,\, 2, \dots,\, n-2 \tag{4.11.}$$

La compatibilità di queste equazioni è assicurata dalla permutabilità delle matrici $A(t)$, $B(t)$ fra loro e con $Y(t)$; ma la esistenza di $Y(t)$, cioè la compatibilità dei sistemi (4.8)-(4.9) fra loro e con le condizioni di commutabilità non può supporsi a priori. L'appartenenza di $A(t)$, $B(t)$ ad una stessa quasi-algebra normale e definita e la completezza di essa assicurano senz'altro l'esistenza di una $Y(t)$ soddisfacente alle condizioni volute.