Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ettore Carruccio

Equazioni logiche nel calcolo delle proposizioni.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.1, p. 44–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_1_44_0>

Equazioni logiche nel calcolo delle proposizioni

Nota di ETTORE CARRUCCIO (a S. Mauro Torinese) (*)

Sunto. - *Esaminata la struttura delle possibili equazioni logiche nel campo del calcolo delle proposizioni, si dimostrano le condizioni necessarie e sufficienti per la risolubità di dette equazioni nei diversi casi, e s'indicano i metodi per determinare le relative soluzioni.*

§ 1. - Preliminari.

Mentre notevoli sono le analogie fra proprietà formali delle operazioni fondamentali dell'algebra di BOOLE, e proprietà corrispondenti nell'algebra ordinaria, le teorie delle equazioni presentano invece, nei due campi, aspetti decisamente diversi, che pongono in chiara luce differenze essenziali nella struttura delle algebre considerate.

Questa constatazione risulterà illustrata dalla presente semplice esposizione di risultati riguardanti la risoluzione delle equazioni logiche nel campo del calcolo delle proposizioni, calcolo che costituisce una delle interpretazioni dell'algebra astratta di BOOLE.

Se ci proponiamo di precisare il *concetto di equazione logica* nel calcolo delle proposizioni ([1]), si è naturalmente condotti a pensare ad un'equivalenza del tipo

$$A \longleftrightarrow B \tag{1}$$

dove A e B sono espressioni costruite a partire da proposizioni date $P_1 P_2 \dots P_m$ e proposizioni incognite $X_1 X_2 \dots X_n$ mediante le

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 3 febbraio 1963.

([1]) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del 25° gruppo di ricerca del C. N. R, gruppo diretto dal Prof. T. VIOLA.

Ai fini delle applicazioni della logica matematica alle calcolatrici elettroniche ed all'automazione, una trattazione delle equazioni in un'algebra booleana, trovasi nel volume di R. S. LEDLEY, *Digital Computer and control engineering* (New York, Toronto. London, 1960) v. specialmente pp. 379-393, 411-413, 465-470. Le equazioni nell'algebra di BOOLE, inquadrate nella teoria dei reticoli, vengono trattate nel volume di M. CARVALLO, *Monographie des treilles et algèbre de Boole* (Paris 1962) pp. 51-59.

La presente trattazione delle equazioni logiche nel calcolo delle proposizioni è stata svolta in modo indipendente dalle precedenti.

operazioni di negazione congiunzione disgiunzione implicazione materiale, indicate rispettivamente dai simboli $\neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow$ ([2]).

Risolvere l'equazione logica (1) significa determinare espressioni del calcolo proposizionale che sostituite al posto di $X_1 X_2 \ldots X_n$ rendano la (1) sempre vera (per qualsiasi valore di verità attribuito alle proposizioni che compaiono nella (1) dopo la sostituzione).

Osserviamo ora che la (1) può trasformarsi nel modo seguente:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \tag{2}$$

od anche

$$\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A) \tag{3}$$

La (1) o, ciò che è lo stesso, la (2) o la (3) è una certa espressione E costruita a partire da proposizioni date $P_1 \ldots P_m$ e proposizioni incognite $X_1 \ldots X_n$ mediante le operazioni indicate dai segni $\neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow$. Pertanto il nostro problema si può enunciare chiedendo di determinare certe espressioni $(X_1 \ldots X_n)$ del calcolo proposizionale che, sostituite nella E, la rendano sempre vera. Viceversa la condizione di rendere una qualunque espressione E, del tipo considerato, sempre vera, può scriversi in modo che cada sotto la forma (1):

$$E \leftrightarrow (A \vee \neg A)$$

Ora, essendo stato risolto il problema della decisione nell'ambito del calcolo delle proposizioni, giova porre il problema delle equazioni logiche sotto la forma seguente:

