Recensioni.

* Léon Auger, Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval, (1602-1675), Paris, 1962 (Mario Gliozzi)
* Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica, tenuto a Torino nei giorni 24-27 maggio 1961 (Dionisio Gallarati)
* E. N. David, E. S. Pearson, Elementary Statistical Exercises, Cambridge University Press, 1961 (Luigi Gatteschi)
* E. H. Lockwood, A book of curves, Cambridge University Press, 1961 (Luigi Gatteschi)
* T. Eastermann, Complex numbers and funtions, The Athlone Press, London, 1962 (Luigi Gatteschi)
* Premier Congrés de l'Association Française de Calcul, Afcal. Grenoble, Gauthier-Villars, Paris, 1961 (E. Aparo)
* L. E. Elsgolc, Calculus of variations, Pergamon Press, 1961 (Antonio Pignedoli)
* Evandro Agazzi, Introduzione ai problemi dell'Assiomatica, Soc. Ed. Vita e Pensiero, Milano, 1961 (Ludovico Geymonat)
* I. M. Yaglom, Geometric trasformations, Random House, 1962 (Enrico Bompiani)
* Tracy Y. Thomas, Plastic Folw and Fracture in Solids, Academie Press, New York-London, 1961 (Antonio Pignedoli)
* H. Cramèr, Random Variables and Probability Distributions, Cambridge University Press, 1962 (Bruno de Finetti)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **17** (1962), n.4, p. 399–412.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1962_3_17_4_399_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1962.

RECENSIONI

LÉON AUGER, *Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval*, (1602-1675), Paris 1962, pp. 214, 15 NF.

Un lavoro d'insieme sulla vita e le opere di Roberval, che fu uno scienziato del circolo Mersenne ben noto ai suoi tempi, non fu ancora tentato, a nostra conoscenza, onde questo lavoro ha indubbiamente un notevole interesse. Esso analizza l'opera di Roberval come matematico, come astronomo, come fisico, come filosofo, come insegnante, come accademico, giungendo alla conclusione generale che Roberval fu « un mathématicien doublé d'un expérimentateur d'une remarquable habilité ».

Ma è difficile stabilire quale sia la parte originale della sua opera e quale influenza abbia potuto esercitare nell'evoluzione scientifica del tumultuoso periodo in cui visse, perché le sue opere, tutte senza data — tranne due brevi scritti di meccanica e d'astronomia di modesta importanza — furono pubblicate postume nel 1693. Roberval non divulgava, anzi teneva gelosamente segreti i risultati scientifici cui perveniva, per poter prevalere nel concorso, rinnovato ogni triennio, alla cattedra Ramus al Collegio reale di Francia, che egli riuscì a conservare dal 1634 alla morte.

Nelle sue opere di matematica, analizzate in questo volume, Roberval impiega gli « indivisibili » con un metodo molto vicino a quello di B. Cavalieri. Osserviamo, però, che la data d'invenzione degli indivisibili da parte di Cavalieri non è, come l'A. dice sulla fede di Rouse Ball e Max Marie, il 1629, ma anteriore di parecchi anni. C'è una lettera di Cavalieri a Galileo del 15 dicembre 1621 (*Opere* di Galileo Galilei, Ediz. Naz., XIII, p. 81s) nella quale Cavalieri espone i concetti fondamentali della teoria degli indivisibili, ed è certo (Ibid., XIII, p. 381) che fin dal novembre 1627 Cavalieri aveva completato l'opera pubblicata nel 1635, *Geometria indivisibilibus*, presentata manoscritta nel 1629 come titolo alla richiesta della cattedra di matematica di Bologna. Ammessa, dunque, per buona la pretesa di Roberval di avere utilizzato gli indivisibili fin dal 1630, egli li avrà trovati non soltanto ispirandosi all'opera di Archimede, come dichiara in una lettera a Torricelli del 1647, ma anche a qualche notizia avuta sul metodo di Cavalieri.

Se, dunque, è quasi certamente infondata la pretesa di originalità vantata da Roberval nella scoperta degli indivisibili, gli storici sono quasi tutti concordi nell'attribuire a lui il merito di aver quadrato per primo la cicloide, mentre la polemica di priorità con Torricelli circa il merito di costruire le tangenti ad una curva piana si può forse oggi chiudere convenendo con l'A. « qu'on ne peut guère accuser l'un et l'autre de plagiat ».

Ma forse lo scopo fondamentale di questo studio è di presentare Roberval come fisico, di sottolineare la sua « prodigeuse habilité expérimentale », che si sarebbe specialmente manifestata nel corso dei suoi lavori sull'esperimento torricelliano. L'A. segue C. de Waard (*L'expérience barométrique, ses antécédents et ses explications*, Thouars, 1936) nell'esposizione della storia dell'esperienza torricelliana. De Waard la fa discendere da una presunta esperienza eseguita da Gaspari Berti a Roma nel 1640 o 1641, mentre probabilmente essa fu ispirata da una lettera del 24 ottobre 1630 di Giovanbattista Baliani a Galileo. Comunque, ci sembra che l'A. esageri alquanto i meriti di Roberval nel far accettare agli scienziati del tempo la teoria torricelliana sulla pressione atmosferica, anche se a Roberval va il merito dell'esperienza detta del « vuoto nel vuoto », che altri attribuisce al giovane Auzout.

L'A. analizza accuratamente i contributi di Roberval alla meccanica — concetto di forza, centri di gravità, questioni di idraulica (e in questa parte della trattazione segnaliamo una svista: Carlo Renaldini non poteva divenire membro dell'Accademia del Cimento nel 1649, dal momento che l'Accademia del Cimento fu fondata nel 1657) — culminati nella costruzione della famosa bilancia che porta il suo nome, presentata all'Accademia delle scienze di Parigi il 21 agosto 1669. Anzi, l'A., che per la redazione di questo lavoro ha utilizzato non soltanto le opere edite di Roberval ma anche i manoscritti inediti conservati nella biblioteca nazionale e nella biblioteca dell'Accademia delle scienze di Parigi, ha pubblicato in appendice l'inedita descrizione della bilancia, letta da Roberval all'Accademia delle scienze.

