Bollettino Unione Matematica Italiana

Delfina Roux

Un teorema inverso sopra la composizione secondo Hurwitz-Pincherle.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 34–43.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_34_0>

Un teorema inverso sopra la composizione secondo Hurwitz-Pincherle

Nota di DELFINA ROUX (a Milano) (*) (**)

Summary. - *Let* a(z) *and* b(z) *be uniform functions, null at* ∞, *having only a finite number of singular points. Let* c(z) *be the* « HURWITZ-PINCHERLE *composed function* » *of* a(z) *and* b(z). *In this paper we study the relations between the singular points of* a(z) *and* b(z) *and the singular points of* c(z). *We deduce, among other results, that* c(z) *is a rational function if and only if both* a(z) *and* b(z) *are rational functions.*

1. Introduzione. – Siano

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/z^{n+1}, \qquad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n/z^{n+1}$$

due serie di potenze in $1/z$ e sia

$$c(z) = a(z) \oplus b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/z^{n+1}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k},$$

la loro « composta secondo HURWITZ-PINCHERLE ».

Qualora sia nota la collocazione dei punti singolari di $a(z)$ e $b(z)$, il teorema di HURWITZ-PINCHERLE ([1]) indica in quali punti del piano della variabile z vadano ricercate le singolarità di $c(z)$. Altri teoremi, dovuti a G. PÓLYA ([2]), V. BERNSTEIN ([3]) e R. WILSON ([4]), assicurano, in casi particolari, la presenza effettiva di una singolarità per $c(z)$ in questi punti e ne precisano la natura. È così possibile stabilire, qualora $a(z)$ e $b(z)$ appartengano ad una certa classe, se anche $c(z)$ appartiene alla stessa classe. Per esempio, se $a(z)$ e $b(z)$ sono funzioni uniformi con un numero finito di punti singolari, anche $c(z)$ è una funzione uniforme con un numero finito

(*) Pervenuta alla Segreteria dell U. M. I. il 26 gennaio 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C. N. R. (1962-63).

([1]) Si veda ad esempio L. BIEBERBACH, [2], pp. 29-31.

([2]) G. PÓLYA, [6], in particolare pag. 191.

([3]) V. BERNSTEIN, [1].

([4]) R. WILSON, [9].

di punti singolari; in particolare, se $a(z)$ e $b(z)$ sono funzioni razionali, anche $c(z)$ è una funzione razionale.

Viceversa, ci si può porre il problema se, dall'appartenenza di $c(z)$ ad una certa classe di funzioni, si possa dedurre che alla stessa classe appartengono anche $a(z)$ e $b(z)$. Il problema analogo nel caso della composizione secondo HADAMARD è stato trattato da R. BUCK ([5]), ma, per quanto riguarda la composizione secondo HURWITZ–PINCHERLE, ritengo che l'unico risultato finora conosciuto in questo tipo di questioni sia contenuto in una mia precedente Nota ([6]).

Nel presente lavoro, nell'ipotesi che entrambe le funzioni $a(z)$ e $b(z)$ siano uniformi con un numero finito di punti singolari, si studiano i legami fra i caratteri delle singolarità di $a(z)$ e $b(z)$ da una parte e quelli delle singolarità di $c(z)$ dall'altra.

Si perviene così ai seguenti risultati.

TEOREMA I. – « a(z) *e* b(z) *siano funzioni uniformi con un numero finito di punti singolari. Allora, anche* c(z) *è uniforme con un numero finito di punti singolari e il massimo ordine delle singolarità di* c(z) *è uguale al massimo fra gli ordini dei punti singolari di* a(z) *e* b(z) ».

TEOREMA II. – « a(z) *e* b(z) *siano uniformi con un numero finito di punti singolari. Allora, condizione necessaria e sufficiente perchè* c(z) *sia una funzione razionale è che* a(z) *e* b(z) *siano entrambe funzioni razionali* ».

