# Bollettino Unione Matematica Italiana



Francesco Guglielmino


## A proposito di un teorema riguardante alcuni spazi di interpolazione.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **19** (1964), n.2, p. 171–177.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_171_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1964.

# A proposito di un teorema riguardante alcuni spazi di interpolazione.

Nota di FRANCESCO GUGLIELMINO (a Catania) (*) (**)

**Sunto.** - *Costruzione di una classe di funzioni fortemente misurabili, a valori in $L^{\infty}$. Alcune osservazioni su un precedente lavoro concernente la teoria dell'interpolazione.*

**Summary.** - *Construction of a class of strongly measurable functions having values in $L^{\infty}$. Some remarks on a previous paper concerning the theory of interpolation.*

Detti $R^m$ e $R^n$ due spazi euclidei di punti generici $x$ e $y$ rispettivamente, siano $Q$ un insieme misurabile (1) dello spazio $R^{m+n} = R^m \times R^n$, $\Omega(y)$ la sezione di $Q$ di piede $y$ e $Y$ la proiezione propria di $Q$ su $R^n$ (2). Si suole denotare (3) con $L^{p_1p_2}(Q)$ $(1 \leq p_1, p_2 \leq \infty)$ lo spazio lineare delle funzioni numeriche (4) $f(x, y)$ misurabili in $Q$ per le quali risulta finita la quantità

$$\| f \|_{p_1p_2} = \left[ \int_Y \left( \int_{\Omega(y)} | f(x, y) |^{p_1} dx \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right]^{\frac{1}{p_2}}$$

(con le solite modifiche se $p_1$, $p_2$ od entrambi sono infiniti).

In un lavoro pubblicato recentemente su questo Bollettino ho dimostrato con il metodo delle tracce introdotto da J. L. LIONS un teorema di interpolazione, analogo a quello ben noto di M. RIESZ, per trasformazioni lineari fra spazi del tipo $L^{p\,p_2}$ (5). Il Prof. PINI mi ha gentilmente segnalato (colgo, qui, l'occasione per ringraziarLo) che il teorema, se gli esponenti $p_1$ e $p_2$ sono finiti, rientra come caso particolare in un altro di BENEDEK e PANZONE dimostrato

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 27 febbraio 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio nazionale delle ricerche.

(1) La misura considerata in questa Nota è quella di LEBESGUE.

(2) Cfr. ad es.: [2], pag. 3?9.

(3) Vedi [1] e [3].

(4) Cioè a valori complessi (finiti).

(5) Vedi: [3], teorema III e l'osservazione che lo segue.

precedentemente con un procedimento completamente differente (6). D' altra parte, mi sono accorto che, proprio nei casi non considerati da BENEDEK e PANZONE, la dimostrazione del mio risultato non è del tutto esauriente perchè in un teorema preliminare sugli spazi di tracce non è assicurata la forte misurabilità di certe funzioni a valori in spazi del tipo $L^{p_1 p_2}(Q)$ (cfr. per maggiori dettagli il n. 3). Un teorema provato nella presente Nota (vedi il n. 2) permette, però, di colmare la lacuna. Viene così definitivamente dimostrato il teorema di interpolazione senza la restrizione sui valori degli esponenti fatta da BENEDEK e PANZONE; il risultato ottenuto è un po' meno significativo di quello riportato in [3] perchè una costante, che in [3] è uguale ad uno, può essere, ora, maggiore di uno quando intervengono esponenti infiniti (cfr. la nota (17)).

Richiamate nel n. 1 le nozioni di forte e debole misurabilità per una funzione a valori in uno spazio di BANACH, costruisco nel n. 2 certe funzioni fortemente misurabili a valori in $L^{\infty}$. Nel n. 3 preciso, in base ai risultati del n. 2, le dimostrazioni dei teoremi di [3].

1. Sia $T$ un insieme misurabile dello spazio euclideo $R^l$ di punto generico $t$. È noto (7) che la nozione di funzione numerica misurabile in $T$ si può generalizzare in quella di funzione fortemente (o debolmente) misurabile in $T$, a valori in uno spazio di BANACH complesso $B$.