Molto utili ci sembrano anche gli altri due documenti inediti pubblicati in appendice e tratti anch'essi dagli atti dell'Accademia delle scienze di Parigi: un'interessante discussione sulla gravità svoltasi nell'Accademia delle scienze in più sedute nel corso dell'estate 1669 e l'inventario dei manoscritti trovati alla morte di Roberval nel suo studio.

MARIO GLIOZZI

Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica, tenuto a Torino nei giorni 24-27 maggio 1961.

Il volume raccoglie i testi delle conferenze tenute durante il Convegno di Geometria Algebrica che ha avuto luogo a Torino nei giorni 24-27 maggio 1961, presso l'Istituto di Geometria dell'Università. Manca soltanto il testo della conferenza del prof. E. Kaehler: « *Aritmetica infinitesimale* »: essa sarà invece pubblicata nel volume successivo dei Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino. Aprono il volume un messaggio del compianto prof. F. Severi ed il discorso inaugurale del prof A. Terracini.

Ed ecco l'elenco delle conferenze:

B. Segre, *Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica.* Il problema principale di cui B. Segre si occupa è quello di determinare il numero delle condizioni linearmente indipendenti imposte alle forme di un sistema lineare di forme di S_r dal passaggio per punti dati con molteplicità assegnate. Numerosi i risultati, parzialmente inediti. Seguono alcune considerazioni di Geometria di Galois.

B. L. van der Waerden, *Invariants birationnels.* L'A. mostra come si possano ottenere degli invarianti birazionali di una varietà algebrica V ricorrendo a tensori ovunque finiti su V, oppure alla considerazione di sistemi lineari completi di divisori.

M. Baldassarri, *Sulla struttura dei fasci lisci.* Sia V una varietà quasi proiettiva (cioè sottoinsieme localmente chiuso di uno spazio proiettivo) e sia U un aperto di V tale che *codim* $(V - U) > 1$. Si pone il problema di riconoscere quando le sezioni su U di un fascio coerente senza torsione dato in V si possano prolungare a tutta V.

A. Andreotti ed E. Vesentini, *Un teorema d'annullamento della coomologia.* Conferenza dedicata ad una estensione alle varietà complesse non compatte del teorema di Kodaira secondo il quale ogni varietà complessa compatta, dotata di metrica kaehleriana a periodi interi è una varietà algebrica proiettiva. A tale scopo gli A.A. stabiliscono un criterio (che nel caso compatto coincide con quello di Kodaira - Akizuki - Nakano) per l'annullarsi dell'immagine naturale della coomologia a supporti compatti in quella a supporti chiusi.

L. Godeaux, *Costruzione di superficie algebriche irregolari.* Esposizione di risultati, in parte nuovi, relativi alle superficie irregolari che sono immagini di involuzioni appartenenti alla superficie delle coppie non ordinate di punti di una curva algebrica.

P. Samuel, *Le théorème de Hahn-Banach en Géométrie Algébrique.* Siano V, V' varietà algebriche, $f: V' \to V$ un morfismo, G il gruppo dei divisori su V senza componenti che contengono $f(V')$: l'A. si occupa del problema della ricerca delle immagini reciproche dei divisori $X \in G$.

L. Roth, *Alcune applicazioni della varietà di Picard.* Proprietà fondamentali della varietà V_q di Picard; sottovarietà di V_q; varietà canoniche di V_q. Varietà pseudo-abeliane. Applicazioni alle varietà di irregolarità superficiale $q > 0$.

G. Dantoni, *Ideali e varietà algebriche.* Proprietà di natura reticolare degli ideali di un anello noetheriano con applicazioni a certe corrispondenze tra ideali. Considerazioni sul modo di porre una definizione generale di varietà algebrica.

O. Zariski, *On the superabundance of the complete linear systems* $|nD|$ *(n-large) for an arbitrary divisor D on an algebraic surface.* Sia F una superficie irriducibile non singolare definita sopra un campo di caratteristica qualunque, e sia $D = \Sigma \lambda_i D_i$ un divisore effettivo di F (il caso generale si riconduce al caso di un ciclo effettivo): l'A. studia la dimensione del sistema lineare completo $|nD|$ come funzione di n, per n sufficientemente elevato. Premette allo scopo alcuni interessanti risultati sopra i sistemi lineari di divisori d'una varietà algebrica.

P. Dolbeault, *Une généralisation de la notion de diviseur.* Se V è una varietà algebrica, data sul campo complesso, è noto (Lefschetz - Hodge) che condizione necessaria e sufficiente perchè una classe di coomologia intera di grado 2 provenga da un divisore di V è che essa sia di tipo (1,1). Generalizzando opportunamente la nozione di divisore si riesce ad estendere questo risultato ad ogni varietà complessa.

P. Dubreil, *Idéaux de polynomes et fonction de Hilbert.* Determinazione della dimensione coomologica di un ideale omogeneo, ed applicazioni.

W. Gröbner, *Applicazioni delle serie di Lie nella geometria algebrica.* L'A. mostra come l'impiego delle serie di Lie possa riuscire utile nel problema di esprimere le soluzioni di un sistema di equazioni algebriche in funzione di parametri opportuni.

V. E. Galafassi, *Omeomorfismi algebrici tra piani reali e questioni collegate.* Esposizione di nuovi risultati sulle corrispondenze algebriche tra piani proiettivi le quali risultano, nel campo reale, biunivoche senza eccezioni, e sopra i piani grafici algebrici reali.

