Bollettino Unione Matematica Italiana

Dionisio Gallarati

Un'osservazione sopra i semigruppi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.3, p. 279–280.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_3_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Un'osservazione sopra i semigruppi

Nota di Dionisio Gallarati (a Genova) (*)

Sunto. - *Come le prime dieci righe.*

È ben noto che un semigruppo (cioè un monoide associativo) nel quale siano risolubili tutte le equazioni della forma

$$ax = \lambda, \qquad ya = \lambda \tag{1}$$

è un gruppo; è dotato cioè di elemento identico ed ogni suo elemento è unità. Non è forse inutile rilevare che tale ipotesi può essere sostituita con quella che abbiano una ed una sola soluzione tutte le equazioni del tipo (1) aventi un dato secondo membro λ. Sussiste cioè la seguente proposizione: *un semigruppo* Σ *che possegga un elemento* λ *tale che per ogni* $a \in \Sigma$ *ciascuna delle equazioni* $ax = \lambda$, $ya = \lambda$ *abbia una ed una sola soluzione, è un gruppo.*

Ed ecco la semplice dimostrazione. Esistono per ipotesi quattro elementi u', λ', u'', λ'' (univocamente determinati da λ) tali che:

$$\lambda u' = \lambda^2\lambda' = u''\lambda = \lambda''\lambda^2 = \lambda. \tag{2}$$

Ne segue $\lambda\lambda' = u'$, $\lambda''\lambda = u''$; ed inoltre $\lambda u'\lambda = \lambda u''\lambda = \lambda^2$. Di qui, moltiplicando a destra per λ' e tenendo conto delle (2):

$$(\lambda u')\lambda\lambda' = \lambda(u''\lambda)\lambda' = \lambda^2\lambda' = \lambda,$$

eppertanto:

$$\lambda u' = \lambda u'' = \lambda. \tag{3}$$

Ciò implica $u' = u''$. Poniamo $u' = u'' = u$. Dalla $\lambda u = \lambda$ segue $\lambda u^2 = \lambda u = \lambda$ e quindi $u^2 = u$; si ha poi, tenendo conto delle (3)

$$\lambda\lambda''u = \lambda\lambda''\lambda\lambda' = \lambda(\lambda''\lambda)\lambda' = \lambda u\lambda' = \lambda\lambda' = u$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 17 giugno 1963.

e quindi

$$\lambda\lambda''\lambda = \lambda\lambda''u\lambda = u\lambda = \lambda.$$

Ne segue $\lambda\lambda'' = u$ e quindi $\lambda^2\lambda'' = \lambda u = \lambda$; eppertanto:

$$\lambda'' = \lambda'; \qquad \lambda'\lambda = u = \lambda\lambda'.$$

Se ora σ denota un qualunque elemento di Σ e se α, β sono i due elementi di Σ (univocamente determinati da σ) tali che $\sigma\alpha = \sigma\beta = \lambda$, risulta:

$$\sigma(\alpha\lambda') = \lambda\lambda' = u, \qquad (\lambda'\beta)\sigma = \lambda'\lambda = u;$$

e si vede subito che u è elemento identico, cioè che $\sigma u = u\sigma = \sigma$. Infatti $(u\sigma)\alpha = u(\sigma\alpha) = u\lambda = \lambda = \sigma\alpha$ e similmente: $\beta(\sigma u) = (\beta\sigma)u = \lambda u = \lambda = \beta\sigma$. Inoltre $\alpha\lambda' = (\lambda'\beta)\sigma(\alpha\lambda') = (\lambda'\beta)u = \lambda'\beta$ è l'inverso di σ. Ciò basta per concludere.

Ed ecco alcune immediate conseguenze. Un semigruppo con cancellazione che possegga un elemento zeroide (1) è un gruppo. Un dominio di integrità dotato di un elemento zeroide è un corpo.

(1) Un elemento λ di un semigruppo Σ dicesi zeroide se per ogni $a \in \Sigma$ esistono x, $y \in \Sigma$ tali che $ax = ya = \lambda$. Cfr. ad esempio: A. H. CLIFFORD e D. D MILLER, *Semigroups having zeroid elements*, « Am. Journ. of Math. » (70) 1948, pp, 117-125.