Data un'espressione E *del calcolo delle proposizioni contenente proposizioni date* $\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$ *e proposizioni incognite* $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$ *dove* $\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$ *possono costituire eventualmente una classe vuota, ma non così le* $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$*, determinare espressioni del medesimo calcolo che sostituite rispettivamente alle* $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$ *rendano la* E *sempre vera.*

([2]) Il simbolismo adottato nel presente scritto è quello usato nell'opera: D. Hilbert e W. Ackermann, *Grundzüge der theoretische Logik*, Berlino 1959, dove il calcolo delle proposizioni viene ampiamente trattato in modo particolarmente semplice e chiaro.

Le nozioni su cui si basa il presente scritto si trovano anche brevemente nel § 5 del cap. XVIII del volume: E. Carruccio, *Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino 1958.

La nostra equazione assume quindi la forma:

$$E(P_1 P_2 \dots P_m, \quad X_1 X_2 \dots X_n) \longleftrightarrow \vee \tag{4}$$

dove $\vee$ indica il vero.

A seconda della struttura della E sono possibili diversi casi.

1) La E è sempre vera (ciò che può stabilirsi con un noto procedimento). In tal caso qualunque espressione sostituita nella (4) alle $X_1 \dots X_n$ soddisfa la relazione considerata. Esempio:

$$[(A \rightarrow X) \rightarrow (\longrightarrow X \rightarrow \longrightarrow A)] \longleftrightarrow \vee$$

2) La E è sempre falsa. In questo caso non esistono soluzioni dell'equazione considerata. Anche tale caso può essere individuato con noti procedimenti.

Esempio:

$$(X \wedge \longrightarrow X) \longleftrightarrow \vee$$

3) La E per certe distribuzioni di valori di verità attribuiti alle $P_1 \dots P_m$, $X_1 \dots X_n$, risulta vera e per altre distribuzioni risulta falsa.

In questo caso la (4) può ammettere soluzioni, od anche non ammetterne. Si presenta quindi il problema di ricercare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista qualche soluzione della (4).

§ 2. – **Equazioni ad una sola proposizione incognita.**

Cominciamo a ricercare la condizione di cui sopra nel caso di un'eqnazione (4) ad una sola incognita, cioè della forma

$$E(P_1 \dots P_m, \; X) \longleftrightarrow \vee . \tag{4'}$$

P. es. l'equazione

$$[(A \vee X) \wedge (\longrightarrow A \vee \longrightarrow X)] \longleftrightarrow \vee$$

ammette soluzioni, per esempio:

$$X \longleftrightarrow \longrightarrow A.$$

Ma questa soluzione non è la sola, vi è per esempio la seguente, che dipende da una proposizione arbitraria K (che non figura fra le date)

$$X \longleftrightarrow [(K \vee \longrightarrow A) \wedge (\longrightarrow K \vee \longrightarrow A)]$$

(La verifica è facile. Si vedrà in seguito come si determinano tali soluzioni).

Invece l'equazione

$$[(A \vee X) \wedge (B \vee \longrightarrow X)] \longleftrightarrow \vee,$$

pur non essendo sempre falsa l'espressione a sinistra del segno $\longleftrightarrow$, non ammette soluzioni nel senso sopra indicato, e cioè è impossibile sostituire alla X un'espressione del calcolo delle proposizioni che renda sempre vera detta relazione.

Infatti se poniamo A e B false, comunque si dia il valore di verità ad X, l'espressione considerata risulta falsa.

Per trovare una condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione logica (4') sia risolubile, si costruisca la matrice della $E(P_1 P_2 \dots P_m, X)$ in modo che in ogni linea orizzontale compaia una distribuzione dei valori delle $P_1 \dots P_m$ e della X, e in corrispondenza il valore di verità della E che ne risulta. Siano rappresentate nella matrice tutte le distribuzioni possibili di tali valori.