Per quanto riguarda la dimostrazione del Teorema I, possiamo osservare quanto segue. È facile vedere che i punti singolari di $c(z)$ non possono essere di ordine superiore al massimo fra gli ordini dei punti singolari di $a(z)$ e $b(z)$; la difficoltà consiste nel dimostrare che *in qualunque caso* esiste sempre almeno un punto singolare di $c(z)$ avente ordine uguale al massimo fra gli ordini delle singolarità di $a(z)$ e $b(z)$. Si perviene al risultato utilizzando la nozione di ordine approssimato secondo LINDELÖF e di $V(r)$–tipo secondo VALIRON di una funzione intera di ordine finito.

Analoghe considerazioni valgono per il Teorema II.

([5]) R. BUCK, [3].
([6]) D. ROUX, [7], teorema I, pag. 51.

NOTA. - Ricordiamo qui la definizione di ordine approssimato secondo LINDELÖF e di $V(r)$-tipo di una funzione intera di ordine finito.

Si dice « ordine approssimato secondo LINDELÖF » di una funzione intera $f(z)$ di ordine finito ρ $(0 \leqq \rho < +\infty)$ una funzione $\rho(r)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1) $\rho(r)$ è reale, continua, derivabile salvo al più in una infinità numerabile di punti, nei quali però esistono $\rho'(r+)$ e $\rho'(r-)$, per $r \geqq r_0 \geqq 0$;

2) $\rho(r) \to \rho$, per $r \to +\infty$;

3) $\rho'(r)\, r \log r \to 0$, dove con $\rho'(r)$ si indica la derivata $d\rho / dr$ qualora essa esista, mentre, nei punti in cui questa derivata non esiste, con $\rho'(r)$ si indica sia la derivata destra $\rho'(r+)$, sia la derivata sinistra $\rho'(r-)$;

4) $$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log M(r)}{r^{\rho(r)}} = 1, \qquad (M(r) = \max_{|z| \leqq r} |f(z)|).$$

Sia $\rho(r)$ uua funzione soddisfacente le prime tre condizioni precedenti e poniamo $V(r) = r^{\rho(r)}$. Il $\overline{\lim} \log M(r)/V(r)$ viene chiamato « $V(r)$-tipo » di $f(z)$. È evidente che se $\rho(r)$ soddisfa anche la condizione 4), (cioè se $\rho(r)$ ê ordine approssimato di $f(z)$) il $V(r)$-tipo di $f(z)$ è uguale a uno [7].

Per qualunque funzione intera di ordine finito esiste sempre un ordine approssimato $\rho(r)$ secondo LINDELÖF [8].

2. Un Lemma sull'ordine approssimato secondo Lindelöf.

LEMMA 1. - « *Siano* $f_h(z)$, $(h = 1, 2, \ldots, n)$ n *funzioni intere di ordine finito e siano* $\rho_h(r)$ *loro ordini approssimati secondo Lindelöf. È sempre possibile determinare una funzione* $\rho(r)$ *soddisfacente le seguenti condizioni*

1) $$\rho(r) \leqq \max_{1 \leqq h \leqq n} \rho_h(r);$$

2) *esiste* k, $1 \leqq k \leqq n$, *tale che* $\rho(r)$ *è ordine approssimato secondo Lindelöf di* $f_k(z)$;

(7) Per questi argomenti vedasi ad esempio M. L. CARTWRIGHT, [4], in particolare cap. III e IV.

(8) S. M. SHAH, [8], e M. L. CARTWRIGHT, [4], pp. 56-58.

3) $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\log M_h(r)}{r^{\rho(r)}} \leqq 1 \quad (M_h(r) = \max\limits_{|z| \leqq r} | f_h(z) | \,,\ h=1, 2, \dots, n)$ *e vale il segno* $=$ *almeno per* h $=$ k *in forza della* 2) ».

