Bollettino Unione Matematica Italiana

Marialuisa De Socio

Su una formula per la propagazione di un'onda elettromagnetica nei mezzi dispersivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 22–33.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_22_0>

Su una formula per la propagazione di un'onda elettromagnetica nei mezzi dispersivi.

Nota di MARIALUISA DE SOCIO (a Bologna) (*) (1)

Sunto. - *Come il 1° paragrafo.*

1. In una nota in corso di stampa sugli Annali di matematica il GRAFFI ha studiato l'equazione integro-differenziale nell'incognita E:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial E}{\partial t} + \alpha^2 E - \beta^2\left(E + \int_0^t G(t-\tau)E(\tau)d\tau\right)\right], \tag{1}$$

che generalizza la nota equazione dei telegrafisti. Nella (1) c^2, α, β^2 sono costanti, le prime due positive; $G(t-\tau)$ una funzione nota di t e τ.

Il GRAFFI ha determinato le soluzioni di (1) per $x > 0$, supponendo E convergente per $x \to \infty$, $E = \dfrac{\partial E}{\partial t} = 0$ per $t = 0$ e per ogni $x > 0$, inoltre $E(t) = E_0(t)$ per $x = 0$, ove $E_0(t)$ è una funzione assegnata del tempo, nulla per $t \leq 0$.

Egli giunge alla formula:

$$E(t, x) = e^{-\frac{\alpha}{c}x} E_0\left(t - \frac{x}{c}\right) + \int_0^{t-x/c} F(x, t-\tau) E_0(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

dove, se $\beta^2 > 0$, è:

$$F(x, t) = \frac{x}{c} e^{-\alpha t}\left\{\frac{\beta I_1(\beta\sqrt{t^2 - x^2/c^2})}{\sqrt{t^2 - x^2/c^2}}\, 1\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} + \tag{3}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 7 gennaio 1963.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 4, del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

$$+\frac{\beta^2 x}{c}e^{-\alpha t}\sum_1^\infty{}_r\frac{[\beta\sqrt{t^2-x^2/c^2}]^{r-1}}{r!\,2^r}I_{r-1}(\beta\sqrt{t^2-x^2/c^2})\,1\left(t-\frac{x}{c}\right)*G_r(t),$$

mentre I_r indica al solito la funzione di Bessel modificata di indice r, il simbolo $*$ il prodotto di composizione, ed è:

$$G_r(t)=G_{r-1}(t)*G(t).$$

Ovviamente interessa calcolare un valore maggiorante per un resto generico della serie sopra scritta, in modo da poter limitare i calcoli numerici a pochi termini della serie. Noi otterremo risultati diversi da quelli del Graffi e forse più convenienti nel caso abbastanza diffuso nella pratica in cui si ha:

$$-Ne^{-\nu t}\leq G(t)\leq -Ne^{-\mu t} \tag{4}$$

dove N, μ, ν sono costanti positive e $\mu>\nu$. In questo caso si trova che la serie è a termini alternativamente positivi e negativi e, sotto certe condizioni, decrescenti in valore assoluto, quindi è facile delimitare il resto. Esporremo qualche esempio in cui si verificano le condizioni ora ricordate.

Passeremo poi al caso $\beta^2<0$. Allora la $F(x,\,t)$ assume la forma, posto $k=-\beta^2$:

$$F(x,\,t)=-\frac{x\sqrt{k}}{c}e^{-\alpha t}\frac{J_1(\sqrt{k(t^2-x^2/c^2)})}{\sqrt{t^2-x^2/c^2}}\,1\left(t-\frac{x}{c}\right)+ \tag{5}$$

$$+\frac{xk}{c}\sum_1^\infty{}_r(-1)^r\frac{[\sqrt{k(t^2-x^2/c^2)}]^{r-1}}{r!\,2^r}e^{-\alpha t}J_{r-1}[\sqrt{k(t^2-x^2/c^2)}]1\left(t-\frac{x}{c}\right)*G_r(t)$$

dove J_r è la funzione di Bessel oscillante di indice r. Anche in questo caso e nell'ipotesi precedente (4) troveremo convenienti espressioni per il resto ennesimo della serie che compare in (5).

2. Dimostriamo anzitutto il teorema:

Se $G(t)<0$ per ogni $t>0$ è allora $G_r(t)>0$ se r è pari, $G_r(t)<0$ se r è dispari.

