Adriano Barlotti

Un'osservazione sulle proprietà che caratterizzano un piano grafico finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.4, p. 394–398.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_4_394_0>

Un'osservazione sulle proprietà che caratterizzano un piano grafico finito

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze) (*) (**)

Sunto. - *Si ricercano dei sistemi minimi di condizioni a cui deve soddisfare una struttura, costituita di punti e di rette collegati mediante una relazione di incidenza, affinchè sia un piano grafico finito di ordine* n.

1. Consideriamo una struttura $\mathcal{S}$ costituita da due insiemi disgiunti $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{R}$, i cui elementi chiamiamo rispettivamente punti e rette, e da una relazione di incidenza definita in $\mathcal{P}\times\mathcal{R}$.

Se $\mathcal{S}$ è un piano grafico finito non degenere di ordine n è noto che sussistono le seguenti proprietà:

1) $\mathcal{R}$ contiene n^2+n+1 rette;
2) in $\mathcal{P}$ vi sono n^2+n+1 punti;
3) ogni retta contiene $n+1$ punti;
4) per ogni punto passano $n+1$ rette;
5) vi è una e una sola retta per due punti distinti;
6) due rette distinte si intersecano in uno e un solo punto.

Viceversa se in una struttura $\mathcal{S}$ valgono le proposizioni 1), ..., 6) con $n\geq 2$ questa è un piano grafico non degenere. Le sei proprietà elencate non sono però tutte indipendenti per la $\mathcal{S}$, cioè da alcune di esse seguono necessariamente le rimanenti.

Un sottoinsieme del sistema 1), ..., 6) lo chiameremo un sistema *completo* quando è sufficiente ad assicurare che una eventuale struttura $\mathcal{S}$ per cui valgono le proprietà in esso elencate è un piano grafico, cioè quando le proposizioni di esso sono tali che se valgono per la $\mathcal{S}$ sussistono in questa anche tutte le rimanenti. Un sistema completo lo diremo *minimo* quando nessun suo sottoinsieme proprio è completo. In questa nota ci proponiamo di ricercare tutti i sottoinsiemi completi minimi del sistema 1), ..., 6).

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 20 novembre 1962.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca matematica n.8 del C. N. R.

Nel seguito per indicare il sistema 1), ... , 6) useremo la seguente matrice

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

nella quale in ciascuna colonna si trovano i numeri corrispondenti a due proposizioni duali l'una dell'altra. I sottoinsiemi che si ottengono dal sistema (1) sopprimendo alcune delle sei proprietà li indicheremo con la stessa matrice (1) nella quale è posta una linea al posto del numero che corrisponde alla proposizione soppressa.

Ê noto che il sistema

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

e quello « duale », cioè quello costituito dalle proprièțà duali, sono sistemi completi minimi ([1]). Oltre questi vi sono solo altri quattro sistemi completi minimi, e cioè i due:

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - \\ - & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix},$$

e i loro duali. Se facciamo inoltre l'ipotesi che $\mathfrak{S}$ non sia vuoto risultano completi e minimi anche il sistema

$$\begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ - & 4 & - \end{pmatrix}$$

e il suo duale.

Osserviamo infine che anche il sistema

$$\begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ - & - & 6 \end{pmatrix}$$

è completo qualora si aggiunga il postulato « *esistono almeno due rette distinte* ». Lo stesso naturalmente vale per le proposizioni duali.

2. Proviamo che il sistema

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} 1 & - & - \\ - & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

([1]) Cfr., M. Hall: *The theory of groups*. New York 1959, pag. 392.

è un sistema completo. Poichè sappiamo già che è completo il sistema (2) basta mostrare che nelle ipotesi che siano soddisfatte le proprietà (3) valgono la 3) e la 5) del n. 1.

Facciamo prima vedere come segua la 3). Se r è una retta di $\mathfrak{S}$, e x è il numero dei suoi punti, vi sono, per la 4), n rette distinte da r uscenti da ciascuno dei suoi x punti, e quindi vi sono nx rette incidenti alla r, tutte distinte in base alla 6). Poichè ogni retta diversa dalla r, per la 6), deve incontrare la r, tenendo conto della 1) si ha $nx = n^2 + n$, da dove segue $x = n + 1$, cioè la 3).

Per provare la 5) si osservi che, presi due qualunque punti distinti, P e Q, la 6) dice che non vi possono essere due rette distinte contenenti P e Q; e una retta almeno esiste, poichè in caso contrario su una retta per P si troverebbero oltre P almeno $n + 1$ punti (le intersezioni con le $n+1$ rette per Q) e ciò andrebbe contro la 3). È quindi provato che il sistema (3) è completo.

3. Passiamo ad esaminare il sistema

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix}.$$

In tal caso si prova che le proprietà ammesse portano come conseguenza la validità della 4). Per questo si osservi in primo luogo che per nessun punto possono passare più di $n + 1$ rette, poichè altrimenti per la 3) e la 6) i punti sarebbero più di quanti ne indichi la 2). Detta poi r una retta di $\mathfrak{S}$, a questa, per la 3), appartengono $n + 1$ punti, che indicheremo con P_1, P_2, ... P_{n+1}, Se x_i è il numero delle rette diverse da r uscenti da $P_i (i = 1, \ldots$. $n + 1)$, si ha, per quanto si è visto, $x_i \leq n$. D'altra parte, in base alla 6), ogni retta di $\mathfrak{S}$ diversa da r esce da uno ed uno solo dei punti $P_i (i = 1, \ldots, n + 1)$. Si ha quindi, tenuto conto della 1),

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = n^2 + n.$$

D'altra parte, da $x_i \leq n$ segue

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq n^2 + n,$$

e in questa il segno uguale può valere se e solo se $x_i = n$ per ogni i $(i = 1, \ldots, n + 1)$. Resta così provato che da ogni punto di r escono $n + 1$ rette. Data la genericità della r, vale la 4), e poichè il duale del sistema (2) è completo, resta provata la completezza di (4) e del suo duale.