Osservazione. - Dalla dimostrazione risulterà che, scelto comunque s, $1 \leqq s \leqq n$, è sempre possibile determinare $\rho(r)$ in modo da soddisfare la condizione ulteriore

4) $\rho(r) \geqq \rho_s(r)$.

In generale, la funzione $\rho(r)$ soddisfacente le condizioni 1), 2), 3), 4) varia al variare di s.

Dimostrazione. - Cominciamo a considerare il caso di due funzioni intere $f_1(z)$, $f_2(z)$.

Qualora sia definitivamente $\rho_1(r) \geqq \rho_2(r)$ possiamo assumere $\rho(r) \equiv \equiv \rho_1(r)$.

Qualora sia definitivamente $\rho_1(r) < \rho_2(r)$ possiamo assumere $\rho(r) \equiv \equiv \rho_2(r)$.

Se nessuna delle due condizioni precedenti risulta soddisfatta, allora si ha evidentemente $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho_1(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} \rho_2(r)$ ed esiste sul semiasse $r > 0$ un insieme aperto I, riunione di una infinità numerabile di intervalli aperti I_n non sovrapponentisi, tale che risulti $\rho_2(r) > \rho_1(r)$ se $r \in I$ e $\rho_2(r) \leqq \rho_1(r)$ se r non $\in I$.

Qualora sia

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M_2(r)}{r^{\rho_1(r)}} \leqq 1$$

possiamo assumere $\rho(r) \equiv \rho_1(r)$.

Qualora sia

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M_2(r)}{r^{\rho_1(r)}} > 1, \qquad \overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in I}}} \frac{\log M_2(r)}{r^{\rho_2(r)}} = 1$$

possiamo assumere $\rho(r) \equiv \rho_1(r)$ se r non $\in I$, $\rho(r) \equiv \rho_2(r)$ se $r \in I$.

Qualora infine sia

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M_2(r)}{r^{\rho_1(r)}} > 1, \qquad \overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in I}}} \frac{\log M_2(r)}{r^{\rho_2(r)}} < 1,$$

per qualche $\varepsilon > 0$ sarà definitivamente $(\log M_2(r))/r^{\rho_2(r)} < 1 - \varepsilon$, (cioè per $r \geqq r_0 \geqq 0$). Consideriamo allora gli intervalli I_n appartenenti al semiasse $r \geqq r_0$: per ciascuno di essi sarà possibile determinare una costante k_n, $0 < k_n < 1$, tale che, posto $\tilde{\rho}_n(r) = \rho_1(r) + k_n(\rho_2(r) - \rho_1(r))$, valga la limitazione

$$(\log M_2(r))/r^{\tilde{\rho}_n(r)} \leqq 1, \quad r \in I_n$$

e per almeno un valore $r \in I_n$ nella limitazione precedente valga il segno $=$.

Si ha allora

$$\varlimsup_{\substack{r \in I_n \\ n \to \infty}} \frac{\log M_1(r)}{r^{\tilde{\rho}_n(r)}} \leqq \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log M_1(r)}{r^{\rho_1(r)}} \leqq 1 ; \quad \varlimsup_{\substack{r \in I_n \\ n \to \infty}} \frac{\log M_2(r)}{r^{\tilde{\rho}_n(r)}} = 1$$

e pertanto potremo assumere

$$\rho(r) = \rho_1(r) \quad \text{se} \quad r < r_0, \quad \text{oppure} \quad r \geqq r_0,\ r \quad \text{non} \quad \in I_n ;$$

$$\rho(r) = \tilde{\rho}_n(r) \quad \text{se} \quad r \geqq r_0,\ r \in I_n .$$

In ogni caso sussiste la limitazione

$$\rho_1(r) \leqq \rho(r) \leqq \operatorname{Max}(\rho_1(r),\ \rho_2(r)).$$

Il Lemma 1 è allora dimostrato per $n = 2$: il caso $n > 2$ segue in modo ovvio, qualora si tenga presente la limitazione precedente.