P. Burniat, *Varietà algebriche V_3 con $P_q = P_a = 0$ e P_2 qualunque.* Per tutti i valori di $P_2 \geq 2$ esistono V_3 algebriche con $P_q = P_a = 0$ e sistema bicanonico composto con le superficie di un fascio lineare |F| di superficie regolari. Se $P_2 \geq 3$ ne esistono con sistema bicanonico irriducibile.

U. Morin, *Risoluzione geometrica di problemi di analisi diofantea di grado superiore.* Alcuni risultati di analisi diofantea di grado $n \geq 4$, collegati con questioni di unirazionalità di ipersuperficie algebriche di S_r.

DIONISIO GALLARATI

E. N. DAVID & E. S. PEARSON, *Elementary Statistical Exercises*, Cambridge University Press, 1961, pp. VIII + 108, 13 s. 6 d.

È una raccolta degli esercizi più significativi assegnati durante un quarto di secolo agli allievi dei corsi di Statistica dell'University College di Londra.

Gli esercizi, che nel loro enunciato contengono spesso interessanti dati statistici, non sono svolti, ma ne è data la soluzione alla fine del volumetto. Indicazioni bibliografiche e brevi, ma sufficienti richiami di teoria accompagnano ogni gruppo di esercizi.

LUIGI GATTESCHI

E. H. LOCKWOOD, *A book of curves*, Cambridge University Press, 1961, pp. XI + 199, 25 s.

Si tratta di un bellissimo volume, a livello elementare, nel quale sono descritti alcuni metodi per tracciare le curve piane, a cominciare dalle coniche per finire a varie curve trascendenti.

Di ogni curva studiata vengono date, spesso senza dimostrazione, le principali proprietà accompagnate da interessanti notizie storiche. Molte belle figure, delle quali 25 a piena pagina, rendono ancora più attraente il volume.

LUIGI GATTESCHI

T. ESTERMANN, *Complex numbers and functions*, The Athlone Press London, 1962, pp. 250, 42 s.

Il volume è dedicato, come dichiara l'A. nella prefazione, agli studenti universitari dei corsi (semestrali) di teoria delle funzioni di una variabile complessa.

Esso consta di 23 brevi capitoli dei quali i primi cinque, che si possono considerare come introduttivi, trattano argomenti che nelle nostre Università vengono svolti nei corsi di Analisi del primo biennio: Numeri complessi - successioni e serie - elementi di teoria degli insiemi - funzioni - l esponenziale, il logaritmo e le funzioni circolari nel campo complesso.

Nei successivi capitoli sono esposti i concetti basilari ed i teoremi fondamentali della teoria delle funzioni analitiche: le equazioni di Cauchy-Riemann - il teorema di Cauchy - la formula integrale di Cauchy - gli sviluppi di Taylor e di Laurent - il calcolo dei residui - il prolungamento analitico - la funzione gamma - il teorema di Picard. Vari esercizi, dei quali alcuni molto facili ma ben scelti, accompagnano ogni capitoletto.

L'esposizione è chiara e nello stesso tempo rigorosa, ed il volume è altamente consigliabile ai tecnici che vogliano rapidamente impadronirsi di questo importante ramo delle Matematiche.

LUIGI GATTESCHI

Premier Congrès de l'Association Française de Calcul, Afcal. Grenoble 14-15-16 Septembre 1960, Ed., GAUTHIER-VILLARS, Paris, 1961, pp. 488.

Introduzione.

L'Associazione Francese di Calcolo fu costituita nel 1957, allo scopo di rafforzare i legami fra i ricercatori in Analisi Numerica, le società che utilizzano calcolatrici elettroniche, e quelle che costruiscono tali macchine. Il presente volume raccoglie i rendiconti del 1° congresso dell'Associazione, tenutasi a Grenoble nel settembre 1960.

Gli argomenti sono suddivisi in otto sezioni, che qui elenchiamo:

1) Analisi numerica (11 note); 2) Teoria degli errori (4 note); 3) Struttura delle macchine (6 note); 4) Programmazione automatica (5 note) e logiche esterne; 5) Traduzione e documentazione automatica (5 note); 6) Programmazione (5 note); 7) Uso delle calcolatrici nei problemi di gestione, ricerca operativa, applicazioni industriali (12 note); 8) Problemi generali (3 note).

Le varie esposizioni sono state seguite da una discussione, riportata sommariamente nel volume.

Diamo un cenno al contenuto di quelle note che ci sono sembrate particolarmente interessanti.

1 - *Analisi Numerica.*

Una nota, di J. C. Herz, tratta dal problema della migliore approssimazione razionale di una funzione reale su un intervallo, mediante un algoritmo di De La Vallée-Poussin.

L'esperienza non sembra dare risultati troppo soddisfacenti. Due lavori, l'uno di P. J. Laurent e l'altro di F. Ceschino, sono dedicati all'integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie, rispettivamente mediante procedimenti del tipo di Runge-Kutta e mediante formule di predizione e correzione.

Questioni di stabilità relative a formule di integrazione numerica a passi separati e a passi legati formano l'oggetto di una nota di Guillou e Lago.

La nota di Fox « Some comments on the accuracy and convenience of finite-difference processes in automatic computation » riespone in forma elementare utili considerazioni su un corretto impiego di estrapolazioni nella integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali mediante differenze finite.

Nella conferma di Durand, dedicata al calcolo degli autovalori e degli autovettori di una matrice A, si propone la risoluzione mediante il metodo di Newton del sistema di equazioni algebriche non lineari $(A - \lambda E) X = 0$ nelle incognite $(\lambda, x_1, x_2, \ldots x_n)$, seguita da una deflazione al modo di Wielandt.