Si otterrà una matrice della forma:

P_1	P_2	....	P_m	X	E
p_{11}	p_{12}	....	p_{1m}	x_1	e_1
p_{21}	p_{22}	....	p_{2m}	x_2	e_2
...	...	....	...	...	...
...	...	....	...	...	...

(Ivi ciascun p_{ij} ed e_k è da intendersi come uno dei valori di verità: vero, falso).

Si ha sull'argomento considerato il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4') *ammetta soluzioni è che per ogni distribuzione di valori di verità delle* $P_1 \dots P_m$, *esista almeno un valore della* X *per la quale* E *risulti vera.*

La necessità è immediata: se per una certa distribuzione di valori di verità delle $P_1 \dots P_m$ per ogni valore della X, E risultasse falsa, non sarebbe possibile trovare un'espressione che sostituita alla X rendesse E sempre vera.

La sufficienza risulta dal fatto che nel caso considerato è possibile esprimere la X come funzione F delle $P_1 \ldots P_m$: a tal fine basta imporre alla F la condizione di assumere per ogni distribuzione di valori delle $P_1 \ldots P_m$ un valore per cui la E risulti vera (ciò si può ottenere mediante noti metodi) ([3]).

Talora per una stessa distribuzione di valori delle $P_1 \ldots P_m$ la E risulta vera per opposti valori di X.

(Per es. si consideri l'equazione

$$(P_1 \vee P_2 \vee X) \longleftrightarrow \mathrm{V}.$$

Se almeno una delle $P_1 P_2$ è vera, $P_1 \vee P_2 \vee X$ è vera qualunque sia il valore della X.)

Si hanno in tal caso soluzioni diverse imponendo per la X il valore vero, oppure il valore falso.

Con il procedimento indicato si determinano tutte le soluzioni della (4') della forma

$$X \longleftrightarrow F(P_1 P_2 \ldots P_m) \tag{5}$$

tuttavia non si hanno così tutte le soluzioni della (4'), in quanto si possono considerare le soluzioni dipendenti non da tutte le $P_1 \ldots P_m$, ma da una parte soltanto di esse che indicheremo con $P_r \ldots P_s$.

(È facile fornire esempi di questo genere. Sia data l'equazione:

$$(P_1 \vee P_2 \vee X) \longleftrightarrow \mathrm{V}$$

([3]) La F da quanto precede, è definita mediante la sua matrice, ma a partire da questa è anche possibile esprimere la F stessa mediante le proposizioni $P_1 \ldots P_m$ legate dalle operazioni di negazione congiunzione disgiunzione. La F, come si verifica immediatamente, si può scrivere sotto forma normale congiuntiva mediante la seguente regola: ogni termine della congiunzione è una disgiunzione corrispondente ad una distribuzione di valori delle variabili per cui la F é falsa. Ogni termine di tale disgiunzione è costituito da una delle variabili $P_1 \ldots P_m$, affermata se in questa distribuzione la variabile è falsa, negata se è vera. Si può, analogamente scrivere la F sotto forma normale disgiuntiva, partendo dalle distribuzioni di valori per cui l'espressione è vera.

Ovviamente si hanno le soluzioni

$$X \longleftrightarrow \longrightarrow P_1$$
$$X \longleftrightarrow \longrightarrow P_2 .)$$

Si presenta quindi il problema di trovare una condizione necessaria e sufficiente, affinchè esista una soluzione della (4') della forma

$$X \longleftrightarrow F(P_r \, ... \, P_s) \tag{6}$$

Si ha a tal proposito il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4') *ammetta una soluzione della forma* (6) *è che per ogni distribuzione di valori di verità di* $\mathrm{P}_r \, ... \, \mathrm{P}_s$, *esista almeno un valore di verità di* X *tale che* E *risulti vera, comunque mutino i valori di verità delle altre proposizioni date.*

La condizione è necessaria, in quanto, qualora non fosse soddisfatta per una certa distribuzione di valori delle $P_r \, ... \, P_s$ si potrebbe attribuire alle rimanenti proposizioni date dei valori tali per cui per qualsiasi valore attribuito alla X, la E risulterebbe falsa.