3. Un Lemma di carattere algebrico.

LEMMA 2. - « *Siano*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \alpha_h \neq \alpha_k \quad \text{se} \quad h \neq k,$$

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m;\ \beta_h \neq \beta_k \quad \text{se} \quad h \neq k,$$

due sistemi di numeri complessi e siano a_1, a_2, a_n; b_1, b_2, ..., b_m

numeri reali qualsiasi. Poniamo

$$\gamma_{h,k} = \alpha_h + \beta_k, \quad c_{h,k} = a_h + b_k, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m).$$

Esiste un $\gamma_{r,s}$ *per il quale risultano verificate le seguenti condizioni*

1) $c_{r,s} = \operatorname*{Max}_{h,k} c_{h,k}$

2) *per ogni* $\gamma_{u,v} = \gamma_{r,s}$ *risulta* $c_{u,v} < c_{r,s}$ ».

Osservazione. - Quando si stabilisca la convenzione abituale $-\infty + x = x - \infty = -\infty - \infty = -\infty$, è facile vedere che i risultati del Lemma 2 continuano a sussistere per $-\infty \leqq a_h \leqq A(<+\infty)$, $-\infty \leqq b_k \leqq B(<+\infty)$, purchè esista almeno un $c_{h,k} > -\infty$.

Dimostrazione. - Possiamo supporre i numeri complessi $\alpha_h(h = 1, 2, \ldots, n)$ e $\beta_k(k = 1. 2, \ldots, m)$ ordinati in modo che le parti reali siano non crescenti e che i numeri di ugual parte reale abbiano le parti immaginarie in ordine decrescente.

Consideriamo la matrice $\| \gamma_{h,k} \|$ $(h = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m)$. Può accadere che sia $\gamma_{h,k} = \gamma_{u,v}$ soltanto se o $u > h$, $v < k$, oppure $u < h$, $v > k$. Ordiniamo gli elementi di questa matrice nel modo seguente: ogni riga da sinistra verso destra e le varie righe successivamente dall'alto verso il basso.

Diciamo $\gamma_{r,s}$ il primo elemento nell'ordine indicato per il quale sia $c_{r,s} = \operatorname{Max} c_{h,k}$: proveremo che questo elemento soddisfa le condizioni 1) e 2) del Lemma 2.

Infatti, sia $s = 1$: essendo $\gamma_{r,1}$ diverso da ogni altro $\gamma_{h,k}$ che lo segue, le condizioni 1) e 2) sono soddisfatte.

Sia $r = n$: essendo $\gamma_{n,s}$ diverso da ogni altro $\gamma_{h,k}$ che lo segue, le condizioni 1) e 2) sono soddisfatte.

Sia infine $1 \leqq r < n$, $1 < s \leqq m$.

1°) Quando $1 \leqq u < r$ non esiste alcuna coppia (u, v) per la quale risulti $c_{u,v} = c_{r,s}$.

2°) quando $u = r$, $v \neq s$, oppure $u \neq r$, $v = s$, oppure $r < u \leqq n$, $s < v \leqq m$, non esiste alcuna coppia (u, v) per la quale risulti $\gamma_{u,v} = \gamma_{r,s}$.

3°) Quando $r < u \leqq n$, $1 \leqq v < s$, se esiste una coppia (u, v) per la quale sia $\gamma_{u,v} = \gamma_{r,s}$, risulta necessariamente $c_{u,v} < c_{r,s}$. Infatti, se fosse $c_{u,v} = c_{r,s}$, avremmo $a_u + b_v = a_r + b_s = c_{r,s}$ e, poichè deve essere $a_r + b_v = c_{r,v} < c_{r,s}$ in quanto $\gamma_{r,v}$ precede $\gamma_{r,s}$ nell'ordinamento fissato degli elementi della matrice $\| \gamma_{h,k} \|$, ciò comporterebbe $a_u + b_s = c_{u,s} > c_{r,s}$; assurdo perchè $c_{r,s}$ è il valore $\underset{h,k}{\mathrm{Max}}\, c_{h,k}$.

