Aldo M. Pratelli

Su alcune discontinuità trasversali in magnetofluidodinamica.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.4, p. 382–397.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_382_0>

Su alcune discontinuità trasversali in magnetofluidodinamica

Nota di ALDO M. PRATELLI (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *Si dimostra che attraverso il fronte d'onda di Alfvén, il quale si propaga, oltre che nei liquidi e nei gas ideali, anche nei gas in cui è nullo il primo coefficiente di viscosità e positivo il secondo (purchè il fluido sia perfettamente conduttore dell'elettricità) si mantiene continuo il gradiente della pressione «totale» (somma dell'ordinaria pressione e della pressione «magnetica»).*

Si constata poi che, sempre nell'ipotesi che sia nullo solo il primo coefficiente di viscosità e non il secondo, possono esistere fronti d'onda che si propagano con celerità qualsiasi: attraverso ad essi saltano le derivate seconde della velocità e, sotto opportune ipotesi, anche le derivate seconde dell'induzione magnetica.

Summary. - *The autor proves that, when the electrical conductivity is infinite, across the Alfvén wave front, which propagates as well in the incompressible fluids and in the ideal gases, as in gases which have the 1st (shear) viscosity coefficient equal to zero and the 2nd (compressional) viscosity coefficient positive, the gradient of the «total pressure» (sum of the mean pressure and of the «magnetic» pressure) remain continuous.*

The author proves afterwards that, still under the assumption that the 1st viscosity coefficient is null and not the 2nd, there may exist wave fronts which propagates with any velocity relative to the fluid; across them the second derivatives of the velocity are discontinuous and, under convenient assumptions, also the second derivatives of the magnetic induction.

In magnetofluidodinamica non relativistica ideale («ideale» nel senso che il fluido comprimibile è considerato non viscoso, non conduttore del calore e perfettamente conduttore dell'elettricità) il procedimento delle varietà caratteristiche ha rivelato la presenza di più modi e celerità di propagazione: i risultati sono stati trovati, sotto ipotesi che differiscono in modo non essenziale e con procedimenti un poco diversi, da vari autori e a breve distanza di tempo (si veda [5], [6], [8], [8a], [9] ed altri)

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 17 giugno 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Nei gas ordinari reali, quando si distingue tra pressione termodinamica p e pressione media $\bar{p}$ (o valor medio del tensore degli sforzi) il primo coefficiente di viscosità dinamica η (viscosità di slittamento o di scorrimento o viscosità propriamente detta) e il secondo coefficiente λ (viscosità di compressione) non sono più legati dalla relazione di STOKES (che corrisponde all'annullarsi della viscosità di volume $\omega = \lambda + 2\eta/3$).

Nell'ipotesi, ripeto, che si abbandoni la relazione di STOKES, possono esistere fronti d'onda fissi rispetto al gas ordinario e possono esistere anche fronti d'onda che si propagano nel gas con celerità qualsiasi, purchè sia $\eta = 0$ e $\lambda > 0$: attraverso questi fronti saltano trasversalmente le derivate seconde della velocità, come ho mostrato in una recente Nota [11].

In magnetofluidodinamica non è stato studiato solo il caso ideale, ma anche quelli in cui $k > 0$, $1/\sigma\mu > 0$: ad esempio, se il fluido non è viscoso, NARDINI [8] e PAI [10] hanno mostrato l'esistenza di fronti d'onda, e ne hanno precisato la celerità, quando il gas ionizzato non è perfetto conduttore dell'elettricità: il primo supponendo il fluido barotropico (il che comporta un legame finito tra densità materiale e pressione, ed esclude il ricorso alla termodinamica), il secondo supponendo monodimensionale la corrente del fluido, con il campo magnetico perpendicolare alla velocità del fluido stesso (quindi tangente al fronte d'onda) e distinguendo inoltre il caso in cui la conducibilità termica è nulla da quello in cui non lo è.

La presente Nota è dedicata allo studio delle discontinuità trasversali attraverso i fronti d'onda, nel caso in cui sia $\eta = 0$, $\lambda > 0$, mentre la conducibilità termica possa considerarsi nulla o no, e il fluido possa considerarsi o no perfetto conduttore della elettricità.

L'ipotesi $\eta = 0$, $\lambda > 0$, ha un'interpretazione ben precisa in Aerotermochimica (si veda la [11] e le indicazioni date ivi). In magnetofluidodinamica non mi risulta che esista, almeno per ora, un esempio di gas conduttore dell'elettricità in cui si sia constatato $\eta = 0$ e $\lambda > 0$: mi sembra rimanga comunque significativo lo studio del diverso ufficio che svolgono i due coefficienti di viscosità.