Ricordiamo in proposito alcune definizioni:

DEFINIZIONE 1.1. – *Una funzione $f(t)$ definita quasi ovunque in* T *e a valori in* B *si dice finitamente (numerabilmente) semplice in* T *quando l'immagine di* T *per mezzo di $f$ è un sottoinsieme finito (numerabile) di* B *e l'insieme dei punti di* T *in cui $f(t) = b$ è misurabile qualunque sia l'elemento $b$ di $B$.*

DEFINIZIONE 1.2. – *Una funzione $f(t)$ definita quasi ovunque in* T *e a valori in* B *si dice fortemente misurabile in* T *se esiste una successione $\{ f_\nu(t) \}$ di funzioni semplici in* T *convergente a $f(t)$ quasi ovunque in* T (8).

(6) [1], pag. 316.

(7) Cfr. ad es.: [4], pp. 71-75, dove viene considerato un caso più generale di quello qui preso in esame.

(8) Risulta, cioè:

$$\lim_{\nu \to \infty} \| f_\nu(t) - f(t) \|_B = 0$$

quasi ovunque in $T$.

DEFINIZIONE 1.3. - *Una funzione* $f(t)$ *definita quasi ovunque in* T *e a valori in* B *si dice debolmente misurabile in* T *se la funzione numerica* $F[f(t)]$ *è misurabile in* T *qualunque sia il funzionale* F *lineare e continuo in* B.

Valgono [9] i seguenti teoremi:

TEOREMA 1.1. - *Se* B *è separabile, le nozioni di forte misurabilità e di debole misurabilità sono equivalenti.*

TEOREMA 1.2. - *Se* $f(t)$ *è fortemente misurabile in* T, *esiste una successione di funzioni semplici in* T *convergente uniformemente a* $f(t)$ *quasi ovunque in* T.

Siano, ora, $X$ un insieme misurabile dello spazio euclideo $R^m$ e $f(x, t)$ una funzione numerica misurabile in $X \times T$ la quale appartenga a $L^p(X)\,(1 \leq p \leq \infty)$ per quasi tutti i punti $t$ di $T$. Si può, allora, definire quasi ovunque in $T$ una funzione $f(t)$ a valori in $L^p(X)$ associando ad ogni punto $t$ la funzione numerica $f(x, t)$ ed interessa in alcune ricerche (cfr., per esempio, il n. 3 della presente Nota dove viene considerato un caso anche più generale) stabilire se la funzione $f(t)$ è fortemente misurabile in $T$. Ciò è senz'altro vero se $1 \leq p < \infty$ come si prova facilmente in base al teorema 1.1 [10] ma è in generale falso se $p = \infty$ come si deduce dall'esempio che segue [11].

Supponiamo, infatti, $l = m = 1$, $T = X = R^1$, $f(x, t) = 1$ per $t < x < t + 1$, $f(x, t) = 0$ nei rimanenti punti di $R^2$. Fissato comunque il numero reale $t$, $f(x, t)$ appartiene a $L^\infty(X)$. Se la corrispondente funzione $f(t)$ fosse fortemente misurabile in $T$, in virtù del teorema 1.2 esisterebbe una funzione $g(x, t)$ definita quasi ovunque in $R^2$, semplice in $T$ come funzione a valori in $L^\infty(X)$, tale che

$$\sup_X |g(x, t) - f(x,t)| < \frac{1}{2} \ \text{[12]} \qquad (t \in T - T_0),$$

dove $T_0$ è un sottoinsieme di $T$ di misura nulla. In particolare, esisterebbero due numeri reali $t_1$ e $t_2\,(t_1 < t_2)$ e una funzione $h(x)$ misurabile e limitata in $X$, tali che

$$\sup_X |h(x) - f(x, t_1)| < \frac{1}{2}, \qquad \sup_X |h(x) - f(x, t_2)| < \frac{1}{2}$$

(9) [4], pag. 73.

(10) Per una dimostrazione di questo tipo vedi: [4], pp. 567-568.

(11) Questo esempio ci è stato suggerito da un altro di BENEDEK e PANZONE ([1], pag. 319) che, però, non ci sembra convincente.