Si conclude che in ogni caso $\gamma_{r,s}$ soddisfa le condizioni del Lemma 2, che risulta così dimostrato.

4. Dimostrazione del Teorema I.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ i punti singolari rispettivamente di $a(z)$ e di $b(z)$ (che sono poli o singolarità essenziali) ordinati in modo che le parti reali siano non crescenti e che quelli di uguale parte reale abbiano le parti immaginarie decrescenti.

Diciamo $f_h(z)$. $g_k(z)$ rispettivamente le parti caratteristiche di $a(z)$ e $b(z)$ in $z = \alpha_h$ e $z = \beta_k$. Avremo allora

$$a(z) = \sum_{h=1}^{h=n} f_h(z), \qquad b(z) = \sum_{k=1}^{k=m} g_k(z).$$

Poniamo $f_{h,k}(z) = f_h(z) \oplus g_k(z)$: la funzione $f_{h,k}(z)$ ha un solo punto singolare in $z = \gamma_{h,k} = \alpha_h + \beta_k$ (9) e questo punto singolare è al più una singolarità essenziale ed ha ordine uguale al massimo fra gli ordini delle singolarità di $f_h(z)$ in $z = \alpha_h$ e di $g_k(z)$ in $z = \beta_k$ (10).

Per la distributività della composizione secondo HURWITZ-PINCHERLE risulta

$$c(z) = a(z) \oplus b(z) = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=m} f_{h,k}(z)$$

e pertanto $c(z)$ è una funzione uniforme con un numero finito di punti singolari e non può avere singolarità di ordine superiore al massimo fra gli ordini delle singolarità di $a(z)$ e di $b(z)$.

Per dimostrare il Teorema I, occorre allora provare che *in nessun caso può accadere che le singolarità delle funzioni* $f_{h,k}(z)$

(9) Si veda ad esempio L. BIEBERBACH, [2], pp. 29-31.
(10) R. WILSON, [9], teoremi I, III, IV.

aventi ordine massimo si elidano tutte per somma o si riducano tutte per somma ad un ordine inferiore, anche se i punti $\gamma_{h,k}$, in cui queste singolarità sono collocate, vengano (in casi particolari) a coincidere.

A tale scopo, osserviamo preliminarmente che, qualora o α_1 o β_1 o entrambi siano punti singolari di ordine massimo $\bar{\rho}$, $\gamma_{1,1}$ è per $f_{1,1}(z)$ una singolarità di ordine $\bar{\rho}$ e, poichè $\gamma_{1,1}$ è diverso da ogni altro $\gamma_{h,k}$, $c(z)$ ha in $\gamma_{1,1}$ un punto singolare di ordine $\bar{\rho}$ e pertanto in questo caso vale il Teorema I.

Supponiamo ora che α_1 e β_1 siano entrambi punti singolari di ordine inferiore a $\bar{\rho}$. Ponendo rispettivamente $t=z-\alpha_h$, $t=z-\beta_k$, $t=z-\gamma_{h,k}$, le funzioni $f_h(z)$, $g_k(z)$, $f_{h,k}(z)$ vengono trasformate in funzioni intere di $1/t$: queste funzioni a loro volta sono le trasformate di Laplace-Borel di certe funzioni intere di t che chiameremo rispettivamente $F_h(t)$, $G_k(t)$, $F_{h,k}(t)$.