La condizione è sufficiente: infatti considerando la matrice dei valori $P_1 \, ... \, P_m XE$, si considerino le colonne relative a $P_r \, ... \, P_s XE$ e si costruisca la

$$X \longleftrightarrow F(P_r \, ... \, P_s) \tag{6}$$

imponendo a detta funzione di assumere in oorrispondenza di ogni distribuzione di valori per le $P_r \, ... \, P_s$ un valore di X per cui E risulti vera. Per la condizione considerata, qualunque sia il valore delle rimanenti proposizioni date la E sarà vera.

Altro tipo di soluzione è fornito da funzioni non soltanto delle $P_1 \, ... \, P_m$ date, ma anche di proposizioni arbitrarie $K_1 \, ... \, K_h$. Si tratta cioè di soluzioni del tipo

$$X \longleftrightarrow F(P_1 \, ... \, P_m , \quad K_1 \, .., K_h) \tag{7}$$

A questo scopo si consideri la matrice di tutte le distribuzioni possibili di valori di

$$P_1 \, ... \, P_m , \quad K_1 \, ... \, K_h \; X$$

alla quale si aggiunga la colonna dei valori di E determinati soltanto in base ai valori delle $P_1 \ldots P_m$ e della X.

Si determina la funzione $X \leftarrow\rightarrow F(P_1 \ldots P_m, K_1 \ldots K_h)$ imponendo ad essa per ogni distribuzione di valori di $P_1 \ldots P_m$. $K_1 \ldots K_h$ di assumere un valore per il quale la E risulta vera.

Da quanto precede si ricava che, una volta soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione della (4'), esistono infinite soluzioni dell'equazione stessa, dipendenti da 1, 2, 3 ... h proposizioni arbitrarie $K_1 \ldots K_h$, con h arbitrario.

Un altro tipo di soluzioni si ha quando la X è funzione di una parte delle proposizioni date $P_r \ldots P_s$ e delle proposizioni arbitrarie $K_1 \ldots K_h$ si tratta cioè di soluzioni della forma

$$(8) \qquad X \leftarrow\rightarrow F(P_r \ldots P_s, K_1 \ldots K_h)$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4') abbia soluzioni del tipo ora considerato è analoga a quella stabilita per le soluzioni della forma

$$(6) \qquad X \leftarrow\rightarrow F(P_r \ldots P_s),$$

ed è analoga la relativa dimostrazione, come pure la determinazione delle infinite soluzioni della forma considerata, quando sia soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di dette soluzioni.

Un caso limite del precedente è quello in cui la X non è funzione delle $P_r \ldots P_s$ ma solo delle proposizioni arbitrarie $K_1 \ldots K_h$:

$$(8') \qquad X \leftarrow\rightarrow F(K_1 \ldots K_h)$$

In particolare ciò accade inevitabilmente quando nella (4') mancano le $P_1 \ldots P_m$ e l'equazione si riduce alla forma:

$$(4'') \qquad E(X) \leftarrow\rightarrow \vee.$$

Una soluzione del tipo (8') può presentarsi solo in una di queste tre circostanze: la (4') o la (4'') è soddisfatta dalla proposizione sempre vera esprimibile sotto la forma:

$$X \leftarrow\rightarrow [(K_1 \vee \rightarrow K_1) \wedge (K_2 \vee \rightarrow K_2) \wedge \ldots \wedge (K_h \vee \rightarrow K_h)]$$

o dalla sempre falsa, rappresentabile con

$$X \leftarrow\rightarrow [(K_1 \wedge \rightarrow K_1) \vee (K_2 \wedge \rightarrow K_2) \vee \ldots \vee (K_h \wedge \rightarrow K_h)]$$

o infine è soddisfatta da una X del tutto arbitraria (il che ovviamente significa che la (4′) o (4″) è sempre vera).