Constatato così che quando $\eta > 0$ (qualunque valore abbiano i rimanenti coefficienti) nessun fronte d'onda è possibile; quando invece $\eta = 0$, $\lambda > 0$, $1/\sigma\mu = 0$ (e $k \geq 0$) rimane il fronte d'onda che si propaga con la celerità di ALFVÉN, come nei fluidi incomprimibili e come nei fluidi comprimibili ideali; su questo fronte si mantengono continue le derivate della densità e si mantiene continuo il gradiente della pressione « totale », analogamente a quanto avviene nella magnetoidrodinamica non viscosa e in magnetofluidodinamica ideale

Ricerco poi le superfici mobili (fronti d'onda) attraverso le quali sono continue le funzioni incognite, le loro derivate prime, mentre può presentare discontinuità qualche derivata seconda, e constato che possono esistere fronti che si propagano con celerità qualsiasi, attraverso i quali saltano le derivate seconde della velocità (se $1/\sigma\mu > 0$) e anche le derivate seconde dell'induzione magnetica (se $1/\sigma\mu = 0$ e se l'induzione stessa non è tangente al fronte d'onda).

§ 1. Il sistema di equazioni.

Il moto del fluido e l'induzione magnetica sono riferiti a un sistema di coordinate qualsiasi x^i dello spazio fisico tridimensionale; assumiamo come incognite le tre componenti $v^k = v^k(x, t)$ della velocità e le tre componenti $B^k = B^k(x, t)$ dell'induzione magnetica, oltre a due variabili termodinamiche: la densità materiale $\rho = \rho(x, t)$ e l'entropia specifica $S = S(x, t)$.

In tutta la presente Nota gli indici sono indicati con lettere latine ed assumono i valori 1, 2, 3.

La pressione termodinamica p, e la temperatura assoluta T sono invece considerate funzioni note regolari di ρ ed S (¹):

$$p = p(\rho, S) \tag{1}$$

$$T = T(\rho, S). \tag{2}$$

Si considerano costanti il primo coefficiente di viscosità η, il secondo coefficiente di viscosità λ (e quindi il coefficiente di

(¹) Le funzioni date dalla (1) e dalla (2) sono qualsiasi (salvo per la p l'obbedienza alle condizioni di WEYL [12]) ma non indipendenti; per i legami tra p, T e l'energia interna specifica si veda [11], cui rimando per la distinzione tra pressione termodinamica p e pressione media $\bar{p} = p_{ik}a^{ik}/3$; in particolare $p - \bar{p} = \omega v_r{}^{/r}$. Si veda anche HIDE e ROBERTS [7].

viscosità di volume $\omega = \lambda + 2\eta/3$) la conducibilità termica k, la conducibilità elettrica σ e la permeabilità magnetica μ [2].

Nell'ipotesi $v'^2/c^2 \ll 1$ (ove v' è il modulo d'una velocità tipica del fluido, mentre c è la velocità della luce nel vuoto), usando il sistema di misura M. K. S. A., le equazioni indefinite sono [3]:

$$\text{(3a)} \quad \rho \frac{dv_k}{dt} + p_{/k} + \frac{1}{\mu} B^j B_{j/k} - \frac{1}{\mu} B^j B_{k/j} = \rho F_k + \lambda(v_i{}^{/i})_{/k} + \eta(v_{i/k} + v_{k/i})^{/i}$$

$$\text{(3b)} \quad \frac{dB_k}{dt} + B_k v^r{}_{/r} - B^i v_{k/i} = \frac{1}{\sigma\mu} B_{k/i}{}^{i}; \qquad \text{(3b')} \quad B_k{}^{/k} = 0$$

$$\text{(3c} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho v_r{}^{/r} = 0$$

$$\text{(3d)} \quad \rho T \frac{dS}{dt} = \lambda(v_r{}^{/r})^2 + \eta v_{i/k}(v^{k/i} + v^{i/k}) + k T_{/i}{}^{i} +$$

$$+ (1/\sigma\mu^2) B_{l/m}(B^{m/l} - B^{l/m})$$

[2] La permeabilità magnetica μ ha, nei gas, valore praticamente eguale a quello che ha nel vuoto; i coefficienti η, λ, k, σ, dipendono dalla natura del fluido e sono funzioni empiriche del suo stato termodinamico, ma il considerarli costanti non reca pregiudizio alla generalità dei risultati nella ricerca delle varietà caratteristiche. Nel sistema di misura usato (sistema GIORGI) hanno le dimensioni fisiche della viscosità cinematica le seguenti diffusività

$$[\eta/\rho] = [\lambda/\rho] = [k/\rho S] = [1/\sigma\mu].$$

[3] La lineetta inclinata indica derivata tensoriale nello spazio euclideo tridimensionale; il punto indica derivata parziale rispetto al tempo, mentre la derivata totale o sostanziale di una funzione $f = f(x\ t)$ rispetto al tempo, calcolata seguendo la particella, è

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} + f_{/k} v^k.$$

Vale la convenzione della somma; a_{ik} rappresenta il tensore fondamentale. Per le definizioni che non vengono date esplicitamente cfr. [4].

