CATALDO AGOSTINELLI

Su alcuni teoremi di media in magentofluidodinamica nel caso stazionario.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 211–219.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_211_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Su alcuni teoremi di media in magnetofluidodinamica nel caso stazionario

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino) (*)

Sunto. - *Si stabiliscono delle formule che esprimono altrettanti teoremi di media per i moti magneto fluidodinamici stazionari.*

1. Le equazioni della magnetofluidodinamica, quando si trascura la corrente di spostamento in confronto della corrente di conduzione, col ben noto significato dei simboli sono [1]

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0\\
(1)\qquad &B=\mu\boldsymbol{H}\\
&\boldsymbol{I}=\gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})\\
&\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{F}-\operatorname{grad}p+(\lambda'+\mu')\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\mu'\Delta_2\boldsymbol{v}\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,
\end{aligned}
$$

dove la conduttività elettrica γ e la permeabilità magnetica μ, nonchè i coefficienti di viscosità λ', μ', si suppongono costanti.

Nel caso di moti magneto fluidodinamici stazionari si ha $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$, e dalle prime cinque delle equazioni (1) si ricava per il campo magnetico l'equazione

$$(2)\qquad \Delta_2\boldsymbol{H}=\gamma\mu\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v}).$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 29 aprile 1963.

(1) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Problemi di Magnetofluidodinamica, ecc.* « Atti del Simposio sulla Magnetofluidodinamica », Bari 10-14 gennaio 1961, (Edizioni Cremonese, Roma).

Così pure l'equazione del moto e quella di continuità diventano

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v} = \mu \frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H} - \operatorname{grad}\left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) + \tag{3}$$

$$+ \rho \boldsymbol{F} + (\lambda' + \mu')\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mu'\Delta_2\boldsymbol{v}$$

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{4}$$

essendo $\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ e $\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}$ omografie vettorali che rappresentano le derivate rispetto al punto P dei vettori $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{H}$.

2. Ciò premesso consideriamo, nell'interno del campo occupato dal fluido. un dominio sferico S, con centro in un punto qualsiasi P_0, limitato da una superficie sferica σ di raggio r_σ arbitrario, e integriamo ambo i membri della (2) rispetto al volume sferico S. Si ha così

$$\int_S \Delta_2\boldsymbol{H}\cdot dS = \gamma\mu \int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v})\cdot dS. \tag{5}$$

Ora, per le formule preliminari di Green, risulta

$$\int_S \Delta_2\boldsymbol{H}\cdot dS = \int_\sigma \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial r}\, d\sigma = \frac{d}{dr_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{H}d\sigma$$

$$\int_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v})\cdot dS = \int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v})\cdot d\sigma$$

nell'ultima delle quali $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale esterna alla superficie sferica σ. Sostituendo nella (5) si ottiene

$$\frac{d}{dr_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{H}d\sigma = \gamma\mu\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v})\cdot d\sigma. \tag{6}$$

Applichiamo ora alla sfera S la formula di Green

$$4\pi U(P_0) = \int_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma - \int_S \frac{1}{r}\Delta_2 U\cdot dS, \tag{7}$$

dove U è funzione finita e continua colle derivate prime e seconde in tutto il dominio che si considera. Essa sussiste anche nel caso in cui U è un vettore, e poichè r è ora la distanza di un punto P dal centro P_0 della sfera S, quella formula diventa

$$(7') \qquad 4\pi U(P_0) = \frac{1}{r_\sigma}\frac{d}{dr_\sigma}\int_\sigma U d\sigma + \frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma U d\sigma - \int_S \frac{\Delta_2 U}{r} dS.$$

Ponendo in luogo di U il vettore $\boldsymbol{H}$ che rappresenta il campo magnetico, e tenendo conto della (2) si deduce

$$(8) \qquad 4\pi \boldsymbol{H}(P_0) = \left(\frac{1}{r_\sigma}\frac{d}{dr_\sigma} + \frac{1}{r^2_\sigma}\right)\int_\sigma \boldsymbol{H} d\sigma - \gamma\mu \int_S \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) dS.$$

Ma

$$\int_S \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) dS = \int_S \mathrm{rot}\left(\frac{1}{r}\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}\right) dS - \int_S \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \wedge (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) \cdot dS =$$

$$= \frac{1}{r_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) d\sigma - \int_S \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \wedge (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) \cdot dS.$$

Sostituendo nella (8). e semplificando, avendo riguardo alla (6), si ha infine

$$4\pi \boldsymbol{H}(P_0) = \frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{H} d\sigma + \gamma\mu \int_S \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \wedge (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) dS,$$

che esprime un teorema di media per il campo magnetico.

