Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Una notevole proprietà dei campi vettoriali nella dinamica dei fluidi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 19–21.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_19_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Una notevole proprietà dei campi vettoriali nella dinamica dei fluidi.

Nota di TINO ZEULI (a Torino) (*)

Sunto. - *Si mette in evidenza una interessante proprietà dei campi vettoriali, che trova riscontro nella teoria dei vortici ed in magnetofluidodinamica.*

Sia $\mathbf{F}$ il vettore di un campo vettoriale continuo definito in ogni punto di un fluido in moto e σ una superficie aperta (diaframma), semplicemente connessa, di contorno s, composta da particelle del fluido. Se P ne è un punto generico e dP e δP sono due spostamenti indefinitesimi tangenti a σ, il flusso Φ di $\mathbf{F}$ attraverso σ è dato da

$$\Phi = \int_\sigma \mathbf{F} \times dP \wedge \delta P. \tag{1}$$

Ponendoci dal punto di vista lagrangiano, se $\mathbf{F}_0$, σ_0, dP_0, δP_0, sono le determinazioni di $\mathbf{F}$, σ, dP, δP all'istante t_0 e se introduciamo l'omografia vettoriale $\alpha = dP/dP_0$, avremo

$$dP = \alpha\, dP_0, \qquad \delta P = \alpha \delta P_0$$

e quindi, se $R\alpha$ è l'omografia «reciproca» di α, si avrà

$$dP \wedge \delta P = \alpha\, dP_0 \wedge \alpha \delta P_0 = R\alpha\,(dP_0 \wedge \delta P_0).$$

Sia $I_3\alpha$ l'invariante terzo di α e supponiamo sia

$$I_3\alpha \cdot \mathbf{F} = \alpha \mathbf{F}_0, \tag{2}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 25 gennaio 1963.

dalla (1) seguirà

$$\Phi = \int_{\sigma_0} \frac{\alpha \mathbf{F}_0}{I_3 \alpha} \times R\alpha \, (dP_0 \wedge \delta P_0) .$$

Di qui, se $KR\alpha$ è l'omografia « coniugata » (o « trasposta ») di $R\alpha$, applicando il teorema di commutazione avremo

$$\Phi = \int_{\sigma_0} \frac{KR\alpha \cdot \alpha \mathbf{F}_0}{I_3 \alpha} \times dP_0 \wedge \delta P_0$$

ed essendo $KR\alpha \cdot \alpha = I_3 \alpha$ si ottiene infine

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \times dP \wedge \delta P = \int_{\sigma_0} \mathbf{F}_0 \times dP_0 \wedge \delta P_0 , \tag{3}$$

ossia:

« se per il campo vettoriale $\mathbf{F}$ sussiste la (2) e se σ è una superficie aperta (limitata da una linea chiusa s) composta da particelle del fluido, durante il moto il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso σ è costante comunque vari σ nel moto del fluido ».

Nel caso di un fluido perfetto, se $\mathbf{F}$ è il vortice

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} ,$$

avendosi, per le equazioni di CAUCHY [1]

$$I_3 \alpha \cdot \omega = \alpha \omega_0 ,$$

la (3) porge la relazione

$$\int_{\sigma} \omega \times dP \wedge \delta P = \int_{\sigma_0} \omega_0 \times dP_0 \wedge \delta P_0 ,$$

che, in un fluido perfetto, precisa la conservazione del vortice entro i tubi costituiti dalle linee di corrente.

[1] Cfr. ad es.: C. AGOSTINELLI, *Istituzioni di Fisica Matematica* (Zanichelli, Bologna, 1962), vol. I, pg. 565.

Nel caso in cui $\mathbf{F}$ sia il campo dell'induzione magnetica $\mathbf{B}$ in un fluido perfetto, di conducibilità elettrica infinita, avendosi [2]

$$I_3 \alpha \cdot \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}_0 ,$$

la (3) porge la relazione

$$\int_\sigma \mathbf{B} \times dP \wedge \delta P = \int_{\sigma_0} \mathbf{B}_0 \times dP_0 \wedge \delta P_0 ,$$

che costituisce il teorema di ALFVÉN della magnetofluidodinamica [3].

Di sfuggita notiamo che quest'ultimo risultato si può anche ottenere rapidamente dalla formula che dà la derivata sostanziale del flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie σ limitata dalla linea s variabile col tempo t [4]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_\sigma \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{rot} (\mathbf{F} \wedge \mathbf{v}) \right] \times \mathbf{n} \, d\sigma ,$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità della particella fluida ed $\mathbf{n}$ è il versore della normale a σ. Ponendovi $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ e tenendo conto che nelle nostre ipotesi si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$$

si ha subito $\Phi = \text{cost}$.

(2) Cfr.: C. AGOSTINELLI, *Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari*. Nota I (Rendiconti dell'Accad. Naz dei Lincei. s. VII, vol. XXIX, fasc. 6, dic. 1960).

(3) V. ad es.: FERRARO-PLUMPTON. Magnetofluidmechanics (Oxford, Univ. Press, 1962), pag. 25.

(4) V. ad es.: D. GRAFFI, *Teoria matematica dell'Elettromagnetismo* (Pàtron, Bologna, 1949), vol. I, pag 324.