mentre il tensore degli sforzi è dato da

$$p_{ik} = (p - \lambda v,{}^{/r}) a_{ik} - \eta (v_{i/k} + v_{k/i}).$$

La (3a) è l'equazione della quantità di moto (F_k indica la forza esterna specifica di massa di natura non elettromagnetica). La (3b) è ottenuta dopo aver trascurato la corrente elettrica di spostamento e quella di convezione, e dopo aver eliminato il campo elettrico tra l'equazione che traduce la legge di OHM e quella che traduce la legge di FARADAY; la condizione (3b') traduce la mancanza di cariche magnetiche. La (3c) è l'equazione di conservazione della massa e la (3d) è l'equazione dell'entropia. Per il secondo principio della termodinamica debbono esser soddisfatte le condizioni

$$(4) \quad \eta \geq 0; \qquad (4') \quad \omega \geq 0; \qquad (4'') \quad k \geq 0; \qquad (4''') \quad 1/\sigma\mu \geq 0.$$

Il sistema (3) è normale nella t ed è invariante di fronte a una trasformazione di GALILEO [4]. Esso, tenute presenti la (1) e la (2), consta di otto equazioni differenziali nelle otto funzioni incognite v^k, B^k, ρ, S, in quanto la (3b') è conseguenza della (3b) sotto opportune condizioni iniziali e al contorno [5]. Non riporto condizioni iniziali nè al contorno perchè non intervengono nella ricerca delle varietà caratteristiche.

§ 2. Le varietà caratteristiche nel fluido ideale.

Se $\lambda = \eta = 0$, $k = 0$, $1/\sigma\mu = 0$, i secondi membri delle equazioni (3a) (3b) (3d) sono nulli: le otto equazioni differenziali sono tutte del primo ordine e costituiscono un sistema iperbolico.

[4] Circa l'invarianza di fronte a una trasformazione di GALILEO si veda ad esempio GRAD [6]; ricordo solo che nell'ordine di approssimazione $v'^2/c^2 \ll 1$ l'induzione magnetica è invariante di fronte a una trasformazione di GALILEO, mentre è stato eliminato il campo elettrico che invece non è invariante.

[5] Posto $\Gamma = B_k{}^{/k}$, dalla (3b) si deduce, prendendo la divergenza d'ambo i membri

$$\dot{\Gamma} + \Gamma_{/r} v^r + \Gamma v^r{}_{/r} = \frac{1}{\sigma\mu} \Gamma_{/i}{}^{i}$$

e questa, sotto opportune condizioni iniziali e al contorno, ammette l'integrale $\Gamma = 0$, in conformità alla (3b').

Esso è stato studiato da Friedrichs e Kranzer [5] nella forma qui riportata (si tenga presente che la (3d) col secondo membro nullo sta a indicare che l'entropia rimane costante seguendo il moto della particella fluida, anche se in un certo istante può differire tra una particella e un'altra) e da Nardini [8, 8a] Ong [9] Agostinelli [1, 1a] e altri nell'ipotesi che l'entropia specifica rimanga costante in tutto il campo di moto, cioè che il fluido sia barotropico, in quanto la (1') si riduce a un'equazione complementare, finita, $p = p(\rho)$ ([6]).

Indicata con $\tau(x, t) = \tau_0$ l'equazione della varietà caratteristica (ipersuperficie dello spaziotempo cinematico su cui sono continue le funzioni incognite mentre possono presentare discontinuità di prima specie le loro derivate prime) si ha

$$\left\{ \frac{d\tau}{dt} \right\} \left\{ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - (b_i \tau^{/i})^2 \right\} \tag{5}$$

$$\left\{ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^4 - (a^2 + b^2) \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \tau_{/i} \tau^{/i} + a^2 \tau_{/i} \tau^{/i} (b_i \tau^{/i})^2 \right\} = 0$$

in cui s'è posto $b_i = B_i / \sqrt{\rho\mu}$, $b^2 = b_i b^i$, $a^2 = \dfrac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}$ (derivata parziale calcolata a entropia costante).

L'annullarsi del primo fattore significa che la varietà caratteristica è luogo di linee orarie della particella, cioè il fronte d'onda ha una celerità di propagazione nulla rispetto al fluido.

L'annullarsi del secondo fattore testimonia la presenza d'un fronte d'onda che si propaga attraverso il fluido con la celerità di Alfven. Su di esso le discontinuità sono trasversali, cioè tangenti al fronte d'onda.

L'annullarsi del terzo fattore corrisponde alla presenza di fronti d'onda magnetosonici (dovuti all'interdipendenza di feno-

([6]) L'elenco, che dò nelle indicazioni bibliografiche, dei lavori sui fronti d'onda in magnetofluidodinamica, col procedimento delle varietà caratteristiche o con altri (ad esempio quello delle ipersuperfici singolari) non pretende di esser completo. Per il caso in cui il fluido sia ideale, e si supponga $p = p(\rho)$, cosicchè il sistema si riduca a sette equazioni differenziali in sette incognite, cfr. ad esempio Courant-Hilbert [3] p. 613.

meni acustici e magnetici): avverto solo che tali discontinuità non sono vettori tangenti al fronte d'onda.