4. Proviamo ora, nell'ipotesi che $\mathfrak{S}$ non sia l'insieme vuoto, la completezza del sistema

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ - & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Se P è un punto di $\mathfrak{S}$, ogni altro punto di $\mathfrak{S}$, per la 5), deve stare su una ed una sola retta per P. Poichè in base alla 4) per P passano $n+1$ rette, e, per la 3), ciascuna di queste contiene n punti oltre P, si ha che $\mathfrak{S}$ contiene esattamente $n(n+1)+1 = n^2+n+1$ punti, e quindi vale la 2).

Si ricade così nel duale del caso esaminato nel n. 2, e quindi anche il sistema (5) è completo. Naturalmente altrettanto si può dire per il suo duale.

Mostriamo infine la completezza del sistema

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ - & - & 6 \end{pmatrix}$$

nell'ipotesi che $\mathfrak{S}$ contenga almeno due rette distinte.

Diciamo r ed s le due rette ed A la loro intersezione. Per la 3) e la 5) si riconosce che da ogni punto di r (o di s) distinto da A escono $n+1$ rette. Successivamente servendosi di una di queste rette non passante per A si vede che la cosa è vera anche per A e infine per ogni punto di $\mathfrak{S}$. Vale allora la 4) e se ne deduce che il sistema (6) è completo.

5. Mostriamo ora, con dei semplici esempi, che non sono completi i seguenti sistemi:

$$(7) \qquad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ - & - & 6 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & - & 5 \\ - & 4 & - \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ - & 4 & 6 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ 2 & 4 & - \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & - & 5 \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix}, & \end{matrix}$$

e quindi anche i loro duali.

Quando si sia provato ciò risulta che gli unici sistemi completi minimi sono quelli elencati nel n. 1. Infatti l'esame dei diversi sottoinsiemi che si ottengono sopprimendo qualche elemento della matrice (1) mostra che questi o contengono gli elementi corrispondenti ai sistemi completi determinati, e quindi sono a loro volta completi oppure sono tali che i loro elementi sono contenuti in uno dei sistemi (7) e quindi non sono completi. Che i sistemi indicati nel n. 1 sono *minimi* si vede osservando che ogni loro sottoinsieme è formato da proposizioni contenute in uno dei sistemi (7).

Per riconoscere che il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ - & - & 6 \end{pmatrix}$$

non è completo basta considerare la struttura $\mathfrak{S}$ formata da n^2+n+1 rette per un punto P, con le ipotesi che su ciascuna retta vi siano n punti oltre P e che due rette non si intersechino fuori di P.

Anche il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & - & 5 \\ - & 4 & - \end{pmatrix}$$

non è completo. Non c'è nessuna proprietà che postuli l'esistenza di punti; e può servire come esempio di struttura che non è un piano grafico e per cui valgono le proposizioni in questione la struttura $\mathfrak{S}$ formata da n^2+n+1 rette e zero punti, oppure l'altra contenente due soli punti, A e B, la retta AB, altre $2n$ rette, passanti n per A e n per B, e infine n^2-n rette prive di punti.

L'insieme vuoto è una struttura in cui valgono le proposizioni

$$\begin{pmatrix} - & 3 & 5 \\ - & 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

e quindi il sistema di queste non è completo. Abbiamo visto nel n. 4 con quali ulteriori ipotesi segua la completezza dei sistemi formati con tre delle proposizioni che costituiscono il sistema (8). La struttura $\mathfrak{S}$ formata da una retta e da $n+1$ punti su essa fornisce un esempio che mostra come il sistema (6), non sia completo. anche nell'ipotesi che $\mathfrak{S}$ non sia l'insieme vuoto.

Passiamo ora al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ 2 & 4 & - \end{pmatrix}.$$

Una struttura $\mathfrak{S}$ in cui valgono le proposizioni ora indicate e non tutte le (1) si ottiene nel seguente modo. Prendiamo un qualsiasi piano grafico finito, π, e siano A e B due suoi punti ed a e b due sue rette per i quali risulti $A \in a$, $A \notin b$, $B \notin a$, $B \in b$. Modifichiamo π cancellando A dalla a e aggiungendo B ai punti di questa, e sopprimendo B dalla b e facendo passare questa retta per A. Consideriamo invece inalterate tutte le altre appartenenze di π. È chiaro che per la $\mathfrak{S}$ così costruita non valgono la 5) e la 6), e quindi essa non è un piano grafico.

Resta ancora da considerare il sistema delle proposizioni

$$\begin{pmatrix} 1 & - & 5 \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix}.$$

Una struttura in cui valgono queste, e non le (1), si ottiene considerando n^2+n+1 rette per un punto P e supponendo che su una di queste si trovino n^2+n punti oltre P.