FRANCESCO SPERANZA

# Sulle superficie anolonome di uno spazio a connessione lineare.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **18** (1963), n.2, p. 108–111.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_2_108_0>

# Sulle superficie anolonome di uno spazio a connessione lineare.

Nota di Francesco Speranza (a Bologna) (*) (**)

**Sunto.** - *Si riferiscono alcuni risultati relativi alla determinazione delle connessioni lineari per le quali una superficie anolonoma gode di certe proprietà valevoli per le superficie anolonome d'uno spazio affine.*

**Summary.** - *Some results on the determination of linear connexions whose non-holonomic surfaces have some properties valable in an affine space are related.*

**1.** Si enunciano qui alcune proprietà delle superficie anolonome di uno spazio a connessione lineare; più precisamente si indicano gli spazi a connessione lineare a tre dimensioni ($\mathfrak{L}_3$), nei quali una qualsiasi superficie anolonoma d'un tipo prefissato gode di certe proprietà valevoli per le superficie anolonome d'uno spazio affine. Le relative dimostrazioni si troveranno in un lavoro di prossima pubblicazione negli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna ».

In uno spazio a connessione lineare $\mathfrak{L}_3$ (definito su una varietà differenziabile $B_3$) (1) diciamo superficie anolonoma una sezione locale $S$ (che si supporrà differenziabile di classe $C^2$) nello spazio fibrato dei piani appartenenti agli spazi vettoriali tangenti a $B_3$ (2). Si definiscono agevolmente, per $S$:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 28 febbraio 1963.

(1) Cfr. A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, (Cremonese, Roma, 1955), pp. 72 e segg.

(2) Cfr. la def. data, in altra forma, da G. Vranceanu, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. II (Ed. de l'Acad. de la R. P. R., Bucarest, 1957) p. 233 e segg.

la proiettività di BOMPIANI $K$ (3) (considereremo solamente le $S$ per cui $K$ non è singolare) e quindi l'invariante assoluto della proiettività $K'$ subordinata nel « piano tangente » ad $S$;
le curve asintotiche;
le curve direttrici (4).

Si hanno poi le linee di curvatura affini, così definite: sia $\gamma$ una curva di $S$, e $\gamma'$ il suo sviluppo in uno spazio affine $A_3$; ad ogni punto di $\gamma'$ associamo l'immagine della relativa tangente direttrice: se la rigata così ottenuta è sviluppabile, $\gamma$ è una linea di curvatura affine. Infine si considerano le rigate $R$, ottenute sviluppando una curva direttrice di $S$ in $A_3$, ed associando ad ogni punto l'immagine d'una delle tangenti asintotiche relative.

**3.** Particolare importanza hanno nel seguito tre tipi di spazi $\mathfrak{L}_3$:

1) $\mathfrak{L}_3^*$: sono caratterizzati dall'annullarsi del 1° tensore $\mathfrak{T}$ di torsione e del 1° e del 3° tensore irriducibile di curvatura (5); le loro forme di curvatura e di torsione sono date dalle:

$$\Omega^i = \omega^i \wedge \psi \qquad \Omega_k{}^i = G^i \omega^{k'} \wedge \omega^{k''} + \delta_i{}^k \Omega$$

(dove $k, k', k''$ è una permutazione di classe pari; $\psi$ e $\Omega$ sono forme rispettivamente lineare e quadratica).

(3) Cfr. E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonome*, I, II: « Rend. Acc. Naz. Lincei », (s. 6) t. **27**, pp. 37-45 e 45-52 ($1938_2$); G. VRANCEANU, op. cit. in (2), p. 238 e segg.

(4) Per le rette direttrici d'una trasformazione dualistica fra spazi euclidei, cfr. B. SEGRE, *Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra spazi euclidei*, « Rend. Circ. Mat. Palermo » t. **60**, pp. 224-232 (1936); per le ipersuperficie anolonome di $\mathfrak{L}_n$ cfr. G. VRANCEANU, l. c. in (3) (dove però son dette *normali affini*).

(5) Sulla decomposizione dei tensori di torsione e di curvatura cfr. E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, « Ann. Ec. Norm. Sup. » (s. 3): t. **40**, pp. 325-412 (1923); t. **41**, pp. 1-25 (1924); t. **42**, pp. 17-88 (1925), v. il n. 96 e segg.