Il fronte che si propaga con la celerità di ALFVÉN (o, brevemente, « fronte di ALFVÉN », cioè quello corrispondente all'annullarsi del secondo fattore della (5)), è presente nei fluidi perfettamente conduttori dell'elettricità, incomprimibili o comprimibili (7). Mostrerò ora che il fronte di ALFVÉN sussiste anche in un gas in cui sia $\eta = 0$, $\omega = \lambda > 0$, e metterò in luce il comportamento delle varie « pressioni » attraverso ad esso.

§ 3. Il fronte di Alfvén e il gradiente della pressione « totale ».

3.1 FLUIDO INCOMPRIMIBILE - Se il fluido è inoltre perfettamente conduttore, $(1/\sigma\mu = 0)$ non viscoso $(\eta = 0)$ il sistema di equazioni differenziali riguardanti la magnetoidrodinamica ha per incognite v^k, B^k e la pressione $\bar{p}$ (la indico con $\bar{p}$ invece che con p come è consuetudine. per evitare confusione con la p data dalla (1)); nessuna ipotesi vien fatta sui coefficienti λ e k, che comunque non intervengono nelle equazioni. Esse sono

$$\text{(6a)} \qquad \frac{dv_k}{dt} + \frac{1}{\rho}\bar{p}_{/k} + F_k + \frac{1}{\rho\mu} B^i B_{i/k} - \frac{1}{\rho\mu} B^i B_{k/i} = 0$$

$$\text{(6b)} \qquad \frac{dB_k}{dt} - B^i v_{k/i} = 0 ; \qquad \text{(6b')} \quad B_k{}^{/k} = 0$$

$$\text{(6c)} \qquad v_i{}^{/i} = 0$$

ove la (6b') è conseguenza della (6b) (analogamente a quanto avviene per la (3b') nei confronti della (3b)).

Indichiamo i salti delle derivate prime delle funzioni incognite attraverso le caratteristiche premettendo la lettera Δ ai simboli

(7) R. S. ONG [9] dimostra che quando un fluido è comprimibile possono esser discontinue, attraverso il fronte di ALFVEN, le derivate prime della velocità e dell'induzione magnetica, mentre sono continue le derivate della densità materiale; tale autore suppone implicitamente che ρ e p siano legate da una equazione complementare $p = p(\rho)$; ma è ovvia l'estensione al caso in cui invece la p sia data dalla (1).

delle derivate stesse, e introduciamo i sette moltiplicatori α_ι, β_ι, π; le condizioni cinematiche relative alle discontinuità sono:

$$\Delta v_{\iota/k} = \alpha_\iota \tau_{/k} \qquad \Delta B_{\iota/k} = \beta_\iota \tau_{/k} \qquad \Delta \bar{p}_{/k} = \pi \tau_{/k}\,.$$

Le condizioni dinamiche relative alle discontinuità delle derivate prime permettono di scrivere il seguente sistema di otto equazioni lineari omogenee nei sette moltiplicatori α_ι, β_ι, π:

$$\text{(7a)} \qquad \alpha_k \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\rho}\,\pi\tau_{/k} + \frac{1}{\rho\mu}\,B^\iota \beta_\iota \tau_{/k} - \frac{1}{\rho\mu}\,B^\iota \beta_k \tau_{/\iota} = 0$$

$$\text{(7b)} \qquad \beta_k \frac{d\tau}{dt} - B^\iota \alpha_k \tau_{/\iota} = 0; \qquad \text{(7b')} \quad \beta_k \tau^{/k} = 0$$

$$\text{(7c)} \qquad \alpha_\iota \tau^{/\iota} = 0.$$

Innanzi tutto osserviamo che saturando la (7b) con $\tau^{/k}$ si ottiene

$$\beta_k \tau^{/k} \frac{d\tau}{dt} - B^\iota \tau_{/\iota} \alpha_k \tau^{/k} = 0$$

e questa, per la (7b′) e la (7c), è un'identità. Sostanzialmente quindi il sistema (7) è equivalente a un sistema di sette equazioni nei sette moltiplicatori π, α_k, β_k, conformemente al fatto che il sistema (6) si riduce a un sistema di sette equazioni indefinite indipendenti in sette funzioni incognite.