Infatti si ha:

$$G_2(t)=G(t)*G(t)=\int_0^t G(t-\tau)G(\tau)d\tau.$$

Ora essendo sia $G(t-\tau)$ che $G(\tau)$ entrambe negative in tutto $(0, t)$ il loro prodotto risulta positivo e così pure l'integrale, ovvero $G_2(t) > 0$. Applicheremo ora il metodo di induzione completa. Sia $G_{r-1}(t)$ dello stesso segno di $(-1)^{r-1}$. Si ha:

$$G_r(t) = \int_0^t G_{r-1}(t-\tau) G(\tau) d\tau .$$

Poichè $G(\tau)$ è negativa in tutto $(0, t)$ segue che $G_r(t)$ ha segno opposto a $G_{r-1}(t)$, ovvero $G_r(t)$ ha il segno di $(-1)^r$, quindi è positiva se r pari, negativa se r dispari.

Calcoliamo ora un valore maggiorante per il valore assoluto di $G_r(t)$. Ricordando la (4) si ha:

$$|G(t)| < Ne^{-\nu t} ,$$

segue, essendo in tutto $(0, t)\, G(t)$ di segno costante:

$$|G_2(t)| = \int_0^t |G(t-\tau)| \cdot |G(\tau)| \, d\tau < N^2 \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} e^{-\nu\tau} d\tau = N^2 e^{-\nu t} t ,$$

e in generale, seguendo il metodo di induzione completa, si ha, se:

$$|G_{r-1}(t)| < \frac{N^{r-1} t^{r-2} e^{-\nu t}}{(r-2)!} ,$$

$$|G_r(t)| = \int_0^t |G_{r-1}(\tau)| \cdot |G(t-\tau)| \, d\tau < \frac{N^r}{(r-2)!} \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} e^{-\nu\tau} \tau^{r-2} d\tau ,$$

ovvero:

$$|G_r(t)| < \frac{N^r t^{r-1} e^{-\nu t}}{(r-1)!} . \tag{6}$$

Poichè dalla (4) si ha $|G(t)| > Ne^{-\mu t}$, con procedimento analogo si ottiene uu valore minorante di $|G_r(t)|$, cioè;

$$|G_r(t)| > \frac{N^r e^{-\mu t} t^{r-1}}{(r-1)!} . \tag{7}$$

In base alle disuguaglianze (6) e (7) si ha una limitazione per il termine generico a_r della serie che compare nell' espressione (3) di $F(x, t)$, cioè per:

$$a_r = \frac{e^{-\alpha t}[\beta\sqrt{t^2 - x^2/c^2}]^{r-1}}{r!\ 2^r} I_{r-1}(\beta\sqrt{t^2 - x^2/c^2}) \cdot 1(t - x/c) * G_r(t) =$$

$$= \int_{x/c}^{t} e^{-\alpha\tau} \frac{(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r-1}}{r!\ 2^r} I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})\, G_r(t-\tau)d\tau\,.$$

Si ha infatti:

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{N^r}{r!\,2^r(r-1)!}\int_{x/c}^{t} e^{-\alpha\tau}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r-1} I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}) \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot e^{-\mu(t-\tau)}(t-\tau)^{r-1}\,d\tau < |\,a_r\,| \\ &\frac{N^r}{r!\,2^r(r-1)!}\int_{x/c}^{t} e^{-\alpha\tau}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r-1} I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}) \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)^{r-1}\,d\tau > |\,a_r\,| \end{aligned} \right.$$

Inoltre possiamo osservare che la funzione integranda che compare nell' espressione di a_r è il prodotto di due fattori, uno $e^{-\alpha\tau}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r-1} I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})$ sempre positivo, l' altro $G_r(t-\tau)$ che ha il segno di $(-1)^r$, quindi a_r è alternativamente a segno positivo e negativo.

Per imporre che i termini della serie siano in valore assoluto decrescente si può imporre che il valore minorante di $|\,a_r\,|$ sia maggiore del valore maggiorante di $|\,a_{r+1}\,|$, cioè:

$$\frac{N^r}{r!\,2^r(r-1)!}\int_{x/c}^{t}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r-1} I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})\, e^{-\alpha\tau}(t-\tau)^{r-1} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\mu(t-\tau)}\,d\tau > \frac{N^{r+1}}{(r+1)!\,2^{r+1}r!}\int_{x/c}^{t}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r} I_r(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}) \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\alpha\tau}(t-\tau)^r e^{-\nu(t-\tau)}\,d\tau\,,$$

ovvero:

$$\int_{x/c}^{t}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r-1} e^{-\alpha\tau}(t-\tau)^{r-1}\Big[I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})\, e^{-\mu(t-\tau)} -$$

$$- \frac{N\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}}{2r(r+1)} I_r(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)\Big] d\tau > 0 .$$