2) $\mathfrak{L}_3^{**}$: sono caratterizzati dall'annullarsi di $\mathfrak{T}$, del 1° tensore di curvatura e d'una certa combinazione del 4° e del 5°. Le loro forme sono date dalle

$$\Omega^i = \omega^i \wedge \psi \qquad \Omega_1{}^2 = K_1 \omega^1 \wedge \omega^2 - G^2 \omega^2 \wedge \omega^3$$

$$\Omega_2{}^1 = - K_2 \omega^1 \wedge \omega^2 + G^1 \omega^3 \wedge \omega^1 \qquad \Omega_1{}^1 = \Sigma - G^3 \omega^1 \wedge \omega^2 + G^2 \omega^3 \wedge \omega^1$$

(le altre si ottengono per permutazione circolare degli indici; $\psi$ e $\Sigma$ sono forme rispettivamente lineare e quadratica).

3) $\mathfrak{L}_3^{***}$: sono gli $\mathfrak{L}_3$ che risultano tanto $\mathfrak{L}_3^*$ che $\mathfrak{L}_3^{**}$; essi sono gli $\mathfrak{L}_3$ a parallelismo assoluto locale per cui $\mathfrak{T}$ è nullo. Si ottengono assegnando, in riferimenti opportuni, le seguenti forme di PFAFF

$$\omega_i{}^k = - \delta_i{}^k \psi \qquad (\psi \text{ forma lineare arbitraria}).$$

Tutti questi spazi posseggono $\infty^3$ piani (cioè $\infty^3$ superficie per cui la proiettività di coniugio è singolare di specie massima) ed in essi la proiettività delle tangenti coniugate relative ad una qualunque superficie è involutoria.

**4.** Ho dimostrato che (in quel che segue $S$ indica una superficie anolonoma, per cui $K$ non sia singolare, differenziabile di classe $C^2$, soddisfacente alle condizioni di volta in volta precisate, e peraltro arbitraria):

*Gli spazi $\mathfrak{L}_3^*$ sono tutti e soli gli $\mathfrak{L}_3$ nei quali vale una delle seguenti proprietà:*

I) *Per una $S$ ad asintotiche distinte, se vale la proposizione*

1) *" Le asintotiche d'un sistema sono linee di curvatura affini "*

*vale pure la*

2) *" Le rigate $R$ relative sono sviluppabili "* [6].

II) *Le asintotiche di una $S$ a punti parabolici sono linee di curvatura affini.*

III) *In una $S$ a punti parabolici, se vale la proposizione*

1) *" I due sistemi di linee di curvatura affini coincidono nel sistema di asintotiche "*

*vale pure la*

2) " *Le rigate R sono sviluppabili* „ (6).

IV) *Le linee di curvatura affini di una S ad asintotiche indeterminate sono indeterminate.*

*Gli spazi* $\mathfrak{L}_3$** *sono tutti e soli quelli in cui*

V) *Le tangenti alle linee di curvatura affini d'uno strato di superficie ad asintotiche distinte sono coniugate rispetto alle asintotiche* (7).

*Gli spazi* $\mathfrak{L}_3$*** *sono tutti e soli gli* $\mathfrak{L}_3$ *nei quali vale una delle seguenti proprietà:*

VI) *Per una S ad asintotiche distinte, se vale la proposizione*

1) " *Le tangenti alle linee di curvatura affini di S sono coniugate rispetto alle asintotiche* „

*vale pure la*

2) " *L'invariante di K' è costante lungo le direttrici* „ (6).

VII) *Per una S ad asintotiche distinte, se vale la proposizione*

1) " *Le linee di curvatura affini di S sono indeterminate* „

*vale pure la*

2) " *L'invariante di K' è costante lungo le direttrici e le rigate R sono sviluppabili* „ (6).

(6) Gli spazi nei quali dalla 2) segue la 1) sono i medesimi.

(7) La caratterizzazione degli $\mathfrak{L}_3$** è valida anche se alle parole « coniugate rispetto alle asintotiche » si sostituiscono le parole « corrispondenti in *K'* ». Le linee di curvatura affini dello strato (cioè della *S* costituita dai piani tangenti alle superficie dello strato) non vanno confuse con le linee di curvatura delle singole superficie.