Sia ρ $(0 \leqq \rho \leqq +\infty)$ l'ordine e τ $(0 \leqq \tau \leqq +\infty)$ il tipo del punto singolare di $f_h(z)$; allora, qualora sia $\rho<+\infty$, $F_h(t)$ ha ordine $\rho/(\rho+1)$ e tipo $(\rho\tau)^{1/(\rho+1)}(\rho+1)/\rho$; qualora sia $\rho=+\infty$, $F_h(z)$ ha ordine 1 e tipo 0 [11]. Relazioni analoghe intercorrono fra l'ordine e il tipo delle singolarità di $g_k(z)$, $f_{h,k}(z)$ e l'ordine e il tipo, rispettivamente, di $G_k(t)$, $F_{h,k}(t)$. Inoltre $F_{h,k}(t)=F_h(t)\cdot G_k(t)$ [12].

Le funzioni $F_{h,k}(t)$ hanno tutte ordine non superiore a $\rho'= =\bar{\rho}/(\bar{\rho}+1)$ se $\bar{\rho}<+\infty$, oppure a $\rho'=1$ se $\bar{\rho}=+\infty$ e una almeno di esse ha ordine ρ': per il Lemma 1 esiste allora una funzione $\rho(r)\to\rho'$ che è ordine approssimato secondo Lindelöf per almeno una delle funzioni $F_{h,k}(t)$ e tale che, posto $V(r)=r^{\rho(r)}$, tutte le funzioni $F_{h,k}(t)$ abbiano $V(r)$-tipo non superiore ad uno e una almeno di esse abbia $V(r)$-tipo uguale ad uno [13].

Sia $F_{h^*,k^*}(t)$ una delle funzioni con $V(r)$-tipo uno. La funzione indicatrice di $V(r)$-accrescimento

$$h(\vartheta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log F_{h^*,k^*}(re^{i\vartheta})}{V(r)} \qquad (0\leqq\vartheta<2\pi)$$

ammette massimo per $0\leqq\vartheta<2\pi$ e questo massimo è 1, (il $V(r)$-tipo di $F_{h^*,k^*}(t)$ [14]): esistono allora un $\vartheta^*(0\leqq\vartheta^*<2\pi)$ e una suc-

(11) A. J Macintyre e R. Wilson, [5], in particolare pp. 299-300.
(12) R. Wilson, [9], pp. 486-488.
(13) Si veda la Nota nell'Introduzione.
(14) Si veda ad esempio M. L. Cartwright, [4], pag. 68.

cessione di numeri positivi $\{r_n\} \uparrow +\infty$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log F_{h^*,k^*}(r_n e^{i\vartheta^*})}{V(r_n)} = c_{h^*,k^*} = 1$$

Consideriamo ora le funzioni $F_h(t)$, $G_k(t)$, $F_{h,k}(t)$, $(h = 1, 2, \dots, n;$ $k = 1, 2, \dots, m)$: sarà possibile diradare la successione $\{r_n\}$ in modo tale che per ogni h e per ogni k esistano i limiti (eventualmente infiniti)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log F_h(r_n e^{i\vartheta^*})}{V(r_n)} = a_h, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log G_k(r_n e^{i\vartheta^*})}{V(r_n)} = b_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log F_{h,k}(r_n e^{i\vartheta^*})}{V(r_n)} = c_{h,k}.$$

Le funzioni $F_{h,k}(t)$ hanno $V(r)$-tipo $\leqq 1$ e pertanto, non potendo $c_{h,k}$ essere superiore al $V(r)$-tipo di $F_{h,k}(t)$, risulta

$$-\infty \leqq c_{h,k} \leqq 1 \qquad (h = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, m).$$

Veniamo a dimostrare che è anche $-\infty \leqq a_h \leqq 1$, $-\infty \leqq b_k \leqq 1$. Infatti, essendo α_1 e β_1 punti singolari di ordine inferiore a ρ, le funzioni $F_1(t)$ e $G_1(t)$ hanno ordine inferiore a ρ' e pertanto hanno $V(r)$-tipo 0. Ne segue che le funzioni $F_{h,1} = F_h \cdot G_1$ e $F_{1,k} = F_1 \cdot G_k$ hanno $V(r)$-tipo $\leqq 1$ e uguale, rispettivamente, al $V(r)$-tipo di $F_h(t)$ e $G_k(t)$ e quindi F_h e G_k hanno $V(r)$-tipo $\leqq 1$. Pertanto

$$-\infty \leqq a_h \leqq 1, \quad -\infty \leqq b_k \leqq 1, \qquad (h = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, m).$$