Si vede facilmente che tutte le soluzioni della (4′) sono comprese nelle espressioni (5) (6) (7) (8) (8′) in quanto dette espressioni esauriscono i casi possibili, e per ogni caso si determinano, con i procedimenti indicati tutte le soluzioni.

§ 3. - **Un esempio.**

Applichiamo i procedimenti indicati alla determinazione delle soluzioni dell'equazione logica proposizionale ad una incognita:

$$[(P_1 \vee P_2 \vee X) \wedge (\rightarrow P_1 \vee P_2 \vee \rightarrow X)] \longleftrightarrow \mathrm{V}.$$

A tale scopo formiamo la matrice (9) in cui 0 indica il falso e 1 il vero:

P_1	P_2	X	E
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Si verifica facilmente che è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione data abbia soluzioni.

Cerchiamo ora le soluzioni del tipo

$$X \longleftrightarrow F(P_1 P_2)$$

La matrice di detta funzione sarà:

P_1	P_2	X	
0	0	1	
0	1	1	(altra soluzione con $X = 0$)
1	0	0	
1	1	1	(altra soluzione con $X = 0$)

Con i procedimenti sopra indicati si trovano le soluzioni (facilmente verificabili):

$$X \longleftrightarrow (\rightarrow P_1 \vee P_2)$$
$$X \longleftrightarrow [(P_1 \vee \rightarrow P_2) \wedge (\rightarrow P_1 \vee P_2)]$$
$$X \longleftrightarrow (\rightarrow P_1 \wedge \rightarrow P_2)$$
. . . .

Si tratta ora di stabilire se esistono soluzioni del tipo

$$X \longleftrightarrow F(P_1) \quad \text{e} \quad X \longleftrightarrow F(P_2).$$

Per la prima si ottiene la matrice

P_1	X
0	1
1	0

e quindi $X \longleftrightarrow (\rightarrow P_1)$.

Invece non esistono soluzioni del tipo

$$X \longleftrightarrow F(P_2)$$

Ricerchiamo ora le soluzioni dell'equazione data contenente proposizioni arbitrarie cominciando dal caso di una di queste K.

A tale scopo costruiamo la matrice (10)

P_1	P_2	K	X	E
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Per ricercare le possibili soluzioni del tipo

$$X \longleftrightarrow F(P_1 P_2 K)$$

formiamo una delle matrice della X che soddisfano le nostre con dizioni:

P_1	P_2	K	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Si avrà quindi:

$$X \longleftrightarrow [(\rightarrow P_1 \vee P_2 \vee K) \wedge (\rightarrow P_1 \vee P_2 \vee \rightarrow K)].$$

(Facile è la verifica).

Consideriamo ora una soluzione del tipo

$$X \longleftrightarrow F(P_1 K)$$

Formiamo quindi una matrice di tutti i valori possibili di P_1 e di K e di valori di X scelti in modo che E risulti vera (qualun que sia il valore di P_2) partendo dalla matrice (10)

P_1	K	X
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Quindi si ottiene

$$X \longleftrightarrow [(\rightarrow P_1 \vee K) \wedge (\rightarrow P_1 \vee \rightarrow K)]$$

. . . .

§ 4. - **Equazioni con un numero qualsiasi di proposizioni incognite.**

Resta da considerare l'equazione

(4) $$E(P_1 P_2 \dots P_m,\ X_1 X_2 \dots X_n) \longleftrightarrow \vee$$

nel caso generale, cioè per un numero qualsiasi n di proposizioni incognite $X_1 X_2 \dots X_n$.