Questa condizione è certamente verificata per $\frac{x}{c} < \tau < t$ se nello stesso intervallo si ha:

$$\frac{2I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})e^{-\mu(t-\tau)}r(r+1)}{N\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}\, I_r(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)} > 1. \tag{9}$$

Poichè risulta:

$$I_r(z) = (z/2)^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!\,(r+k)!} < \frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!\,(r-1+k)!} = \frac{z}{2} I_{r-1}(z),$$

e quindi:

$$\frac{I_{r-1}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})}{I_r(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})} > \frac{2}{\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}},$$

la (9) è certamente verificata se è:

$$\frac{4r(r+1)}{N\beta^2(\tau^2 - x^2/c^2)(t-\tau)e^{(\mu-\nu)(t-\tau)}} > 1 . \tag{9'}$$

Accentuando ancora la disuguaglianza si può scrivere che le a_r sono in valore assoluto decrescente a partire dall'indice r per cui è:

$$\frac{4r(r+1)}{N\beta^2(t^2 - x^2/c^2)(t - x/c)e^{(\mu-\nu)(t-x/c)}} > 1 . \tag{9''}$$

In realtà una limitazione migliore, meno restrittiva, della (9''), si troverebbe calcolando il massimo in $\left(\frac{x}{c}, t\right)$ della funzione

$$\left(\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}\right)(t-\tau)e^{(\mu-\nu)(t-\tau)} .$$

Limitandoci a calcolare il massimo di $(\tau^2 - x^2/c^2)(t-\tau)$, si ha [2]

[2] Infatti:

$$\frac{d(\tau^2 - x^2/c^2)(t-\tau)}{d\tau} = -3\tau^2 + 2t\tau + \frac{x^2}{c^2} \text{ si annulla in } \left(\frac{x}{c}, t\right),$$

che la (9') è verificata se è:

$$\frac{54r(r+1)}{N\beta^2(t^2 - 3x^2/c^2 + t\sqrt{t^2+3x^2/c^2})(2t - \sqrt{t^2+3x^2/c^2})\, e^{(\mu-\nu)(t-x/c)}} > 1,$$

che, comunque sia l'intervallo $\left(\frac{x}{c}, t\right)$ considerato, è certamente verificata da un certo indice in poi.

Verificate le condizioni richieste la serie degli a_r sarà quindi a termini alternativamente positivi e negativi descrescenti in valore assoluto; le (8) daranno allora una limitazione per il resto ennesimo.

Precisamente si avrà:

$$|R_n| < |a_{n+1}| < \frac{N^{r+1}}{(r+1)!\,2^{r+1}r!}\int_{x/c}^{t} e^{-\alpha\tau}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^r \cdot$$

$$\cdot\, I_r(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})\, e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)^r\, d\tau\,.$$

Possiamo calcolare un valore maggiorante di questo integrale. Posto:

$$y = \beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2} \qquad\qquad dy = \frac{\beta\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}}\, d\tau$$

si ha:

$$\int_{x/c}^{t} e^{-\alpha\tau}(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^r I_r(\beta\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})\, e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)^r\, d\tau =$$

$$\text{per } \tau = \frac{t + \sqrt{t^2 + 3x^2/c^2}}{3} \quad \text{ove è} \quad \frac{d^2(\tau^2 - x^2/c^2)(t-\tau)}{d\tau^2} < 0.$$

Segue che, essendo per $\tau = \frac{x}{c}$ e $\tau = t$: $\left(\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}\right)(t-\tau) = 0$, il valore massimo di $(\tau^2 - x^2/c^2)(t-\tau)$ è:

$$\left(\frac{t^2 + t^2 + 3x^2/c^2 + 2t\sqrt{t^2+3x^2/c^2}}{9} - \frac{x^2}{c^2}\right)\left(t - \frac{t + \sqrt{t^2+3x^2/c^2}}{3}\right) =$$

$$= \frac{2(t^2 + t\sqrt{t^2+3x^2/c^2} - 3x^2/c^2)(2t - \sqrt{t^2+3x^2/c^2})}{27}\,.$$

$$= \frac{e^{-\nu t}}{\beta^2} \int_{x/c}^{t} (\beta \sqrt{\tau^2 - x^2/c^2})^{r+1} I_r (\beta \sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}) \, \frac{e^{(\nu-\alpha)\tau} (t-\tau)^r}{\tau} \,\cdot$$

$$\cdot \frac{\beta\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2/c^2}} \, d\tau < \frac{e^{-\nu t} M_r}{\beta^2} \int_0^y y^{r+1} I_r(y) dy \,,$$

dove si è indicato con M_r (3) il valore massimo di:

$$F(\tau) = \frac{e^{(\nu-\alpha)\tau} (t-\tau)^r}{\tau}$$

nell'intervallo $\left(\frac{x}{c}\,,\ t\right)$.