3. Integrando ora ambo i membri dell'equazione (3) del moto rispetto al volume della sfera S, otteniamo

$$(10) \qquad \int_S \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \boldsymbol{v} \cdot dS = \mu \int_S \frac{d\boldsymbol{H}}{dP} \boldsymbol{H} \cdot dS - \int_S \mathrm{grad}\left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) \cdot dS + \int_S \rho \boldsymbol{F} \cdot dS +$$

$$+ (\lambda' + \mu') \int_S \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \cdot dS + \mu' \int_S \Delta_2 \boldsymbol{v} \cdot dS.$$

Avendo riguardo all'equazione (4) di continuità, se si indicano con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane del punto P, e con v_1, v_2, v_3 le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ risulta

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}\rho v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i\cdot v)$$

e quindi, per le formule di GAUSS,

$$\int_S\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}\cdot dS=\int_\sigma\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\cdot d\sigma.$$

Analogamente, essendo div $\boldsymbol{H}=0$, si ha

$$\int_S\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\cdot dS=\int_\sigma\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}\cdot d\sigma.$$

L' equazione (10) diventa pertanto

$$(11)\quad\int_\sigma\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\cdot d\sigma=\mu\int_\sigma\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}\cdot d\sigma-\int_\sigma\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\boldsymbol{n}d\sigma+\int_S\rho\boldsymbol{F}\cdot dS+$$
$$+(\lambda'+\mu')\int_\sigma\operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma+\mu'\frac{d}{dr_\sigma}\int_\sigma\boldsymbol{v}d\sigma.$$

Applicando d'altra parte la formula (7') di GREEN al vettore $\boldsymbol{v}$, si ottiene

$$(12)\qquad 4\pi\boldsymbol{v}(P_0)=\left(\frac{1}{r_\sigma}\frac{d}{dr_\sigma}+\frac{1}{r^2_\sigma}\right)\int_\sigma\boldsymbol{v}d\sigma-\int_S\frac{1}{r}\Delta_2\boldsymbol{v}\cdot dS.$$

Ma sostituendo in luogo di $\Delta_2\boldsymbol{v}$ il valore che si ricava dalla (3), si ha

$$(13)\quad\int_S\frac{1}{r}\Delta_2\boldsymbol{v}\cdot dS=\int_S\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\mu'}\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}-\frac{\mu}{\mu'}\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}+\frac{1}{\mu'}\operatorname{grad}\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\mu'}\rho\boldsymbol{F}-\frac{\lambda'+\mu'}{\mu'}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right\}dS.$$

Con facile calcolo si vede che risulta

$$\int_S \frac{1}{r}\cdot\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{v}\cdot dS = \frac{1}{r_\sigma}\int_\sigma \rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\cdot d\sigma - \int_S \rho\boldsymbol{v}\times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{v}\cdot dS$$

$$\int_S \frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{H}}{dP}\boldsymbol{H}\cdot dS = \frac{1}{r_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}\cdot d\sigma - \int_S \boldsymbol{H}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{H}\cdot dS$$

$$\int_S \frac{1}{r}\operatorname{grad}\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\cdot dS = \frac{1}{r_\sigma}\int_\sigma \left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\boldsymbol{n}\cdot d\sigma -$$

$$-\int_S \left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot dS$$

$$\int_S \frac{1}{r}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot dS = \frac{1}{r_\sigma}\int_\sigma \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma - \int_S \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,dS.$$