« *Les methodes d'approximation des racines d'une équation et d'un système d'équations de formes non déterminées* », è il titolo della conferenza di A. Korganoff, dedicato ad una pregevole sintesi di vari metodi più o meno noti per il calcolo delle radici di una equazione e a una loro estensione alla risoluzione di sistemi di equazioni (metodo di Schröder, metodo di König, serie di Lidstone).

2 - *Teoria degli errori.*

Un problema di gravimetria dà lo spunto per una nota di La Porte intitolata « Procédé mathématique d'interpolation ». Si tratta di una interpolazione mediante minimi quadrati ponderati per una funzione di due variabili, conoscendo i valori di essa in punti non situati in modo regolare.

Nella nota di Braffort e Larisse, « La diffusion des erreurs en analyse numérique, étude d'un modèle stochastique et applications à. quelques cas particuliers », si propone lo studio degli algoritmi che operano sull'informazione, dal punto di vista della teoria dei graph. A sua volta, un graph potrà essere trattato come valore medio di un processo descritto da un'equazione stocastica differenziale o a differenze finite. N. Gastinel propone, sotto il titolo un pò troppo impegnativo di « Le principe de simulation d'operations ... », l'uso successivo di sottoprogrammi per le operazioni elementari a virgola fissa o mobile, aventi differenti livelli di precisione, così da poter esaminare su base sperimentale la perdita di cifre nel corso di un calcolo. Segue uno studio sull'influenza della scelta dei « perni » nella risoluzione dei sistemi di equazioni lineari algebriche mediante metodi di decomposizione triangolare, ripreso da un punto di vista diverso nella nota successiva, di F. L. Bauer.

Secondo l'esperienza dell'autore, la scelta « gaussiana » del perno di modulo massimo può avere scarsa importanza per certe classi di matrici che si incontrano frequentemente.

3 - *Struttura delle macchine.*

La nota di Morton Nadler « An active memory for information processing machines », illustra un tipo di memoria « associativa » e propone un sistema di « unità associative locali di controllo » e di « unità combinatorie locali di controllo » che consentano un indirizzamento e prelievo di informazioni in modo largamente indipendente dall'unità centrale di controllo Fra le note seguenti ne troviamo due destinate a calcolatrici « a tempo reale », capaci di essere inserite in un impianto produttivo completamente automatizzato (B. Fournier e Michard, J. Gaudfernau).

Una calcolatrice analogica (L'analyseur différentiel à réseau Delta 600) destinata in particolare alla risoluzione di problemi ai limiti per equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico e parabolico e descritta da J. Girerd e A. Riotte. Chiude questa sezione un articolo di S Herrstrom dedicato alla struttura logica di una macchina specialmente destinata alla gestione commerciale (Sistema S.E.A. 3900)

4 - *Programmazione automatica e logiche esterne* [1].

D. Starynkevitch descrive un linguaggio di programmazione automatica (sistema PAF) adatto alla calcolatrice CAB 500, di media capacità.

J. Legras, tratta di un programma interpretativo adatto al calcolo di reti elettriche (FLEC), da impiegare sulla calcolatrice IBM 650. Per questa stessa macchina viene mostrato un'altra programmazione di un tipo intermedio fra il FLAIR e il FORTRAN, dovuta a M.me *Crehange.*

Troviamo infine ancora un articolo su un linguaggio di programmazione automatica: il P.I.A.S. (autore: M. Dreyfus).

5 - *Traduzione e documentazione automatica.*

Questa sezione è forse quella che presenta maggiore interesse. L'articolo di Y. Lecerf e A. Leroy, sviluppa un metodo di automazione della analisi dei documenti, basata sull'uso di diagrammi di Tesnière e di Chomsky e sull'idea di « programmi di conflitto » dovuta al Lecerf. La nota « modelli aritmetici per la soluzione di problemi di polisemia mediante indici semantici » di R. Tabory, tratta di una questione importante sia per la traduzione automatica che per la documentazione (il metodo ha trovato fra l'altro, impiego in questioni di tassonomia chimica).

I due lavori successivi sono dovuti rispettivamente a B. Vauquois e ad A. Sestier, direttori delle due sezioni, di Grenoble e Parigi, del C.E.T.A (Centre Etudes Traduction Automatique). Il primo tratta con grande chiarezza il problema della sostituzione di un linguaggio formalizzato L' a un linguaggio naturale L, così da studiare la costruzione di algoritmi per la traduzione $L'_1 \rightarrow L'_2$ « approssimante » la traduzione $L_1 \rightarrow L_2$ da un linguaggio naturale all'altro. In particolare viene effettuato uno studio morfologico della lingua russa. Va rilevato l'uso nel testo di una metalingua simile a quella adoperata nella descrizione dell'ALGOL, uso che appare altamente consigliabile. Il secondo, nella sua nota « Contribution a una théorie ensembliste des classifications linguistiques » descrive le relazioni esistenti fra tre classificazioni diverse delle parole in base ai differenti contesti, e vuol mostrare come la sola classificazione veramente utile e comoda abbia una struttura di insieme parzialmente ordinato, e non di reticolo. Nella sua conferenza « il problema del riconoscimento automatico delle strutture grammaticali » L. Dupuis formula varie critiche all'uso di un punto di vista strettamente formale nella traduzione automatica, e invita a un accurato studio di fatti sperimentali, da tenere presente per la costruzione di un modello aderente alla realtà più che sia possibile.

6 - *Programmazione*

Alcune di queste note avrebbero forse trovato altrettanto bene posto in sezioni precedenti. Una di esse descrive un sistema di ordini iniziali per la calcolatrice « Dorotea », già considerata nell'articolo di Fournier e Michard menzionata nella sezione 2. È dovuta a H Boucher. Un'altra (M. Woodger) tratta di un modo di operare su matrici in uso sulla calcolatrice DEUCE a Teddington presso il National Physical Laboratory. Una terza, di M. Vatier, svolge considerazioni elementari su un modo di disporre una successione finita di elementi in un ordine prescritto.