Di conseguenza risulta anche

$$c_{h,k} = a_h + b_k.$$

Osserviamo ora che, affinchè le singolarità di ordine massimo delle funzioni $f_{h,k}(z)$ si elidano tutte per somma o si riducano tutte per somma ad un ordine inferiore, è *necessario* che per ogni $\gamma_{h,k}$ cui corrisponde un $c_{h,k} > 0$ esista almeno un $\gamma_{u,v}$, con $(u, v) \neq (h, k)$, per il quale risulti

$$\gamma_{u,v} = \gamma_{h,k}, \quad c_{u,v} = c_{h,k}.$$

Ora, il Lemma 2 assicura che queste due uguaglianze non possono essere verificate simultaneamente per almeno una coppia (r, s) per la quale risulti

$$c_{r,s} = \operatorname*{Max}_{h,k} c_{h,k} = 1.$$

Il Teorema I risulta così dimostrato.

5. Dimostrazione del Teorema II.

Osserviamo preliminarmente che, in forza del Teorema I, $c(z)$ può essere razionale soltanto se tutti i punti singolari di $a(z)$ e $b(z)$ hanno ordine zero. Inoltre, se uno di questi punti non è un polo (cioè è un punto singolare essenziale), almeno una delle funzioni $F_{h,k}(t)$ non è un polinomio. Il suo massimo modulo $M_{h,k}(r)$ soddisfa pertanto la condizione $\lim_{r \to \infty} \log M_{h,k}(r) / \log r = +\infty$.

Consideriamo allora una funzione $\rho(r)$ soddisfacente le condizioni del Lemma 1 rispetto alle funzioni $F_{h,k}(t)$; per la presenza di almeno una funzione trascendente, posto $V(r) = r^{\rho(r)}$, qualunque polinomio ha $V(r)$–tipo zero. Con una dimostrazione del tutto analoga a quella del Teorema I, salvo ovvie modificazioni (l'ordine inferiore si riferirà ai poli e ai polinomi e l'ordine massimo alle singolarità essenziali ed alle trascendenti intere), si conclude che, qualora uno dei punti singolari di $a(z)$ o di $b(z)$ non sia un polo, $c(z)$ possiede almeno un punto singolare che non è un polo; si ottiene così il Teorema II.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. BERNSTEIN, *Sulla trasformazione di Hurwitz e sui funzionali lineari misti*, « Mem. R. Accad. Italia », **6**, parte 1, (1935), pp. 521-599.

[2] L. BIEBERBACH, *Analytische Fortsetzung*, Berlin 1955.

[3] R. BUCK, *Converse forms of the Hadamard product theorem*, « Duke Math. J », **26**, (1959), pp. 133-136.

[4] M. L. CARTWRIGHT, *Integral functions*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Phisics, n. 44, (1956).

[5] A. J. MACINTYRE e R. WILSON, *Associated integral functions and singular points of power series*, « J. London Math. Soc. », **22**, (1947), pp. 298-304.

[6] G. PÓLYA, *Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes*, « Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl. II^a, (1927), pp. 187-195.

[7] D. ROUX, *Sulla composizione per somma di due sistemi di numeri complessi e applicazione alle funzioni analitiche*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3), **17**, (1962), pp. 48-53.

[8] S. M. SHAH, *On proximate orders of integral functions*, « Bull. Amer. Math. Soc. », **52**, (1946), pp. 326-328.

[9] R. WILSON, *Some applications of the Hurwitz-Pincherle composition theory*, « J. London Math. Soc. », **28**, (1953), pp. 484-490.