Generalizzando quanto si è stabilito nel caso di una sola incognita, si ottiene:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4) *ammetta soluzioni è che per ogni distribuzione di valori delle* $P_1 P_2 \dots P_m$, *esista almeno una distribuzione di valori delle* $X_1 X_2 \dots X_n$, *per la quale* E *risulti vera.*

La condizione è necessaria: infatti se la condizione indicata non fosse soddisfatta, allora vi sarebbe una distribuzione di valori delle $P_1 \dots P_n$ tale che per qualsiasi sistema di valori attribuito alle $X_1 \, . \, . \, X_n$, renderebbe falsa l'espressione E; ciò significa che non esisterebbe una soluzione della (4).

La condizione è sufficiente: infatti, se la condizione è soddisfatta, per ogni distribuzione di valori delle $P_1 \dots P_m$ è possibile scegliere una distribuzione di valori delle $X_1 \dots X_n$ tale che E risulti vera. Eseguita una di queste scelte, per ogni distribuzione di valori delle $P_1 \dots P_m$, ogni X_ι risulterà una funzione determinata delle $P_1 \dots P_m$, in base alla condizione di assumere per ciascuna distribuzione di valori delle $P_1 \dots P_m$ quel certo valore di X_ι prescelto in corrispondenza, in una delle distribuzioni di valori delle $X_1 \dots X_n$ che rende vera E.

Risulta immediatamente che in questo modo si ottengono tutte e sole le soluzioni della (4) della forma:

(11) $$X_\iota \longleftrightarrow F_\iota(P_1 P_2 \dots P_m)$$

Tuttavia, come si può facilmente arguire dall'esame della equazione (4'), la (11) non esaurisce le soluzioni della (4).

Altre soluzioni possibili sono quelle in cui una X_ι è funzione di una parte soltanto delle $P_1 \dots P_m$. Si cercano cioè le soluzioni della forma

(12) $$X_\iota \longleftrightarrow F_\iota(P_r \dots P_s).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano soluzioni della (4) *della forma* (12), *è che per ogni distribuzione delle* $P_r \dots P_s$, *qualunque sia la distribuzione di valori delle rimanenti* $P_1 \dots P_m$, *esista sempre almeno una distribuzione di valori delle* $X_1 \dots X_n$, *tale che* E *risulti sempre vera.*

In tal caso è facile costruire effettivamente funzioni della forma (12) soddisfacenti alla (4): si scelga per ogni distribuzione di valori delle $P_r \dots P_s$, una distribuzione di valori delle $X_1 \dots X_n$ per cui E sia vera. Si costruiscono quindi le X_t funzioni di $P_r \dots P_s$ in modo che assumano in corrispondenza delle possibili distribuzioni di valori di $P_r \dots P_s$ i valori rispettivi delle X_t per cui E sia vera.

Si noti che se esistono soluzioni del tipo (12), esistono anche soluzioni del tipo (11).

Se è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4) abbia soluzioni del tipo (11), la (4) avià anche soluzioni del tipo

(13) $$X_t \longleftrightarrow F_t(P_1 \dots P_m,\ K_1 \dots K_h)$$

Analogamente se è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4) ammetta soluzioni della forma (12), avrà anche soluzioni della forma

(14) $$X_t \longleftrightarrow F_t(P_r \dots P_s K_1 \dots K_h)$$

Le soluzioni (13) e (14) quando esistono si costruiscono facilmente con procedimenti analoghi a quelli esposti in casi precedenti.

Un caso limite del precedente è quello in cui nell'espressione delle X_t nessuna delle $P_1 \dots P_m$ compare: cioè

(14′) $$X_t \longleftrightarrow F_t(K_1 \dots K_h)$$

Evidentemente, condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4) ammetta soluzioni del tipo (14′) è che esista almeno una distribuzione di valori delle $X_1 \dots X_n$ per cui la E sia sempre vera, per qualunque distribuzione di valori attribuiti alle $P_1 \dots P_m$.

Per costruire la soluzione del tipo (14′) basterà imporre alla F_t la condizione di assumere i valori richiesti affinchè la E sia sempre vera. Si hanno così tutte le soluzioni del tipo considerato.