Sostituendo allora nella (13), e quindi nella (12), e semplificando, tenendo conto della (11), si ottiene

$$4\pi\boldsymbol{v}(P_0) = \frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{v}d\sigma + \frac{1}{\mu'}\int_S \rho\boldsymbol{v}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{v}\cdot dS - \tag{14}$$

$$-\frac{\mu}{\mu'}\int_S \boldsymbol{H}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{H}\cdot dS +$$

$$+\frac{1}{\mu'}\int_S\left(p+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot dS + \frac{1}{\mu'}\left[\int_S \frac{1}{r}\rho\boldsymbol{F}dS - \frac{1}{r_\sigma}\int_S \rho\boldsymbol{F}dS\right] -$$

$$-\frac{\lambda'+\mu'}{\mu'}\int_S \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot dS,$$

che esprime un teorema di media per la velocità in un punto P_0 del campo di moto.

Nel caso di un fluido incompressibile di densità ρ_0, e in assenza di forze di natura non elettromagnetica ($\boldsymbol{F}=0$), la (14) diventa più semplicemente

$$(15)\qquad 4\pi \boldsymbol{v}(P_0) = \frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{v}d\sigma + \frac{\rho_0}{\mu'}\int_S \boldsymbol{v}\times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot \boldsymbol{v}dS -$$

$$-\frac{\mu}{\mu'}\int_S \boldsymbol{H}\times \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot \boldsymbol{H}dS + \frac{1}{\mu'}\int_S \left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot dS.$$

4. Osserviamo che la (11), risoluta rispetto all'$\int_\sigma \left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right)\boldsymbol{n}d\sigma$, fornisce il risultante della pressione totale sulla superficie σ. Essa è valida qualunque sia il dominio S, salvo la modifica dell'ultimo integrale, e può comprendere anche tutto il campo in cui si muove il fluido.

In questo caso, se supponiamo che il fluido elettricamente conduttore sia contenuto in un recipiente limitato da una parete rigida σ, perfettamente conduttrice, al limite su σ dovremo avere

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n} = 0,$$

e in tal caso la (11) porge

$$(16)\qquad \int_\sigma \left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right)\boldsymbol{n}d\sigma =$$

$$= \int_S \rho\boldsymbol{F}dS + (\lambda' + \mu')\int_\sigma \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma + \mu'\int_S \frac{d\boldsymbol{v}}{dn}d\sigma.$$

Se più in particolare il fluido è non viscoso e le forze di massa non elettromagnetiche sono nulle, si ha che il risultante delle pressioni totali sulla superficie limite σ è nullo.

È facile dimostrare ancora che insieme alla (16) sussiste l'equazione dei momenti [2]

[2] Si osservi che risulta $(P-0)\wedge\Delta_2\boldsymbol{v} = \Delta_2[(P-0)\wedge\boldsymbol{v}] - 2\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$, e quindi

$$\int_S (P-0)\wedge\Delta_2\boldsymbol{v}\cdot dS = \int_\sigma \frac{d}{dn}[(P-0)\wedge\boldsymbol{v}]d\sigma - 2\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}\cdot d\sigma =$$

$$= \int_\sigma (P-0)\wedge\frac{d\boldsymbol{v}}{du}d\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}d\sigma.$$

$$(17) \qquad \int_\sigma (P - O) \wedge \left(p + \frac{1}{2}\mu H^2\right) \boldsymbol{n}\, d\sigma =$$

$$\int_S (P - O) \wedge \rho \boldsymbol{F} dS + (\lambda' + \mu') \int_\sigma (P - O) \wedge \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma +$$

$$\mu' \left[\int_\sigma (P - O) \wedge \frac{d\boldsymbol{v}}{dn} d\sigma - \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v} \cdot d\sigma \right],$$

dove O è un punto fisso.