(12) Naturalmente il simbolo sup denota l'estremo superiore essenziale.

e, quindi,

$$|h(x)-1|<\frac{1}{2}, \qquad |h(x)|<\frac{1}{2}$$

in quasi tutti i punti $x$ della differenza fra l'intervallo $(t_1, t_1+1)$ e l'intervallo $(t_2, t_2+1)$ ma ciò è manifestamente assurdo.

Ritornando, ora, alle considerazioni svolte prima dell'esempio, è chiaro che presenta un certo interesse ogni procedimento costruttivo di funzioni fortemente misurabili in $T$, a valori in $L^\infty(X)$. Un semplice procedimento di questo tipo viene indicato nel successivo n. 2.

**2.** Proveremo innanzi tutto il seguente

LEMMA. – *Siano* $\varphi(x)$ *una funzione numerica misurabile e limitata in* X *e* $\psi(t)$ *una funzione fortemente misurabile in* T, *a valori in* B. *Sia, inoltre,* $\chi(b)$ *un funzionale definito in* B, *il quale risulti uniformemente continuo e limitato* ($|\chi(b)|\leq\Lambda$ *con* $\Lambda$ *costante positiva*). *Allora, la funzione* $f(t)$, *definita quasi ovunque in* T *associando ad ogni pnnto* $t$ *la funzione numerica* $\chi(\varphi(x)\psi(t))$, *è fortemente misurabile in* T, *a valori in* $L^\infty(X)$.

Se $t$ è un punto dell'insieme di definizione di $\psi(t)$, la funzione $\chi(\varphi(x)\psi(t))$ è definita quasi ovunque in $X$ ed è ivi misurabile perchè, indicata con $\{\varphi_\nu(x)\}$ una successione di funzioni semplici in $X$ convergente a $\varphi(x)$ quasi ovunque in $X$, anche la successione $\{\chi(\varphi_\nu(x)\psi(t))\}$ è costituita da funzioni semplici in $X$ e, in virtù della continuità di $\chi(b)$, converge a $\chi(\varphi(x)\psi(t))$ quasi ovunque in $X$. Essendo, poi, $\chi(b)$ limitato, resta provato che $f(t)$ è definita quasi ovunque in $T$ e a valori in $L^\infty(X)$.

D'altra parte, detta $\{\psi_\nu(t)\}$ una successione di funzioni semplici in $T$ convergente a $\psi(t)$ quasi ovunque in $T$, per ogni valore dell'indice $\nu$ la funzione $\chi(\varphi(x)\psi_\nu(t))$, considerata come una funzione $f_\nu$ di $t$ in $T$, a valori in $L^\infty(X)$, è ovviamente una funzione semplice. Inoltre, sfruttando l'uniforme continuità di $\chi(b)$ e la limitatezza di $\varphi(x)$, si prova facilmente che $\{f_\nu(t)\}$ converge a $f(t)$ in $L^\infty(X)$ quasi ovunque in $T$ e così il lemma è dimostrato.

TEOREMA 2.1. – *Siano* $\varphi(x)$ *una funzione numerica misurabile in* X *e* $\psi(t)$ *una funzione fortemente misurabile in* T, *a valori in* B. *Siano, inoltre,* $\gamma$ *un numero positivo e* $\chi(b)$ *un funzionale limitato e uniformemente continuo in* B, *costante quando* $\|b\|_B\geq\gamma$. *Allora, la funzione* $f(t)$, *definita quasi ovunque in* T *associando ad ogni* *punto $t$ la funzione numerica* $\chi(\varphi(x)\psi(t))$, *è fortemente misurabile in* T, *a valori in* $\mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{X})$.

Che la funzione $f(t)$ sia definita quasi ovunque in $T$ e a valori in $L^{\infty}(X)$ si prova come nel lemma.