[1] A pag 251 del volume: « in logica esterna, la colcolatrice interpreta l'istruzione e la esegue ; in autoprogrammazione, crea un programma in linguaggio macchina

7 - *Uso delle calcolatrici nei problemi della gestione, ricerca operativa, applicazioni industriali.*

« Alcuni problemi posti dalla riorganizzazione del trattamento automatico delle informazioni presso la S.N.C.F. » è il titolo di un conferenza di B. H De Fontgalland. La creazione di un organismo centrale dotato di una grande calcolatrice elettronica, presso una società statale come quella delle ferrovie francesi, conduce a uno studio accurato dal punto di vista della ricerca operativa. Il tema viene ripreso più in generale nell'interessante nota di P. Namian « Integrated Data Processing in una Compagnia americana ».

Un problema assai frequentemente incontrato è quello che G. Sandier e M. Simonnard trattano nella conferenza dal titolo « risoluzione su una calcolatrice elettronica di un problema di avvicendamento ». Si cerca un impiego della mano d'opera disponibile che riduca al minimo « tempi morti ». J. M. Gauthier e F. Genuys si uccupano di programmazione lineare con matrici di grandi dimensioni decomposte opportunamente in submatrici, mediante un nuovo algoritmo che si ispira ad alcuni lavori di Dantzig e Wolfe (2). Vengono forniti risultati di esperienze effettuate sulla IBM 704.

Alla programmazione quadratica e a sue applicazioni è dedicato l'articolo di J. Abadie, P. Huard, J. Bernadat, M. Jalabert e P. Galloy. Viene descritto un noto algoritmo di Wolfe e svolte alcune considerazioni originali sulla sua traduzione in programma.

Gli altri articoli della sezione considerano particolari problemi di matematica applicata, in cui intervengono per lo più vari tipi di equazioni a derivate parziali, trattati con metodi di differenze finite. Uno è dedicato al calcolo delle colonne di lavaggio e distillazione (E. Carbonell), tre a problemi di idraulica (R. De Palma e Soubraramayer, J. Meinguet, A. Preismann).

Troviamo inoltre uno studio di schemi di servomeccanismi (J. Pitrat e M.lle Matherion), un lavoro sull'uso di una calcolatrice Gamma E.T. nello spoglio dei dati ricavati mediante una camera a bolle (L. Bosset e F. Salle), ed un articolo su un simulatore per la centrale nucleare E.D.F. 1, di G. Deloux e J. P. Landais.

8 - *Problemi generali.*

Tre conferenze, rispettivamente di P. Vernotte, V. Gold, J. Carteron, chiudono il volume. La prima « Algebra e Psicologia » contiene alcune considerazioni personali sul divario fra analisi classica e tendenza moderna all'algebrizzazione. La seconda « Formazione dei programmatori » espone l'opinione che è preferibile far apprendere ai nuovi venuti l'uso delle calcolatrici elettroniche, mediante lezioni impartite dal personale di un istituto o laboratorio scientifico, piuttosto che inviarli a corsi presso le varie case costruttrici. La maniera di suddividere il corso di programmazione in tre parti: 1) programmazione simbolica; 2) programmazione a virgola fissa; 3) programmazione a virgola mobile, appare piuttosto discutibile, e così la scelta degli argomenti di analisi numerica. La terza, infine, dal titolo « *Problèmes de Liaison et de coordination posés par l'insertion d'un centre de calcul dans une grande entreprise* » descrive l'organizzazione di un servizio di studi matematici presso la Direzione Studi e Ricerche della Electricité de France. Vale la pena di citare il tasso degli investimenti di questo Ente: 300 miliardi l'anno, di cui 70 per la sola rete di distribuzione. Il

(2) A decomposition principle for linear programming. Pubblicazione 1544 della Rand Corp..

servizio studi matematici è articolato in quattro divisioni: una per la gestione e manutenzione delle macchine, dei nastri, carte perforate, ecc., una suddivisa in più sezioni di programmazione, destinate alla statistica, alle equazioni differenziali, e così via, una per ricerche rivolte alle matematiche applicate, ed una per ricerche in matematica pura. Alla data della conferenza, detto servizio comprendeva 100 persone. L'articolo appare di particolare attualità, in questo periodo in cui si riorganizza in Italia l'industria elettrica.

E. APARO

L. E. ELSGOLC, *Calculus of variations*, Pergamon Press, 1961 - vol. di 178 pagine, con 54 figure, prezzo netto 30 scellini.

Il volume fa parte della serie internazionale di monografie di matematica pura ed applicata, della quale sono editori generali I. N. Sneddon, M. Stark ed S. Ulam.

Lo scopo della monografia in questione è quello di rendere familiare agli ingegneri ed agli allievi delle discipline tecniche in genere il Calcolo delle variazioni, nelle sue nozioni di base e nei suoi metodi fondamentali. Ciò con inclusione dei *metodi diretti* di soluzione dei problemi variazionali, di particolare interesse dal punto di vista pratico.

Ogni capitolo è illustrato ed integrato, perciò, da un notevole numero di esercizî.

Dopo una breve introduzione storica, relativa alle origini del Calcolo delle variazioni, viene un primo capitolo concernente il metodo di variazione nella risoluzione dei problemi ad estremi fissi. Si prendono in considerazione i funzionali della forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx;$$

poi i funzionali con derivate di ordine più elevato; indi i funzionali dipendenti da funzioni di più variabili; infine, dopo la rappresentazione parametrica dei problemi variazionali, si passa alle applicazioni. Nel capitolo hanno, naturalmente, particolare rilievo i problemi classici del calcolo variazionale.