Se invece saturiamo la (7a) con $B^\iota \beta_k \tau_{/\iota}$ (il che esige sia $B^\iota \tau_{/\iota} \neq 0$, cioè viene escluso il caso in cui l'induzione magnetica risulti tangente al fronte d'onda), la (7b) con $\beta_k \dfrac{d\tau}{dt}$ ed eliminiamo poi $\dfrac{d\tau}{dt} B^\iota \tau_{/\iota} \alpha^k \beta_k$ tra le due equazioni, troviamo:

$$\text{(8)} \qquad \beta_k \beta^k \left\{ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - (b_\iota \tau^{/\iota})^2 \right\} = 0$$

e quindi potremo avere valori non tutti nulli per β_k quando è nulla la differenza entro la graffa, cioè in corrispondenza al fronte di ALFVEN; noti i β_k non nulli, gli α_k si ottengono immediatamente dalla (7b). Giova osservare che saturando (7a) con $\tau_{/k}$ si trova che sul fronte di ALFVEN, non potendo essere tutti nulli i $\tau^{/k}$, è

$$\frac{1}{\rho}\,\tau_{/k}\tau^{/k}\left(\pi+\frac{B^i\beta_i}{\mu}\right)=0. \tag{8'}$$

La celerità di questo fronte è $\pm b_i n^i$ (ove $n^i=\tau^{/i}/\sqrt{\tau_{/k}\tau^{/k}}$ è il versore normale al fronte d'onda). Su di esso, dovendo essere $\pi+B^i\beta_i/\mu=0$, risulta

$$\Delta\left(\bar{p}+\frac{B^iB_i}{2\mu}\right)_{/k}=0.$$

In altre parole, attraverso al fronte d'onda di ALFVEN *è nullo il salto del gradiente della pressione «totale»* (*somma della pressione ordinaria* $\bar{p}$ *e della pressione «magnetica»* $B^iB_i/2\mu$).

3.2 - FLUIDO COMPRIMIBILE IDEALE. - Nel caso $\eta=\lambda=0$, $k=0$, $1/\sigma\mu=0$ cerchiamo di caratterizzare, tra tutti i fronti, quello di ALFVEN: introdotti i moltiplicatori δ e ε, indichiamo i salti delle derivate della densità materiale e dell'entropia con

$$\Delta\rho_{/k}=\delta\tau_{/k}\,;\quad \Delta\frac{d\rho}{dt}=\delta\frac{d\tau}{dt}\,;\quad \Delta S_{/k}=\varepsilon\tau_{/k}\,;\quad \Delta\frac{dS}{dt}=\varepsilon\frac{d\tau}{dt}$$

In conseguenza di queste posizioni, il salto del gradiente della pressione termodinamica è dato da

$$\Delta p_{/k}=a^2\Delta\rho_{/k}+\frac{\partial p}{\partial S}\Delta S_{/k}=\left(a^2\delta+\frac{\partial p}{\partial S}\varepsilon\right)\tau_{/k}.$$

Le condizioni di compatibilità dinamica corrispondenti al sistema

(3), con i secondi membri nulli, danno luogo alle equazioni lineari negli otto moltiplicatori α_i, β_i, δ, ε.

$$\rho\alpha_k \frac{d\tau}{dt} + \left(a^2\delta + \frac{\partial p}{\partial S}\varepsilon\right)\tau_{/k} + \frac{1}{\mu} B^i\beta_i\tau_{/k} - \frac{1}{\mu} B^i\beta_k\tau_{/i} = 0 \tag{8a}$$

$$\delta \frac{d\tau}{dt} + \rho\alpha_i\tau^{/i} = 0 \tag{8c}$$

$$\varepsilon \frac{d\tau}{dt} = 0 \tag{8d}$$

mentre non ho scritto la (8b) perchè, quando $\alpha_i\tau^{/i} = 0$, coincide con la (7b), nè la (8b′) perchè coincide con la (7b′).

Se non si tratta di una superficie fissa rispetto al fluido, cioè se $d\tau/dt \neq 0$, per la (8d) è $\varepsilon = 0$; se fissiamo l'attenzione sulle discontinuità trasversali delle derivate della velocità è $\alpha_i\tau^{/i} = 0$, e quindi $\delta = 0$ per la (8c); nella (8a) è allora nulla la parentesi $(a^2\delta + \varepsilon\partial p/\partial S)$; quindi $\Delta p_{/k} = 0$. Si deduce ancora la (8), mentre la (8′) è sostituita da

$$\frac{1}{\rho\mu} \tau_{/k}\tau^{/k}B^i\beta_i = 0 \tag{8''}$$

e quindi

$$\Delta\left(\frac{B^iB_i}{2\mu}\right)_{/k} = 0$$

cioè attraverso al fronte d'onda di ALFVEN in un fluido comprimibile è continuo il gradiente della pressione «magnetica»; il gradiente della pressione termodinamica è continuo, perchè sono tali i gradienti della densità materiale e dell'entropia. e quindi, poichè per $\lambda = \eta = 0$ non c'è distinzione tra p e $\bar{p}$, *è continuo anche il gradiente della pressione «totale»* $p + B^2/2\mu$.

3.3 - FLUIDO COMPRIMIBILE CON VISCOSITÀ DI VOLUME NON NULLA. - Sia ora $\omega = \lambda > 0$, $\eta = 0$ (e inoltre $1/\sigma\mu = 0$, $k = 0$) [8].