Per ogni intero positivo $\nu$ denotiamo, ora, con $T_{\nu}$ l'insieme dei punti di $T$ in cui $\frac{1}{\nu} \leq \| \psi(t) \|_B < \frac{1}{\nu - 1}$ ; l'insieme $T_{\nu}$ è misurabile perchè la funzione $\| \psi(t) \|_B$ è misurabile in $T$ (13). D'altra parte, $f(t)$ è fortemente misurabile nell'insieme $T - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} T_{\nu}$ perchè in tale insiene è quasi ovunque eguale alla funzione costante $\chi(\omega)$ (di $L^{\infty}(X)$), dove $\omega$ è l'origine di $B$. Per provare che $f(t)$ è fortemente misurabile in $T$ sarà, allora, sufficiente provare che $f(t)$ è fortemente misurabile in ciascuno degli insiemi $T_{\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$). A tale scopo, fissato l'intero positivo $\nu$ introduciamo la funzione $\varphi^*(x)$ eguale a $\varphi(x)$ se $|\varphi(x)| < \nu\gamma$ ed eguale a $\nu\gamma$ se $|\varphi(x)| \geq \nu\gamma$, La funzione $\varphi^*(x)$ è misurabile in $X$ e, essendo $\chi(b)$ costante quando $\| b \|_B \geq \gamma$, si ha:

$$\chi(\varphi(x)\psi(t)) = \chi(\varphi^*(x)\psi(t))$$

quasi ovunque in $X \times T_{\nu}$. Ma allora la forte misurabilità di $f(t)$ in $T_{\nu}$ segue dal lemma perchè $\varphi^*(x)$ è limitata in $X$.

**3.** In [3] abbiamo dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 3. - *Se* $1 \leq p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \leq \infty$, $p \geq \max(p_1, p_2)$, $q \geq \max(q_1, q_2)$, $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1 - \theta}{p_i} + \frac{\theta}{q_i} \qquad (i = 1, 2),$$

*lo spazio* $\mathrm{L}^{r_1}$ Q) *è contenuto algebricamente e topologicamente nello spazio* $\mathrm{T}(p, q$ ); $\mathrm{L}^{p_1p_2}(\mathrm{Q})$, $\mathrm{L}^{q_1q_2}(\mathrm{Q}))$ (14).

(13) La misurabilità di $\| \psi(t) \|_B$ segue immediatamente dalla definizione 1.2.

(14) Lo spazio $T(p, q, \theta; L^{p_1p_2}(Q), L^{q_1q_2}(Q))$ è uno spazio di tracce. Per la definizione vedi: [3], n. 2 oppure [5], pp. 147-151, dove lo spazio qui considerato è, però, indicato con il simbolo $T_0^{(1)}\left(p, \theta - \frac{1}{p}, L^{p_1p_2}(Q); q, \theta - \frac{1}{q}, L^{q_1q_2}(Q)\right)$.

Nella dimostrazione di questo teorema. designati con $\alpha$, $\beta$, $\lambda$, $\mu$ quattro opportuni numeri reali, si considerano una funzione $f(x, y)$ di $L^{r_1 r_2}(Q$ e una funzione reale $v(t)$ misurabile in $(0, +\infty)$ e soddisfacente, inoltre, le condizioni:

$$t^\alpha v(t) \in L^p(0, +\infty), \quad t^\beta v'(t) \in L^q(0, +\infty), \quad v(0) = 1 \quad (^{15}).$$

Si costruiscono, poi, le funzioni definite dalle relazioni seguenti ([16]):

$$(3.1) \qquad g(x, y) = |f(x, y)|^\lambda \Big( \int_{\Omega(y)} |f(\xi, y)|^{r_1} d\xi \Big)^{\frac{\mu}{r_1}} \qquad ((x, y) \in Q),$$

$$(3.2) \qquad u(x, y, t) = f(x, y)\, v(tg(x, y)) \qquad ((x, y) \in Q,\ t > 0).$$

Si prova, inoltre, che sono finite le norme di $t^\alpha u(x, y, t)$ e $t^\beta \dfrac{\partial u}{\partial t}$ negli spazi $L^p(0, +\infty; L^{p_1 p_2}(Q))$ e $L^q(0, +\infty; L^{q_1 q_2}(Q))$ rispettivamente e, quindi, queste funzioni appartengono a tali spazi se sono fortemente misurabili in $(0, +\infty)$, a valori in $L^{p_1 p_2}(Q)$ e $L^{q_1 q_2}(Q)$ rispettivamente. Se $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, la forte misurabilità si prova facilmente applicando il teorema 1.1. Negli altri casi conviene supporre la funzione reale $v(t)$ continua con la derivata prima in $[0, +\infty)$, nulla per $t \geq 1$ ed uguale ad uno per $t = 0$; la richiesta forte misurabilità segue, allora, come mostreremo. dal teorema 2.1 ([17]).