Il secondo capitolo è dedicato ai problemi variazionali ad estremi mobili. Vi si considerano i problemi ad estremi mobili per funzionali delle forme rispettive:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx, \quad \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx;$$

ed alcuni altri problemi, per esempio quello delle estremali dotate di cuspidi.

Il terzo capitolo concerne le condizioni sufficienti per l'esistenza di un estremo; il quarto è dedicato ai problemi con estremi vincolati.

Il quinto ed ultimo capitolo del volume tratta dei metodi diretti per la risoluzione dei problemi variazionali.

Da notare che, alla fine del volume stesso, sono riportate le soluzioni degli utili problemi proposti nei varî capitoli. L'esposizione della materia è snella e chiara. Bella la veste tipografica.

ANTONIO PIGNEDOLI

EVANDRO AGAZZI, *Introduzione ai problemi dell'Assiomatica.* (Soc. Ed. Vita e Pensiero, Milano 1961. Pubblicazioni dell'Università Cattolica del Sacro Cuore),

Trattasi di un'opera veramente utile, che si propone, attraverso considerazioni storico-critiche, di agevolare agli studiosi italiani (matematici e filosofi) l'esatta comprensione dei più ardui problemi dell'Assiomatica moderna, in particolare di quelli connessi al celebre Teorema di Gödel. Lo scopo viene pienamente raggiunto con una paziente e quasi fin troppo minuziosa chiarificazione di tutti i concetti, che si direbbe consapevolmente diretta a sciogliere i dubbi e le perplessità di chi affronta per la prima volta il delicato argomento.

Essa è divisa in due parti, la prima dedicata a spiegare le *Problematiche generali* suscitate dall'Assiomatica moderna, la seconda a chiarire il senso preciso del Teorema di Gödel e il tipo di argomentazione su cui esso si basa L'opera si conclude con un'utilissima appendice, costituita dalla traduzione della fondamentale Memoria in cui Gödel per la prima volta espose i propri risultati (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1931).

L'A. prende le mosse dalla distinzione fra aspetto sintattico e aspetto semantico delle dimostrazioni, passando poi a delineare le differenze fra Assiomatica moderna e Assiomatica classica. Da esse si ricava che il problema centrale per l'Assiomatica moderna risulta quello della coerenza. All'inizio questo venne affrontato con il cosiddetto metodo indiretto, consistente nel verificare la compatibilità di un sistema di assiomi costruendone un opportuno modello entro un altro sistema, presupposto coerente. A nessuno sfugge però, osserva l'A., « la debolezza logica di un simile modo di procedere; attraverso simili 'scaricamenti' di responsabilità, infatti, il problema risulta semplicemente spostato, anzichè risolto ». Proprio da questa constatazione scaturì il famoso « programma hilbertiano ».

Riconosciuta l'indubbia solidarietà fra teoria degli insiemi, analisi e aritmetica elementare, Hilbert articolò il suo programma in due parti: ricerca di una prova diretta della coerenza dell'aritmetica elementare, e successiva ricerca di una via che permetta — partendo dalla coerenza dell'aritmetica elementare — di fondare con sicurezza anche la teoria degli insiemi e l'analisi infinitesimale. Come è noto, il teorema di Gödel ha segnato il fallimeno di questo programma. Per capire esattamente il senso di questo fallimento, occorre però capire innanzi tutto il metodo, con cui Hilbert sperava di raggiungere una prova diretta della coerenza dell'aritmetica elementare. L'esposizione critica di tale metodo è il tema centrale della prima parte dell'opera che stiamo esaminando

Le premesse necessarie per questa esposizione sono: la distinzione fra teoria e metateoria, la nozione di sistema formale puro e quella di interpretazione, i cosiddetti metodi finitistici, ecc., argomenti tutti che l'A. analizza con scrupolo e rigore encomiabili. Sulla base di tali strumenti egli affronta poi l'esame di un particolare sistema formale (il calcolo degli enunciati), e non ha difficoltà a mostrare — seguendo i lavori della scuola hilbertiana — che i metodi finitistici prescritti da Hilbert riescono effettivamente a fornire una prova « assoluta » e diretta della coerenza di tale sistema. Di qui la domanda: « è possibile estendere la validità dei processi 'assoluti', impiegati per la metateoria del calcolo degli enunciati, ad altri sistemi formali? E in particolare ... a sistemi formali più potenti, tali cioè da ammettere come modello l'aritmetica dei numeri naturali? ».

Nel discutere questa domanda, l'A. pone opportunamente in luce che, sebbene siano rilevabili a prima visa alcune fondamentali differenze tra il nuovo tipo di sistemi formali e il calcolo degli enunciati (questo infatti ammette modelli finiti, il che invece non accade per quelli), pur tuttavia esistono motivi che alcuni decenni fa potevano giustificare la fiducia, nutrita da Hilbert, di riuscire a compiere tale estensione. La fiducia di Hilbert fu confortata dai risultati dell'aritmetica ricorsiva di Skolem, la quale — come è ben noto — può considerarsi quale un coerente sviluppo della seguente osservazione: che nel principio di induzione aritmetica di Peano « non si predica una certa proprietà per l'insieme numerico in quanto tale, ma si mostra come questa proprietà sia riconoscibile, a partire dallo zero, via via per qualsivoglia successivo, *per ogni numero che noi scegliamo* ». L'importanza di siffatta osservazione, ai fini del problema poco sopra accennato, sta nel fatto che, in seguito ad essa, l'aritmetica finitistica rivelò una nuova, meglio precisata potenza, in base alla quale Hilbert potè sperare di affrontare con successo la metamatematica dell'intera teoria dei numeri. « Ecco quindi perchè, all'inizio degli anni 'venti', non pareva impossibile generalizzare la sicurezza e l'assolutezza delle prove realizzate per sistemi formali a modello finito: la ricorsività si presentava come una specie di possibilità di estendere indefinitamente la finitezza, sì da renderla capace di essere sempre più comprensiva pur restando finita e quindi 'sicura', cioè ispezionabile, controllabile, intuibile, mentre tutte le costruzioni restavano protette contro le obiezioni intuizionistiche, dato il loro carattere rigorosamente costruttivo ». Fu necessaria un'elaboratissima argomentazione per dimostrare che la fiducia di Hilbert, sebbene plausibilissima, andava in realtà ad urtarsi contro altri insormontabili ostacoli.