[8] L'ipotesi $1/\sigma\mu = 0$ è essenziale: non lo è invece l'ipotesi $k = 0$. Se $k \neq 0$ si può introdurre la corrente specifica termica $q_r = -kT_{/r}$; alle equazioni differenziali del 1° ordine se ne aggiunge sostanzialmente un'altra (tenuto conto delle identità); in definitiva si constata che la corrente q_r è continua attraverso il fronte di ALFVEN e le eventuali discontinuità delle sue derivate sono trasversali

Possiamo ancora scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, con una funzione incognita in più, la velocità di dilatazione cubica χ, ed una equazione differenziale in più:

$$\rho \frac{dv_k}{dt} + a^2 \rho_{/k} + \frac{\partial p}{\partial S} S_{/k} - \rho F_k + \frac{1}{\mu} B^i B_{i/k} - \frac{1}{\mu} B^i B_{k/i} - \dot{\lambda} \chi_{/k} = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{dB_k}{dt} + B_k v^r{}_{/r} - B^i v_{k/i} = 0; \qquad \text{(9b')} \quad B_i{}^{/i} = 0 \tag{9b}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\chi = 0 \tag{9c}$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \lambda \chi^2 \tag{9d}$$

$$v_i{}^{/i} = \chi. \tag{9e}$$

La (9b') è conseguenza della (9b) (si veda in proposito quanto detto per la (3b') e la (3b)) cosicchè il sistema (9) è formato da nove equazioni indefinite del primo ordine nelle nove incognite v^k, B^k, ρ, S, χ. Introdotto il moltiplicatore θ, e indicata la discontinuità delle derivate della velocità di dilatazione cubica con

$$\Delta \chi_{/k} = \theta \tau_{/k}$$

le condizioni di compatibilità dinamica permettono di scrivere

$$\rho \alpha_k \frac{d\tau}{dt} + \left(a^2 \delta + \frac{\partial p}{\partial S} \varepsilon\right) \tau_{/k} + \frac{1}{\mu} B_i \beta^i \tau_{/k} - \frac{1}{\mu} B^i \beta_k \tau_{/i} - \lambda \theta \tau_{/k} = 0 \tag{10a}$$

$$\beta_k \frac{d\tau}{dt} - B^i \alpha_k \tau_{/i} = 0; \qquad \text{(10b')} \quad \beta_i \tau^{/i} = 0 \tag{10b}$$

$$\delta \frac{d\tau}{dt} = 0 \tag{10c}$$

$$\varepsilon \frac{d\tau}{dt} = 0 \tag{10d}$$

$$\alpha_i \tau^{/i} = 0. \tag{10e}$$

Saturando la (10b) con $\tau_{/k}$ e ricordando (10e) e (10b'), si ha una identità. Se $d\tau/dt \neq 0$, dalle (10c) e (10d) scende $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$. Quindi non ci sono discontinuità nelle derivate della densità e dell'entropia. Seguendo il procedimento usato per il sistema (7) possiamo ancora trovare la (8), e quindi il fronte di ALFVÉN; la (8'), invece, è sostituita da

$$(11) \qquad \frac{1}{\rho}\,\tau_{/k}\tau^{/k}\left(\frac{B^i\beta_i}{\mu} - \lambda\theta\right) = 0$$

cioè, essendo $\tau_{/k}\tau^{/k} \neq 0$,

$$(11') \qquad \Delta\left(\frac{B^2}{2\mu} - \lambda\chi\right)_{/k} = 0$$

vale a dire. sul fronte di ALFVÉN è nullo il salto del gradiente della differenza tra la pressione magnetica e la velocità di dilatazione cubica, moltiplicata per il secondo coefficiente di viscosità dinamica; d'altra parte è continuo anche il gradiente della pressione termodinamica perchè sono continui i gradienti di ρ ed S, e in definitiva è continuo il gradiente della pressione «totale» $\bar{p} + B^2/2\mu$, in quanto per $\lambda > 0$ e $\eta = 0$ è $\bar{p} = p - \lambda\chi$.

Concludendo, risultano così dimostrati i due teoremi:

TEOREMA I. - *Se $1/\sigma\mu = 0$, $\eta = 0$, il fronte d'onda di Alfvén sussiste, oltre che nei fluidi incomprimibili e nei fluidi comprimibili ideali, anche nei fluidi comprimibili con viscosità di volume non nulla.*

TEOREMA II. - *Nei casi previsti dal precedente teorema, attraverso il fronte d'onda di Alfvén si mantiene continuo il gradiente della pressione totale, somma della pressione media e della pressione magnetica.*

§ 4. Discontinuità trasversali delle derivate seconde.