([15]) $v'(t)$ è una derivata nel senso delle distribuzioni su $(0, +\infty)$; $v(t)$ si può supporre continua in $[0, +\infty)$ (per maggiori dettagli vedi: [5], pag. 149) e, quindi, $v(0)$ ha senso.

([16]) Se l'insieme $Q_0$ dei punti di $Q$ in cui $f(x, y) = 0$ ha misura non nulla le (3.1) e (3.2) debbono essere sostituite dalle relazioni:

$$g(x, y) = |f(x, y)|^\lambda \Big( \int_{\omega(y)} |f(\xi, y)|^{r_1} d\xi \Big)^{\frac{\mu}{r_1}} \qquad ((x, y) \in Q - Q_0),$$

$$u(x, y, t) = f(x, y)\, v(tg(x, y)) \qquad ((x, y) \in Q - Q_0,\ t > 0),$$

$$u(x, y, t) = 0 \qquad ((x, y) \in Q_0,\ t > 0),$$

dove $\omega(y)$ è la sezione di $Q - Q_0$ di piede $y$. Durante la redazione di [3] abbiamo dimenticato questa precisazione. Modifiche dello stesso tipo saranno sottintese nel seguito.

([17]) Viene così corretta la dimostrazione del teorema II di [3]. Però non è più valida, se $\max(p_1, p_2, q_1, q_2) = \infty$, l'osservazione che in [3] segue questo teorema mentre l'altra osservazione che segue il teorema III conserva la sua validità tranne che nella maggiorazione della norma della trasformazione $\pi$ mediante $k\,\omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}$ la costante $k$ (che in [3] è uguale ad uno) può essere, ora, maggiore di uno.

Infatti, la funzione $|b|^\theta v(|b|)$ è limitata e uniformemente continua nell'insieme dei numeri complessi e prende il valore zero quando $|b| \geq 1$; quindi, dal teorema 2.1 si deduce che la funzione

$$[tg(x, y)]^\theta \; v(tg(x, y))$$

è fortemente misurabile in $(0, +\infty)$, a valori in $L^\infty(Q)$. D'altra parte, nel corso della dimostrazione del teorema II di [3] è stato provato che la funzione

$$|f(x, y)|^{1-\lambda\theta} \left( \int_{\Omega(y)} |f(\xi, y)|^{r_1} d\xi \right)^{-\frac{\mu\theta}{r_1}}$$

appartiene allo spazio $L^{p_1p_2}(Q)$. Allora, se poniamo:

$$h(x, y) = f(x, y) \, | f(x, y) |^{-\lambda\theta} \left( \int_{\Omega(y)} |f(\xi, y)|^{r_1} d\xi \right)^{-\frac{\mu\theta}{r_1}} \qquad ((x, y) \in Q),$$

la funzione

$$h(x, y)[tg(x, y)]^\theta \; v(tg(x, y))$$

è fortemente misurabile in $(0, +\infty)$, a valori in $L^{p_1p_2}(Q)$. Infine, essendo la funzione $t^{\alpha-\theta}$ continua in $(0, +\infty)$, anche la funzione

$$t^\alpha u(x, y, t) = t^{\alpha-\theta} h(x, y)[tg(x, y)]^\theta v(tg(x, y))$$

è fortemente misurabile in $(0, +\infty)$ a valori in $L^{p_1p_2}(Q)$ (18). Con procedimento analogo si constata che $t^\beta \dfrac{\partial u}{\partial t}$ è fortemente misurabile in $(0, +\infty)$, a valori in $L^{q_1q_2}(Q)$.

(18) [4], pag. 74.

## BIBLIOGRAFIA


[1] A. Benedek, R. Panzone, *The spaces* $L^P$, *with mixed norm*, « Duke Math. Journal », 28 (1961), 301-324.

[2] G. Fichera, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Vol. I, Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma (1962).

[3] F. Guglielmino, *Su alcuni spazi di interpolazione*, « Boll. U.M.I. », (3) 18 (1963), 339-350.

[4] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Pubblications, Providence (1957).

[5] J. L. Lions, *Sur les espaces d'interpolation; dualité*, « Math. Scand. », 9 (1961), 147-177.