La seconda parte del volume, dedicata appunto — come già abbiamo accennato — all'esposizione di questa argomentazione, si articola in tre capitoli. Il primo mette a punto alcune nozioni fondamentali, come quelle di decidibilità e indecidibilità (sia di una proposizione che di una teoria); analizza con grande rigore il celebre paradosso di Richard, mostrando l'equivoco su cui esso si basa (confusione tra aritmetica e meta-aritmetica) e spiegando in anticipo per quale via l'argomentazione di Gödel, che pur sarà tanto simile a quella di Richard, riesce a evitare tale inconveniente (riesce cioè « a rispettare i requisiti della metateoricità e a ritornare correttamente dal piano metateorico a quello della teoria »); spiega infine, anche con l'ausilio di esempi concreti, in che consista la celebre « aritmetizzazione » dei sistemi formali escogitata da Gödel e per qual motivo alcune fondamentali relazioni metateoriche, così aritmetizzate, vengano rappresentate da predicati arimetici che sono ricorsivi primitivi. Il secondo capitolo espone dapprima una dimostrazione abbastanza dettagliata del cosiddetto primo teorema di Gödel, nella forma semplificata ideatane da Kleene, sforzandosi di porre in luce tutte le ipotesi e tutti i passaggi fondamentali della complicata argomentazione; passa poi ad analizzare la nuova forma del teorema dimostrata da Rosser, illustrandone la maggiore generalità; e riassume in ultimo la dimostrazione del cosiddetto secondo teorema di Gödel, il quale afferma che: per un sistema formale, capace di formalizzare l'aritmetica e che sia coerente, non esiste una prova di coerenza che possa venire offerta con mezzi formalizzabili entro il sistema stesso.

Il terzo capitolo esamina le conseguenze metamatematiche del teorema di Gödel, fra le quali la prima e la più importante — che emerge chiaramente dall'ultimo enunciato testè riferito —, consiste appunto nel riconoscimento che il programma hilbertiano (più esattamente la sua prima parte) è in stretto senso inattuabile. Proprio in seguito a questo fallimento, l'A. ricorda che vennero eseguiti altri tentativi per riprendere il programma hilbertiano in un nuovo senso, e cioè con strumenti non più rigorosamente finitistici, sebbene tali da fornire un notevole grado di sicurezza: particolarmente riuscito quello di Gentzen, su cui purtroppo il volume in esame deve (per ragioni di spazio) limitarsi a brevissimi cenni. Pochissime (per lo stesso motivo) sono pure le righe dedicate alla seconda parte del programma hilbertiano; esse si limitano a ricordarci che « per quanto stretti siano i legami che uniscono aritmetica ed analisi non è sufficiente la coerenza della prima a garantire la coerenza della seconda ». Il capitolo (e il volume) ha termine con un breve paragrafo di conclusioni, di cui non si sa se ammirare di più la chiarezza o la cautela filosofica. Vale la pena ricordare che il nostro giovane autore proviene da un indirizzo di pensiero, il quale avrebbe potuto spingerlo a tentare di integrare il fallito programma hilbertiano con pericolose considerazioni metafisiche che, proprio secondo tale indirizzo, dovrebbero risultare infallibili; il merito, non piccolo, di essersi sottratto a questa tentazione proviene dalla piena consapevolezza della serietà dei problemi studiati, e proprio perciò dalla chiara coscienza che essi non vanno mescolati con istanze di ordine completamente diverso.

Come ho detto fin dall'inizio della mia recensione, il volume è veramente buono, e viene a colmare molto bene una effettiva lacuna della cultura italiana. Pare ora ragionevole attendersi che l'A. stesso — e con lui altri giovani studiosi, matematici e filosofi — partendo dalla perfetta assimilazione della problematica più moderna esposta nel presente volume, si accingano a spingere innanzi le proprie ricerche, onde la scienza italiana possa tornare ad essere altamente produttiva — anche su questo punto — come lo fu ai tempi di Peano.

LUDOVICO GEYMONAT

I. M. YAGLOM, *Geometric transformations*, (tradotto dal russo da A. Schields), Random House, New Mathematical Library, 1962, pag. 133.

Questo volumetto fa parte di un Monograph Project della School Mathematics Study Group (della Stanford University) ed è, come gli altri della serie, diretto a mostrare come alcune importanti idee matematiche che finora erano considerate come oggetto di studi universtiari possano essere vantaggiosamente esposte nell'insegnamento secondario. Nel periodo che attraversiamo di rinnovamento (o meglio, di sforzo per il rinnovamento) di questo insegnamento il presente volumetto offre un eccellente esempio di quanto si possa concretamente fare a questo scopo.

Oggetto del volume sono, come dice il titolo, le trasformazioni geometriche: più precisamente lo studio degli spostamenti (traslazioni e rotazioni) e delle simmetrie (riflessioni rispetto ad una retta e traslo-riflessioni, cioè riflessioni accompagnate da traslazioni parallele alla stessa retta) nel piano euclideo. La maggior generalità del titolo si riferisce all'opera originale che comprende tre parti: la prima è quella ora tradotta in inglese; la seconda verrà pubblicata nella stessa collezione; della terza, che riguarda la geometria proiettiva e le geometrie non euclidee (e che giustifica il titolo più ampio) non è prevista la traduzione in questa collezione (ma è augurabile che essa sia pure pubblicata).