Inoltre poichè si ha (4):

$$\int_0^y y^{r+1} I_r(y) dy = y^{r+1} I_{r+1}(y) \,,$$

segue:

$$| R_n | < \frac{N^{r+1} e^{-\nu t} M_r}{(r+1)!\, 2^{r+1} r!\, \beta^2} (\beta \sqrt{t^2 - x^2/c^2})^{r+1} I_{r+1} (\beta \sqrt{t^2 - x^2/c^2}).$$

(3) Per calcolare il valore di M_r si ponga:

$$\nu - \alpha = h, \quad t - \tau = u \,;$$

si ha:

$$\frac{e^{h\tau} (t-\tau)^r}{\tau} = e^{ht} \, \frac{e^{-hu} u^r}{t-u} \,,$$

con u variabile tra 0 e $t - x/c$. Derivando si ha:

$$e^{ht} u^{r-1} e^{-hu} \, \frac{[(-hu + r)(t-u) + u]}{(t-u)^2} \,.$$

Ora se $h < 0$ o più in generale $-h(t - x/c) + r < 0$ la derivata è sempre > 0 e il massimo della nostra espressione si ha per $u = t - x/c$ e vale:

$$M_r = \frac{e^{h\frac{x}{c}} (t - x/c)^r}{x/c} \,.$$

La trattazione nel caso: $-hu + r < 0$ offre solo difficoltà di calcolo perciò la ometteremo.

(4) Mc Lachlan, *Bessel functions for engineers*, pag. 163 formula 95.

3. La condizione (4) è soddisfatta nel seguente caso che si incontra nella pratica. Si consideri la propagazione di un'onda elettromagnetica non sinusoidale in un mezzo dielettrico con isteresi. In questo caso si può scrivere la seguente relazione fra il vettore spostamento $\boldsymbol{D}$ e il campo elettrico $\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + \int_0^t \psi(t-\tau)\, \boldsymbol{E}(\tau) d\tau$$

e in molti problemi pratici si ha:

$$\psi(t) = \sum_0^\infty {}_n A_n e^{-a_n t}$$

dove A_n e a_n sono costanti positive.

Inoltre si può supporre che il vettore densità di corrente valga:

$$\boldsymbol{J}(t) = \gamma \boldsymbol{E}(t)$$

Come ha dimostrato il GRAFFI ([5]), si ha:

$$\beta^2 = \frac{[\psi(0)+\gamma]^2}{4\varepsilon^2} - \frac{\psi'(0)}{\varepsilon} \quad ; \qquad G(t) = -\frac{\psi''(t)}{\beta^2\varepsilon}$$

e nel nostro caso:

$$\beta^2 = \frac{\left(\sum_0^\infty {}_n A_n + \gamma\right)^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\sum_0^\infty {}_n a_n A_n}{\varepsilon} \quad ; \qquad G(t) = -\frac{\sum_0^\infty {}_n a_n^2 A_n e^{-a_n t}}{\beta^2\varepsilon} .$$

Inoltre detti ν e μ il minimo e il massimo valore delle a_n si ha:

$$\frac{-\psi''(0)}{\beta^2\varepsilon} e^{-\nu t} < G(t) < -\frac{\psi''(0)}{\beta^2\varepsilon} e^{-\mu t}$$

ovvero una limitazione che, ove si ponga $N = -\dfrac{\psi''(0)}{\beta^2\varepsilon}$, coincide con la (4).

([5]) Vedi lavoro citato in 1.

4. Supponiamo ora $\beta^2 < 0$. Posto $-\beta^2 = k$ la $F(x, t)$ assume l'espressione (5). Ora noi potremo dare varie forme maggioranti per il resto ennesimo della serie che compare in tale formula, sempre nell'ipotesi che sia:

$$| G_r(t) | < \frac{N^r e^{-\nu t} t^{r-1}}{(r-1)!} .$$

Indichiamo per ora con H_n il valore massimo di $| J_r(z) |$ con $(r \geq n)$ nell'intervallo $(0, \sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})$. Illustreremo poi un metodo per calcolarlo.