5. Un altro teorema di media si può stabilire per il vettore vortice. Invero l'equazione (3) del moto si può scrivere

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \wedge \rho \boldsymbol{v} = \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} p - \frac{1}{2} \rho \operatorname{grad} v^2 + \rho \boldsymbol{F} +$$

$$+ (\lambda' + \mu') \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu' \Delta_2 \boldsymbol{v}$$

prendendo il rotore di ambo i membri, e ponendo $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \omega$, si ricava

$$\Delta_2 \omega = \frac{1}{\mu'} \operatorname{rot} (\omega \wedge \rho \boldsymbol{v}) - \frac{\mu}{\mu'} \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}) +$$

$$+ \frac{1}{2\mu'} \operatorname{grad} \rho \wedge \operatorname{grad} v^2 - \frac{1}{\mu'} \operatorname{rot} (\rho \boldsymbol{F}).$$

Con procedimento analogo a quello dei numeri precedenti, sempre con riferimento ad una sfera S di centro P_0 e raggio r_σ, si deduce

$$(18) \qquad 4\pi\omega(P_0) = \frac{1}{r^2_\sigma} \int_\sigma \omega\, d\sigma + \frac{1}{2\mu' r_\sigma} \int_S \operatorname{grad} \rho \wedge \operatorname{grad} v^2 \cdot dS -$$

$$- \frac{1}{2\mu'} \int_S \frac{1}{r} \operatorname{grad} \rho \wedge \operatorname{grad} v^2 \cdot dS + \frac{1}{\mu'} \int_S \operatorname{grad} \frac{1}{r} \wedge (\omega \rho \boldsymbol{v}) dS -$$

$$-\frac{\mu}{\mu'}\int_S \operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H})dS-\frac{1}{\mu'}\int_S \operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge\rho\boldsymbol{F}\cdot dS$$

che esprime un teorema di media per il vortice.

Nel caso di un fluido incompressibile e in assenza di forze di massa non elettromagnetiche si ha più semplicemente

$$4\pi\omega(P_0)=\frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma \omega d\sigma+\frac{\rho_0}{\mu'}\int_S \operatorname{grad}\frac{1}{2}\wedge(\omega\wedge\boldsymbol{v})dS-\tag{19}$$

$$-\frac{\mu}{\mu'}\int_S \operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H})\cdot dS.$$

6. Nel caso di piccoli movimenti di un fluido incompressibile soggetto a un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{H}_0$. supposto che il campo magnetioo indotto h sia molto piccolo, trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a $\boldsymbol{v}$ ed $\boldsymbol{h}$, e supponendo nulle le forze di massa non elettromagnetiche, le equazioni (2) e (3) si riducono alle seguenti

$$\Delta_2\boldsymbol{h}=\gamma\mu\operatorname{rot}(\boldsymbol{H}_0\wedge\boldsymbol{v})\tag{20}$$

$$\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{h}\wedge\boldsymbol{H}_0-\operatorname{grad}p+\mu'\Delta_2\boldsymbol{v}=0\tag{21}$$

con $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ e $\operatorname{div}\boldsymbol{h}=0$.

Dalle (20) e (21) con procedimento analogo a quello dei numeri precedenti si ricava

$$4\pi\boldsymbol{h}(P_0)=\frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{h}d\sigma+\gamma\mu\int_S \operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge(\boldsymbol{H}_0\wedge\boldsymbol{v})dS\tag{22}$$

$$4\pi\boldsymbol{v}(P_0)=\frac{1}{r^2_\sigma}\int_\sigma \boldsymbol{v}d\sigma+\frac{1}{\mu'}\int_S p\operatorname{grad}\frac{1}{r}dS-\tag{23}$$

$$-\frac{\mu}{\mu'}\int_S\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\wedge\boldsymbol{h}\right)\wedge\boldsymbol{H}_0\cdot dS.$$

Inoltre, prendendo ora la divergenza di ambo i membri della (21) si ha

$$\Delta_2(p + \mu \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{H}_0) = 0, \tag{24}$$

cioè la $p + \mu \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{H}_0$ è una funzione armonica, e si ha senz'altro un' altro

$$(p + \mu \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{H}_0)_{P_0} = \frac{1}{4\pi r^2_\sigma} \int_\sigma (p + \mu \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{H}_0) d\sigma \tag{25}$$

come conseguenza del teorema della media di GAUSS.