A questo punto possono presentarsi degli interrogativi: quali relazioni intercedono fra le varie forme di soluzioni? A partire da una di queste, le altre si possono ricavare come particolarizzazioni?

Effettivamente le forme (11) (12) (14) (14′) possono considerarsi come particolarizzazioni della forma (13).

Infatti la matrice che rappresenta la funzione

$$X_t \longleftrightarrow F_t(P_1 \dots P_m,\ K_1 \dots K_h)$$

si riduce ad una in cui mancano alcune P_z o K_z, quando fermo restando il valore di verità delle altre proposizioni considerate, la X_t non cambia di valore se si muta il valore di verità delle P_z o K_z. Viceversa una espressione della forma (11) (12) (14) (14′), evidentemente può essere scritta sotto la forma (13) la quale in sostanza è suscettibile di rappresentare tutte le soluzioni della (4) [4].

Rimane da considerare l'equazione della forma

(4‴) $$E(X_1 \dots X_n) \longleftrightarrow V$$

La soluzione, se esiste, non può essere che della forma

$$(14') \qquad X_i \longleftrightarrow F_i(K_1 \dots K_h)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la (4‴) abbia soluzioni è che sia vera per qualche distribuzione di valori di verità delle $X_1 \dots X_n$. cioè che la $E\ (X_1 \dots X_n)$ sia soddisfacibile (non sempre falsa).

La condizione è manifestante necessaria. Che sia sufficiente risulta dal fatto che, quando la condizione è soddisfatta, si può porre ciascuna delle X_i uguale a $K_i \vee \rightarrow K_i$ se deve essere vera o a $K_i \wedge \rightarrow K_i$ se deve essere falsa.

La soluzione generale della (4‴) si trova con procedimenti analoghi a quelli già esposti: le F_i, risultano determinate dalle matrici delle distribuzioni dei valori delle $K_1 \dots K_h$ e del valore di X_i prescelto in corrispondenza in una delle distribuzioni delle $X_1 \dots X_n$ per cui E risulta vera.

Esempi di risoluzione d'equazioni (4) possono venir facilmente costruiti dal Lettore, analogamente a quanto è stato visto nel § 3.

§ 5. – Sistemi di equazioni logiche.

Se ad un un certo numero di proposizioni incognite imponiamo la condizione di soddisfare simultaneamente certe equazioni, otteniamo un sistema di equazioni logiche della forma:

$$\begin{cases} E_1 \quad (P_{11} \dots P_{1m},\ X_1 \dots X_n) \longleftrightarrow \vee \\ E_2 \quad (P_{21} \dots P_{2m},\ X_1 \dots X_n) \longleftrightarrow \vee \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ E_y \quad (P_{y1} \dots P_{ym},\ X_1 \dots X_n) \longleftrightarrow \vee \end{cases}$$

Si nota però che questo sistema equivale ad un'unica equazione:

$$[E_1(P_{11} \dots P_{1m},\ X_1 \dots X_n) \wedge E_2(P_{21} \dots P_{2m},\ X_1 \dots X_n) \wedge \dots$$
$$\dots \wedge E_y(P_{y1} \dots P_{ym},\ X_1 \dots X_n)] \longleftrightarrow \vee .$$

Pertanto tutta la teoria dei sistemi di più equazioni logiche si riduce alla teoria delle equazioni logiche singole.

Naturalmente, con un semplice mutamento di linguaggio, le considerazioni esposte valgono per un'astratta algebra di Boole e per le sue diverse interpretazioni.

(4) Non si esclude tuttavia che alcune delle $P_1 \dots P_n$ e delle $K_1 .. K_h$ nell'espressione (13) si eliminino in modo che in definitiva qualche X_i risulti funzione di certe preposizioni, mentre un'altra X_i risulta funzione di proposizioni diverse.