4.1 - CONDUCIBILITA ELETTRICA LIMITATA - L'equazione differenziale (3a) è del secondo ordine se λ e η non sono entrambi nulli; la (3b) è del secondo ordine se il fluido non è perfetto conduttore dell'elettricità ($1/\sigma\mu \neq 0$), mentre la (3d) è del secondo ordine se il fluido è conduttore del calore ($k \neq 0$); la (3c) è del primo ordine, e può venir derivata totalmente rispetto al tempo. Cerchiamo una superficie (mobile rispetto al fluido con celerità finita) tale che attraverso ad essa siano continue tutte le funzioni incognite e le loro derivate prime, mentre presenti discontinuità almeno una delle derivate seconde delle funzioni stesse. Scrivendo solo i termini con le derivate d'ordine massimo abbiamo il sistema

$$(12b) \qquad (\lambda + \eta)v_{i}{}^{/i}{}_{k} + \eta v_{k/i}{}^{i} + \ldots = 0$$

$$(12b) \qquad \frac{1}{\sigma\mu} B_{k/i}{}^{i} + \ldots = 0$$

$$(12c) \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho \frac{dv_i{}^{/i}}{dt} + \ldots = 0$$

$$(12d) \qquad k\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho_{/i}{}^{i} + \frac{\partial T}{\partial S} S_{/i}{}^{i}\right) + \ldots = 0.$$

Introdotti gli otto moltiplicatori α'_j, β'_j, δ', ε', le condizioni cinematiche relative alle discontinuità delle derivate seconde sono

$$\Delta v_j{}^{/i}{}_{k} = \alpha'_j \tau^{/i} \tau_{/k}; \qquad \Delta B_j{}^{/i}{}_{k} = \beta'_j \tau^{/i} \tau_{/k}$$

$$\Delta \rho_{/i}{}^{k} = \delta' \tau_{/i} \tau^{/k}; \qquad \Delta \frac{d^2\rho}{dt^2} = \delta' \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2; \qquad \Delta S_{/i}{}^{k} = \varepsilon' \tau_{/i} \tau^{/k}.$$

Le condizioni dinamiche relative alle discontinuità delle derivate suddette permettono di scrivere il seguente sistema di otto equazioni lineari omogenee indipendenti negli otto moltiplicatori α_i', β_i', δ', ε',

$$(13a) \qquad (\lambda + \eta)\alpha'_i \tau^{/i} \tau_{/k} + \eta \alpha'_k \tau_{/i} \tau^{/i} = 0$$

$$(13b) \qquad \beta'_k \tau_{/i} \tau^{/i} = 0$$

$$(13c) \qquad \left\{ \delta' \frac{d\tau}{dt} + \rho \alpha'_i \tau^{/i} \right\} \frac{d\tau}{dt} = 0$$

$$(13d) \qquad \left\{ \frac{\partial T}{\partial \rho} \delta' + \frac{\partial T}{\partial S} \varepsilon' \right\} \tau_{/i} \tau^{/i} = 0.$$

I moltiplicatori β'_k intervengono solo nella (13b); su un fronte che si propaghi con celerità finita deve essere $\beta'_k = 0$, cosicchè le derivate seconde dell'induzione magnetica non presentano discontinuità attraverso ad esso.

La (13a) corrisponde all'equazione (9a) della Nota [11]; la (13c) alla (9b) e la (13d) alla (9c) della stessa Nota. La (13a), come si è visto ivi, è soddisfatta per $\lambda + 2\eta = 0$ (e α_i' qualsiasi) oppure per $\lambda > 0$, $\eta = 0$, $\alpha_i' \tau^{/i} = 0$; quest'ultimo caso è accettabile, e corrisponde a discontinuità trasversali delle derivate seconde della velocità, mentre il precedente deve venire scartato per ragioni fisiche (contraddizione con le disequazioni (4) e (4') della presente Nota). Cosicchè per $\eta = 0$. $\lambda > 0$, $1/\sigma\mu > 0$, $k > 0$ il sistema (13) si riduce a

(14a)
$$\alpha'_i \tau^{/i} = 0$$

(14b)
$$\beta'_k \tau^{/i} \tau_{/i} = 0$$

(14c)
$$\delta' \frac{d\tau}{dt} = 0$$

(14d)
$$\varepsilon' \frac{\partial T}{\partial S} \tau_{/i} \tau^{/i} = 0.$$

L'ipotesi $k = 0$ (al posto di $k > 0$) comporta modificazione solo per l'equazione (12d), e a questo proposito rimangono valide le considerazioni già fatte nella Nota [11].

Concludiamo quindi enunciando il

TEOREMA III. - *Se il primo coefficiente di viscosità è nullo (sia nulla o no la conducibilità termica) mentre il secondo coefficiente di viscosità è positivo e il fluido è imperfetto conduttore dell'elettricità* ($1/\sigma\mu \neq 0$) *può esistere un fronte d'onda che si propaga con celerità qualsiasi, attraverso al quale saltano trasversalmente le derivate seconde della velocità (mentre le derivate seconde di* ρ *ed* S *saltano solo su eventuali fronti fissi, e non esiste un fronte che possa propagarsi con celerità finita e sul quale presentino discontinuità le derivate seconde dell'induzione magnetica).*