Si ottiene allora:

$$(10) \qquad | R_n | < \frac{H_n}{2} \sum_n^\infty {}_r N^{r+1} \int_{x/c}^t \frac{e^{-\alpha\tau} [\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}]^r (t-\tau)^r e^{-\nu(t-\tau)}}{r!\, 2^r (r+1)!} d\tau =$$

$$= \frac{H_n N e^{-\nu t}}{2} \sum_n^\infty {}_r \int_{x/c}^t \frac{N^r [\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}]^r (t-\tau)^r}{r!\, 2^r (r+1)!} e^{(\nu-\alpha)\tau} d\tau .$$

Poniamo:

$$b = \sqrt{2N(t-\tau)} \quad \sqrt[4]{k(\tau^2 - x^2/c^2)} \qquad , \qquad r = s + n .$$

Poichè è: $(s+n)! > s!\, n!$, tralasciando per brevità il fattore $e^{(\nu-\alpha)\tau}$ si ha per la funzione che compare sotto il segno di integrazione nelle (10):

$$\sum_n^\infty {}_r \frac{b^{2r}}{r!\, 2^{2r} (r+1)!} = \frac{b^{2n}}{2^{2n}} \sum_0^\infty {}_s \frac{(b/2)^{2s}}{(s+n)!\, (s+n+1)!} <$$

$$< \left(\frac{b}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n!} \sum_0^\infty {}_s \frac{(b/2)^{2s}}{s!\, (s+n+1)!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} I_{n+1}(b) .$$

Segue quindi:

$$| R_n | < \frac{N e^{-\nu t} H_n}{2n!} \int_{x/c}^t e^{(\nu-\alpha)\tau} \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} I_{n+1}(b) d\tau .$$

Indichiamo con b_m il massimo valore di b nell' intervallo $\left(\frac{x}{c}, t\right)$ [6]. Si ha allora:

$$(11) \qquad |R_n| < \frac{H_n N e^{-\nu t}}{2^n n!} b_m^{n-1} I_{n+1}(b_m) \int_{x/c}^{t} e^{(\nu-\alpha)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{H_n N b_m^{n-1}}{2^n n!(\nu-\alpha)} I_{n+1}(b_m) e^{-\alpha t}\left[1 - e^{(\alpha-\nu)\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right].$$

Si può calcolare un altro valore maggiorante di R_n più semplice. Si supponga di avere scelto n in modo che sia:

$$\frac{(b/2)^2}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2}.$$

Si ha allora, per la funzione che compare sotto il segno di integrazione nella (10) (sempre tralasciando il fattore $e^{(\nu-\alpha)\tau}$):

$$\sum_{n}^{\infty}{}_r \frac{b^{2r}}{r!\,2^{2r}(r+1)!} < \frac{(b/2)^{2n}}{n!(n+1)!}\left[1 + \frac{(b/2)^2}{(n+1)(n+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(b/2)^4}{(n+1)^2(n+2)^2} + \ldots\right] = \frac{(b/2)^{2n}}{n!(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{(b/2)^2}{(n+1)(n+2)}} <$$

$$< \frac{2(b/2)^{2n}}{n!(n+1)!}.$$

Si ha quindi come nel caso precedente:

$$(12) \qquad |R_n| < \frac{H_n N e^{-\alpha t}}{(\nu-\alpha)\,n!\,(n+1)!}\left(\frac{b_m}{2}\right)^{2n}\left[1 - e^{(\alpha-\nu)\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right]$$

e questa formula è forse più pratica della precedente.

[6] b risulta massima quando è massima $(t-\tau)^2(\tau^2 - x^2/c^2)$. Poichè per $\tau = t$ e $\tau = x/c$ questa espressione si annulla, mentre per:

$$\tau = \frac{t + \sqrt{t^2 + 8x^2/c^2}}{4}$$

si annulla la sua derivata prima passando da valori positivi a valori negativi, segue che per questo valore di τ b è massima. Comunque un valore piú semplice e maggiorante b è ovviamente:

$$(t - x/c)^2 (t^2 - x^2/c^2).$$

Resta da calcolare H_n. Ora si osserva che detto m il minimo intero superiore a $\sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)}$ si avrà $J_r(z)$, per $r \geq m$, crescente e positiva nell'intervallo $(0, m)$ (7) e quindi anche in $(0, \sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})$, inoltre in tale intervallo si ha:

$$J_m(z) > J_r(z) \ (^8).$$

Quindi per $n \geq m$ il massimo di $J_n(z)$ coincide con:

$$J_m(\sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)}),$$

per $n < m$ il massimo di $|J_n(z)|$ si potrà determinare con l'aiuto delle tavole delle funzioni di BESSEL. Il più elevato tra questi valori sarà H_n.