Il proposito dell'A. non è di aggiungere teoremi a quelli che s'insegnano abitualmente nella geometria euclidea (pure curiosità, fuori della corrente principale dello sviluppo matematico) ma di far nascere nel modo più spontaneo l'idea di gruppo e di mostrarne l'utilità e la potenza anche nella soluzione di problemi elementari.

Una breve introduzione sul significato di « Geometria » prende le mosse dall'analisi della proposizione secondo la quale due lati e l'angolo compreso determinano un triangolo: affermazione che per essere vera implica la nozione di congruenza (qui detta isometria) di due triangoli.

Nei capitoli successivi vengono successivamente studiate, con mezzi del tutto elementari, le trasformazioni dette sopra e i loro prodotti (qui detti somme): in sostanza vengono date le proprietà gruppali senza dare di esse un'esposizione formale.

Un'altra caratteristica del libro è il modo d'esposizione: l'A. persuaso che la matematica s'impara *facendola* fa seguire all'esposizione di proprietà delle trasformazioni dette un gruppo di problemi che con l'uso di quelle si risolvono: essi non sono segregati dal testo ma ne fanno parte integrante, sono un ostacolo sul quale il lettore *deve* cimentarsi prima di passare alla lettura delle parti successive del capitolo. Poichè il dover cimentarsi non significa riuscire (e non si tratta di problemi facili) per evitare un senso di frustrazione che indurrebbe a non continuare la lettura la soluzione dei problemi è data, con chiarimenti del procedimento e analisi delle soluzioni, nella seconda parte (che occupa circa metà del volumetto).

Come ho detto trovo questo volumetto eccellente: e ritengo ch'esso possa giovare anche in Italia al rinnovamento di cui l'insegnamento secondario della matematica ha assoluto bisogno.

ENRICO BOMPIANI

TRACY Y. THOMAS, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, New York - London, 1961, vol. di pagine 267, con 19 figure, prezzo 70 scellini.

Il volume consta di una prefazione e di sette capitoli, dedicati, rispettivamente: agli invarianti fondamentali nella Meccanica dei continui ed alle equazioni di continuità e del moto, alle condizioni di compatibilità, alle onde nei mezzi elastici, ai solidi perfettamente plastici, alla teoria dell'equilibrio delle striscie di Luders, alle superfici caratteristiche e propagazione ondosa, ai fatti di instabilità e di frattura.

Circa l'algoritmo tensoriale usato e l'indirizzo geometrico-differenziale, l'autore fa riferimento alla propria precedente opera intitolata: « Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry », che costituisce il primo volume della serie di « Mathematics in Science and Engineering », cui appartiene il volume di cui stiamo parlando.

Quest'ultimo costituisce una efficace esposizione della teoria della propagazione, sviluppo e decadimento delle discontinuità nei solidi, nonchè della teoria delle superfici caratteristiche e della diffusione plastica nelle regioni elastiche; ed è basato su diversi articoli e memorie originali dell'autore stesso. Anche sotto questo aspetto, cioè di esposizione globale di ricerche in gran parte dello stesso autore, discende l'utilità dell'opera, atta ad aiutare, in una certa direzione e con un indirizzo omegeneo, il lavoro dei giovani ricercatori.

ANTONIO PIGNEDOLI

CRAMÈR H., *Random Variables and Probability Distributions*, Cambridge Tracts in Mathematics and Math. Ph., N° 36, Cambridge Univ. Press, 2ª edizione, 1962; $ 4 o 21 s.

A venticinque anni dalla prima edizione (1937) di questo breve trattato, appare la seconda, pressochè invariata. Ciò che è giustificato sia dal fatto che ogni tentativo di includere anche in parte gli sviluppi che l'argomento ha avuto nel frattempo modificherebbe completamente natura e mole del l'opera, e sia dall'interesse che ha tuttora un'esposizione compatta e omogenea dell'insieme di vedute e risultati degli anni intorno al 1930-35, cui molto contribuì il Cramèr personalmente, e che felicemente sintetizzò nella presente meritatamente celebre esposizione.

L'impostazione è quella formale assiomatica, che permette di trattare gli aspetti matematici indipendentemente da controverse questioni concettuali e interpretative, secondo il suggerimento di Cantelli e la sistematizzazione di Kolmogoroff (collegata, un po' ibridamente, alla teoria di von Mises). Per brevità o semplicità, il Cramèr si limita però a problemi in R_1 o R (spazio a una o più dimensioni in numero finito), campo nel quale si pongono le questioni che considera, su numeri aleatori o loro distribuzioni di probabilità purchè il caso di successioni si riconduca a uno studio asintotico di proprietà per n grande).

Per segnalare alcuni aspetti della « novità » della sintesi del 1937, menzioniamo: l'impiego sistematico del metodo della funzione caratteristica; i perfezionamenti al « teorema centrale » sulla tendenza alla distribuzione « normale » (o gaussiana) e l'importante proprietà inversa (Cramèr, 1936) secondo cui tale distribuzione non ammette « fattori di composizione » di altro tipo; altre considerazioni su tale scomponibilità e distribuzioni indefinitamente scomponibili; precisazioni (Liapounoff, Cramèr, ecc.) sull'avvicinamento alla distribuzione normale e sviluppi asintotici (che corrispondono, con significato più rigoroso, alle « serie » di Charlier, Bruns, ecc.); alcuni processi stocastici, e loro studio messo in relazione agli argomenti precedenti.

BRUNO DE FINETTI