4.2 – Conducibilità elettrica infinita. – Se invece si suppone $1/\sigma\mu = 0$ (ferme restando le ipotesi sui rimanenti coefficienti) le equazioni (12a) (12b) (12d) non vengono modificate. Il posto della (12b) è preso da

$$\frac{d^2 B_k}{dt^2} + B_k \frac{d}{dt} v_s{}^{/s} - B_i \frac{dv^k{}_{/i}}{dt} \ldots = 0 \tag{15b}$$

che si ottiene derivando totalmente rispetto al tempo la (3b) con secondo membro nullo (se invece derivassimo rispetto a una coordinata, avremmo un'equazione diversa ma in definitiva le stesse condizioni di compatibilità dinamica). Le equazioni omogenee nei moltiplicatori: (14a), (14c), (14d) rimangono le stesse, mentre la (14b) è sostituita da

$$\beta'_k \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + B_k \frac{d\tau}{dt} \alpha'_s \tau^{/s} - B_i \tau^{/i} \alpha'_k \frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{16b}$$

Il secondo addendo di questa è nullo per la (14a); saturando la (16b) con $\tau_{/k}$ si conclude che, escluso il caso $B_i \tau^{/i} = 0$ (cioè escluso il caso in cui sia nulla la componente tangenziale dell'induzione magnetica sul fronte d'onda perchè allora la (16b) darebbe $\beta'_k = 0$) è

$$\left\{ \beta'_k \tau^{/k} \left(\frac{d\tau}{dt}\right) - B_j \tau^{/j} \alpha'_k \tau^{/k} \right\} \frac{d\tau}{dt} = 0$$

e quindi $\beta'_k \tau^{/k} = 0$, cioè anche le discontinuità delle derivate seconde dell'induzione magnetica sono trasversali, mentre i valori $\beta'_k \neq 0$ si ricavano dalla (16b).

Anche qui l'ipotesi $k = 0$, al posto di $k \neq 0$, non porta altra modificazione all'infuori di quella all'equazione (12b).

Risulta così dimostrato il

Teorema IV. – *Se il primo coefficiente di viscosità η è nullo (sia o no nulla la conducibilità termica k) mentre il secondo coefficiente di viscosità λ è positivo e il fluido è perfetto conduttore dell'elettricità ($1/\sigma\mu = 0$) può esistere un fronte d'onda che si propaga con celerità qualsiasi, attraverso cui saltano trasversalmente le derivate seconde della velocità e, se l'induzione magnetica B_k non è tangente al fronte stesso, saltano trasversalmente anche le derivate* *seconde dell'induzione magnetica (mentre le derivate seconde della densità ρ e della entropia specifica S saltano solo su eventuali fronti fissi).*

Osservazione. – Da quanto sopra esposto risulta evidente che *è impossibile ogni propagazione ondosa attraverso al fluido quando è diverso da zero il primo coefficiente di viscosità* η, *siano o no nulli* λ, k, $1/\sigma\mu$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Agostinelli, *Sulle superfici d'onda in magnetofluidodinamica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) *28* (1960) p. 746-750, *29* (1960) p. 1-7.

[1a] C. Agostinelli, *Sulle superfici d'onda epicentrali*, « Atti Simposio Magnetofluidodinamica » Bari, 1961, p. 168-177.

[2] G. Carini, *Condizioni di compatibilità dinamica nella teoria delle onde Magnetoidrodinamiche*, « Rend. Ist. Lombardo », Scienze A, *87* (1954) p. 433-438.

[3] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, *2*, New York, 1962.

[4] B. Finzi, M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 2ª ed., Bologna 1961.

[5] K. O. Friedrichs, H. Kranzer, *Notes on magnetofluidynamics, VIII: Non linear Wave motion*, New York University, (NYO 6486) 1958.

[6] H. Grad, *Propagation of Magnetohydrodynamic waves without radial attenuation*, « The Magnetodynamics of conducting Fluids » (A Symposium) Stanford, 1959, p 37-60.

[7] R. Hide, P. H. Roberts, *Some elementary problems in magnetohydrodynamics*, « Adv. Appl. Mech. » 7 (1962) p. 216-327.

[8] R. Nardini, *Sui fronti d'onda della magnetoidrodinamica*, « Rivista Matematica Parma », *7* (1956) p 3-22.

[8a] R. Nardini, *Sui fronti d'onda in magnetofluidodinamica*, « Atti Simposio Magnetofluidodinamica » Bari, 1961, p. 149-159.

[9] R. S. Ong, *Characteristic Manifolds in threedimensional unsteady magnetohydrodynamics*, « Phys. Fluids » *2* (1959) p. 247-251.

[10] S. I. Pai, *One dimensional unsteady flow of magnetogasdynamics*, « Proc. 5th Midw. Conf. Fluid. Mech. Michigan », 1957, p. 251-261.

[10a] S. I. Pai, *Magnetogasdynamics and Plasma dynamics*, Wien, 1962.

[11] A. M. Pratelli, *Sui fronti d'onda nei gas viscosi e conduttori del calore*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) *34* (1963).

[12] H. Weyl, *Shock waves in arbitrary fluids*, « Communications P.A.M. », *2* (1949) p. 103-122.