5. Può essere infine interessante esaminare il caso in cui è $\beta^2 < 0$, ma $G(t)$ positivo. Posto al solito $-\beta^2 = k$, supponiamo che $\sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)}$ risulti minore di n, quindi nell'intervallo:

$$(0, \sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})$$

(7) WATSON, *Theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1914, pag. 485. Infatti il WATSON dimostra che il primo zero di $J_r'(z)$ si ha per $z > r$, quindi per $z < m < r$, $J_r(z)$ è crescente nell'intervallo $(0, \sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})$.

(8) Si considerino le relazioni ben note: (cfr. MC LACHLAN, formula 15 e 16 pag. 168):

$$zJ_r'(z) = rJ_r(z) - zJ_{r+1}(z),$$

$$zJ_r'(z) = -rJ_r(z) + zJ_{r-1}(z),$$

in tutto $(0, \sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})$ è $J_r' \geq 0$, segue:

$$J_r(z) \geq \frac{z}{r} J_{r+1}(z) \quad ; \quad J_{r-1}(z) \geq \frac{r}{z} J_r(z),$$

cambiando nell'ultima relazione r in $r+1$, si ha moltiplicando membro a membro:

$$J_r^2(z) \geq \frac{r+1}{r} J^2_{r+1}(z).$$

ovvero, essendo in $(0, \sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})$ $J_r(z)$ ed $J_{r+1}(z)$ positive:

$$J_r(z) > J_{r+1}(z).$$

si ha $J_r(z)$ positiva se $r > n$. In questo caso i termini della serie che compare nell'espressione (5) di $F(x, t)$ sono a segno alternato. Il loro valore assoluto è decrescente se è:

$$|a_{r+1}| - |a_{r+2}| = \int_{x/c}^{t} \frac{[\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}]^r}{(r+1)!\,2^{r+1}} e^{-\alpha\tau} [J_r \sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}) \cdot$$

$$\cdot\, G_{r+1}(t-\tau) - \frac{\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}}{2(r+2)} J_{r+1}(\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)})\, G_{r+2}(t-\tau)]\, d\tau > 0;$$

tale condizione è senz'altro verificata se è:

$$G_{r+1}(t-\tau) - \frac{\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}}{2(r+2)} G_{r+2}(t-\tau) > 0. \tag{13}$$

Supposto ora che sia valida un'ipotesi analoga alla (4):

$$Ne^{-\nu t} \geq G(t) \geq Ne^{-\mu t}$$

e quindi le (6) e (7), la (12) è verificata se è:

$$\frac{N^{r+1} e^{-\mu(t-\tau)}(t-\tau)^r}{r!} - \frac{\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}}{2(r+2)} \frac{N^{r+2} e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)^{r+1}}{(r+1)!} > 0$$

e con calcoli analoghi a quelli del n. 4 si trova, essendo $r > n$, la condizione:

$$\frac{2(n+2)(n+1)}{N(t-\tau)\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}\, e^{(\mu-\nu)(t-\tau)}} > 1$$

e quella più restrittiva:

$$\frac{2(n+2)(n+1)}{N(t - x/c)\sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)}\, e^{(\mu-\nu)(t-x/c)}} > 1. \tag{14}$$

Sotto tale condizione la serie è a termini alternativamente positivi e negativi, decrescenti in valore assoluto. Si ha allora:

$$|R_n| < \int_{x/c}^{t} \frac{[\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)}]^n}{(n+1)!\,2^{n+1}} e^{-\alpha\tau} J_n(\sqrt{k(\tau^2 - x^2/c^2)})\, \frac{N^{n+1} e^{-\nu(t-\tau)}(t-\tau)^n}{n!}\, d\tau$$

$$< \frac{J_n(\sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)})e^{-\nu t} N^{n+1}}{n!\,(n+1)!\,2^{n+1}(\nu - \alpha)} \left(t - \frac{x}{c}\right)^n [\sqrt{k(t^2 - x^2/c^2)}]^n (e^{(\nu-\alpha)t} - e^{(\nu-\alpha)x/c}.)$$